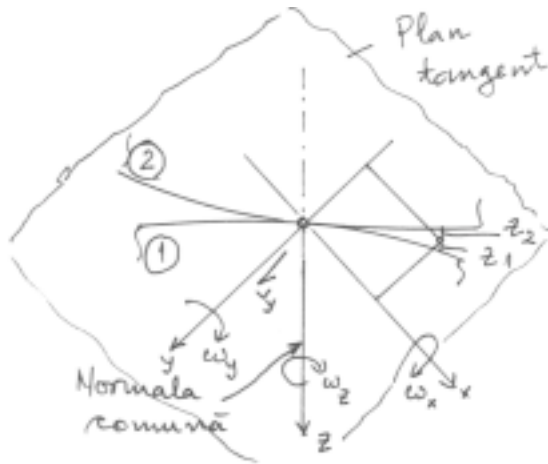


7. FRECAREA DE ROSTOGOLIRE [A6, A7, A12]

7.1. Micro-alunecări și patinare

S-a definit rostogolirea ca viteza unghiulară a mișcării dintre două corpuri în contact, în jurul unei axe din planul tangent comun.



În sistemul de referință un punct are vitezele V_1 și V_2 .

Corpurile pot avea vitezele unghiulare ω_{z1} , ω_{z2} în jurul normalei comune de contact.

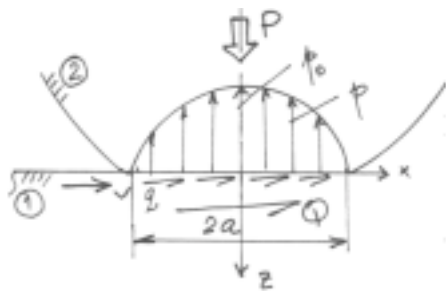
Dacă V_1 și V_2 nu sunt egale, rostogolirea este însoțită de *alunecare* și dacă ω_{z1} , ω_{z2} nu sunt egale, rostogolirea este acompaniată de *spin*.

Când rostogolirea nu este însoțită de alunecare sau spin, mișcarea se consideră de "*rostogolire pură*".

Dacă prin contact se transmite numai o forță normală, forța tangențială ($Q = 0$), se consideră mișcarea de "*rostogolire liberă*", iar dacă $Q \neq 0$, mișcare de "*rostogolire cu tracțiune*".

a) Micro-alunecări

Se consideră inițial numai influența deformației elastice asupra contactului cu rostogolire. Forța normală produce o arie finită determinată cu teoria lui Hertz. În zona de contact, în funcție de forța normală P , tangențială Q (de tracțiune) și forța de frecare (μP), pot apărea micro-alunecări (microslip) și microprinderi (microstick).



- Tracțiunea tangențială pe fiecare suprafață:

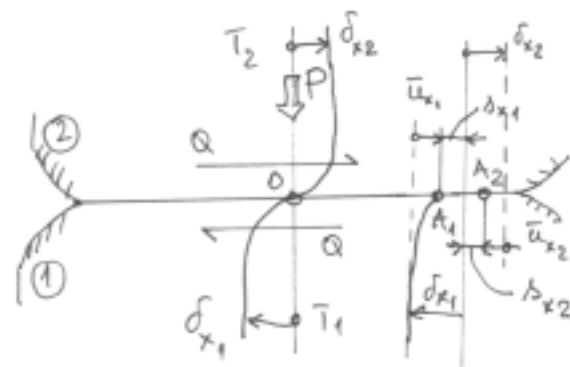
$$q_1(x,y) = -q_2(x,y) \quad (7.1)$$

- Deplasările normale, determinate de această tracțiune, sunt proporționale cu $(1 - 2\nu) / G$:

$$\frac{G_1}{1-2\nu_1} \bar{u}_{z1}(x,y) = -\frac{G_2}{1-2\nu_2} \bar{u}_{z2}(x,y) \quad (7.2)$$

- Pentru frecarea de alunecare, se acceptă legea Amonton:

$$\frac{|q(x,y)|}{p(x,y)} = \frac{|Q|}{P} = \mu = \text{coeficient de frecare (static sau cinetic)}.$$



În punctele în care $|q(x,y)| \leq \mu|p(x,y)|$ - nu există alunecare (regim cu stick).

În punctele în care $|q(x,y)| > \mu|p(x,y)|$ - apare alunecarea.

Două puncte A_1 , A_2 de pe fața de contact, înainte de aplicarea forței tangențiale Q , coincideau.

Două puncte din interiorul corpurilor T_1 și T_2 sub forța tangențială Q s-au deplasat rigid cu deplasările δ_{x1} , δ_{y1} și δ_{x2} , δ_{y2} .

Punctele de pe suprafață A_1 și A_2 se deplasează relativ față de T_1 și T_2 cu \bar{u}_{x1} , \bar{u}_{y1} și \bar{u}_{x2} , \bar{u}_{y2} .

Dacă se notează deplasările absolute ale punctelor A_1 și A_2 față de 0 cu s_{x1} , s_{y1} și s_{x2} , s_{y2} , atunci componentele alunecării între A_1 și A_2 sunt:

$$s_x = s_{x1} - s_{x2} = (\bar{u}_{x1} - \delta_{x1}) - (\bar{u}_{x2} - \delta_{x2}) = (\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2}) - (\delta_{x1} - \delta_{x2}) \quad (7.3)$$

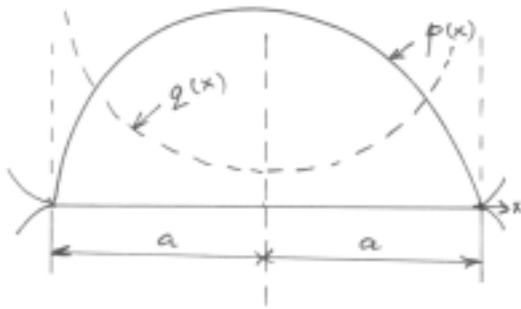
În zona cu "prinderi" (stick), $s_x = 0$, $s_y = 0$ ($\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2} = \delta_{x1} - \delta_{x2} \equiv \delta_x$).

Cazuri particulare

a₁) Contactul bidimensional al cilindrilor

a₁₁) Fără alunecare

Se consideră doi cilindri în contact cu axele paralele în direcția y , comprimați cu forța P pe unitatea de lungime și forța tangențială Q pe unitatea de lungime $Q < \mu P$ și care este aplicată succesiv.



Se consideră că forța Q nu modifică mărimea suprafeței de contact. În orice punct din zona de contact,

$$\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2} = \delta_x = ct, \quad -a \leq x \leq a \quad (7.4)$$

Presiunea normală $p(x)$ este determinată de ecuația lui Hertz.

Distribuția tangențială a tensiunilor trebuie să fie astfel încât deformațiile $\delta_x = ct$.

Un semispațiu elastic se deformează constant dacă

$$q(x) = \frac{Q}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} \quad (7.5)$$

În punctele $x = \pm a$, $q(x) \rightarrow \infty$. Deci, pentru a fi satisfăcută condiția de "prindere" (stick) $q(x) \leq \mu p(x)$, ar trebui ca $\mu \rightarrow \infty$. Ca atare, este posibil ca pe muchia de contact să fie alunecare.

a₁₂) Cilindri cu alunecare parțială (metoda Cattaneo și Mindlin).

Dacă forța tangențială este mai mare decât valoarea limită μP , corpurile alunecă relativ și tracțiunea tangențială este

$$q'(x) = \mu p_0 (1 - x^2/a^2) \quad \text{cu} \quad p_0 = 2P/\pi a, \quad (7.6)$$

în care P este forța normală pe unitatea de lungime.

Deplasările tangențiale în interiorul suprafeței de contact pot fi determinate prin analogie cu distribuția normală tangențială. Dacă nu apare alunecare în jurul originii ($x = 0$), se poate scrie :

$$\bar{u}'_{x1} = \delta'_{x1} - (1 - \nu_1^2) \mu p_0 x^2 / a E_1 \quad (7.7.a)$$

$$\bar{u}'_{x2} = -\delta'_{x2} + (1 - \nu_2^2) \mu p_0 x^2 / a E_2 \quad (7.7.b)$$

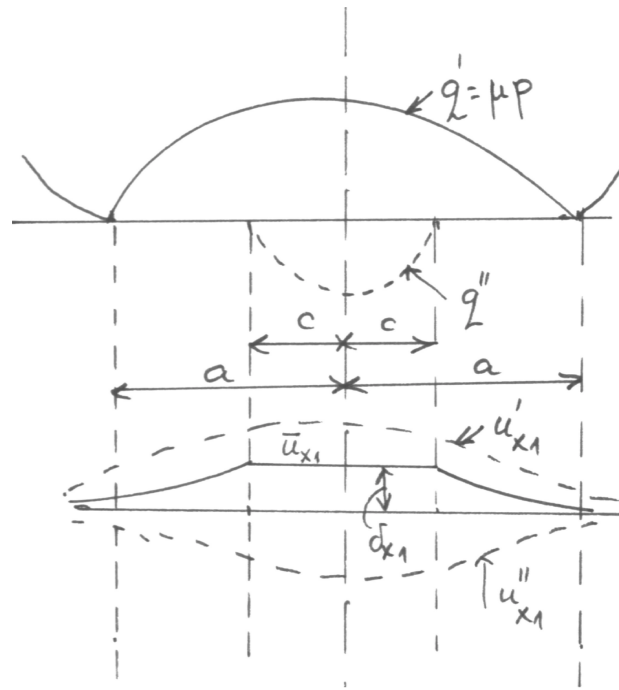
Condiția (7.4), ($\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2} = ct$), este satisfăcută de (7.7.a) și (7.7.b) numai în origine ($x = 0$). În orice alt punct condiția (7.4) nu este satisfăcută și suprafețele trebuie să alunece.

Se consideră o distribuție de tracțiune adițională

$$q''(x) = -\frac{c}{a} \mu p_0 (1 - x^2/c^2)^{1/2} \quad (7.8)$$

ce acționează în zona $-c \leq x \leq c$ ($c < a$).

Deplasarea tangențială produsă de această tracțiune în zona $-c \leq x \leq c$ este



$$\bar{u}''_{x1} = -\delta''_{x1} + (1 - \nu_1^2) \frac{c}{a} \mu p_0 x^2 / c E_1 \quad (7.9)$$

Suprapunând cele două tracțiuni q' și q'' , deplasarea totală în zona centrală ($-c \leq x \leq c$) este constantă:

$$\bar{u}_{x1} = \bar{u}'_{x1} + u''_{x1} = \delta'_{x1} + \delta''_{x1} = \delta_{x1} = ct$$

Analog, pentru cea de-a doua suprafață

$$\bar{u}_{x2} = -\delta_{x2}$$

Se observă că distribuția totală

$$q(x) = q'(x) + q''(x) = \mu p_0 \left\{ (a^2 - x^2)^{1/2} - (c^2 - x^2)^{1/2} \right\} / a \leq \mu p$$

satisface condiția de evitare a alunecării numai în zona

$$-c \leq x \leq c.$$

În cele două zone periferice $c \leq |x| \leq a$ există alunecare.

Mărima zonei de "prindere" (stick):

$$Q = \int_{-a}^a q(x) dx = \int_{-a}^a q'(x) dx + \int_{-c}^c q''(x) dx = \mu P - \frac{c^2}{a^2} \mu P \quad (7.10)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \left(1 - \frac{Q}{\mu P} \right)^{1/2} \quad (7.11)$$

a₂) Contactul sferic

a₂₁) Fără alunecare

Sub sarcina normală, aria circulară de contact este determinată cu relațiile lui Hertz.

Dacă se aplică o forță tangențială Q paralelă cu axa x , deplasările tangențiale sunt paralele cu axa x .

Distribuția tangențială care produce o deplasare tangențială uniformă a semispațiului elastic este de forma

$$q_x(r) = q_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}, \quad \text{unde } q_0 = Q_x/2\pi a^2 \quad (7.12)$$

$$\text{Deplasarea este } \bar{u}_x = \frac{\pi(2-\nu)}{4G} q_0 a \quad (7.13)$$

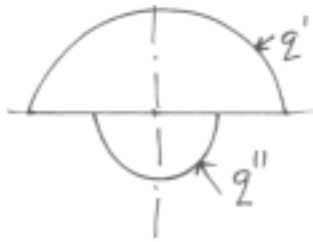
astfel că $\delta_x = \bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2} = \frac{Q_x}{8a} \left(\frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right)$, G_1 și G_2 = modulele de elasticitate transversală.

În punctele $r = a$, $q_x \rightarrow \infty$, deci microslipul este inevitabil pe muchia de contact.

a₂₂ Cu alunecare

Dacă alunecarea are loc

$$q'(x, y) = \mu P(x, y) = \mu p_0(1 - r^2/a^2)^{1/2} \quad (7.14)$$



Deplasările tangențiale în interiorul cercului de contact ($r \leq a$) sunt date

$$\text{de ecuația } \bar{u}'_x = \frac{\pi \mu p_0}{32Ga} \{4(2-\nu)a^2 + (4-\nu)x^2 + (4-3\nu)y^2\} \quad (7.15.a)$$

$$\text{și } \bar{u}'_y = \frac{\pi \mu p_0}{32Ga} 2\nu x y \quad (7.15.b)$$

Se consideră o nouă distribuție de tracțiune

$$q''(x, y) = -\frac{c}{a} p_0(1 - r^2/c^2)^{1/2} \quad (7.16)$$

ce acționează în interiorul cercului $r \leq c$; deplasările tangențiale, prin analogie cu (7.15), sunt

$$\bar{u}''_x = -\frac{c}{a} \frac{\pi \mu p_0}{32Gc} \{4(2-\nu)c^2 + (4-\nu)x^2 + (4-3\nu)y^2\}; \quad \bar{u}''_y = -\frac{c}{a} \frac{\pi \mu p_0}{32Gc}; \quad (7.17)$$

Deplasarea totală în interiorul cercului, $r \leq c$, este

$$\bar{u}'_x = \frac{\pi \mu p_0}{8Ga} (2-\nu)(a^2 - c^2) = ct; \quad \bar{u}'_y = 0;$$

$$\text{și } \delta_x = \frac{3\mu P}{16} \left(\frac{2-\nu}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right) \frac{a^2 - c^2}{a^3} = ct \quad \text{pentru } r \leq c \quad (7.18)$$

Mărimea zonei de "stick" se obține din condiția de echilibru mecanic:

$$Q_x = \int_0^a 2\pi q'' r dr - \int_0^c 2\pi q' r dr = \mu P(1 - c^3/a^3) \quad \text{și } \frac{c}{a} = \left(1 - \frac{Q}{\mu P}\right)^{1/3} \quad (7.19)$$

b) Patinare

O diferență între deformațiile tangențiale ale corpurilor din zona de prindere ("stick") conduce la alunecări mici aparente și care se numesc patinare.

Modul în care patinarea apare se poate aprecia prin exemplul unei roți deformabile ce se rostogolește pe un plan rigid. Din cauza deformației, deformațiile tangențiale din roată sunt de întindere, suprafața roții fiind întinsă, în timp ce se găsește în contact cu planul rigid. Roata se comportă la o rotație completă, ca și când ar avea o lungime mai mare decât atunci când ar fi nedeformabilă.

Raportul dintre lungimea nedeformată și cea deformată este numit rație (raport) de patinare. Acest fenomen de patinare a fost descris de Reynolds (1875) printr-un exemplu ilustrativ:

Un cilindru din cauciuc, deformat, se rostogolește pe o suprafață plană metalică la o rotație completă, mai mult decât dacă cilindru este din metal și se deplasează pe un covor de cauciuc. Explicația se dă prin existența în zona de contact a microalunecărilor și microprinderilor.

Condițiile de limită pe care trebuie să le satisfacă zona de contact.



Se consideră că rostogolirea se produce în jurul axei y ; în lipsa deformării și a alunecării, particulele materiale ale fiecărei suprafețe se deplasează în direcția x cu viteza comună V , numită viteza de rostogolire.

În plus, corpurile pot avea vitezele unghiulare ω_{z1} și ω_{z2} și, deci, poate rezulta și mișcarea de spin (pivotare).

Aplicarea tracțiunilor tangențiale și deformarea introduc vitezele de fluaj δV_1 și δV_2 ; fiecare are componente în ambele direcții x și y , care sunt mici în comparație cu viteza de rostogolire V . Viteza unui element de material este, de asemenea, influențată de starea de deformații. Dacă componentele deplasării tangențiale elastice într-un punct de pe

suprafață (x, y) sunt $\bar{u}_x(x, y, t)$ și $\bar{u}_y(x, y, t)$, atunci viteza "zonei nedeformate" se modifică prin componentele

$$\frac{d\bar{u}_x}{dt} = V \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \quad \text{și} \quad (7.20.a)$$

$$\frac{d\bar{u}_y}{dt} = V \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_b}{\partial t} \quad (7.20.b)$$

Deci, viteza resultantă într-un punct de pe suprafața de contact este

$$V_x(x, y) = V + \delta V_x - \omega_z y + V \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} \quad \text{și} \quad (7.21.a)$$

$$V_y(x, y) = \delta V_y + \omega_z x + V \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} \quad (7.21.b)$$

Vitezele "micro-slipului" între punctele de contact, pentru rostogolirea deplină (deformațiile nu variază în timp)

$$\begin{aligned} \dot{s}_x(x, y) &\equiv v_{x1} - v_{x2} = \\ &= (\delta V_{x1} - \delta V_{x2}) - (\omega_{z1} - \omega_{z2})y + V \left(\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7.22.a)$$

$$\text{analog} \quad \dot{s}_y(x, y) \equiv v_{y1} - v_{y2} \quad (7.22.b)$$

Pentru contactul eliptic cu semiaxele a și b , se poate scrie

$$\dot{s}_x / V = \xi_x - \psi y / c + \left(\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x} \right) \quad (7.23.a)$$

$$\dot{s}_y / V = \xi_y - \psi x / c + \left(\frac{\partial \bar{u}_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{y2}}{\partial x} \right) \quad (7.23.b)$$

unde $\xi_x \equiv (\delta V_{x1} - \delta V_{x2}) / V$ și $\xi_y \equiv (\delta V_{y1} - \delta V_{y2}) / V$ sunt rapoartele de patinare;

$\psi = (\omega_{z1} - \omega_{z2})c / V$ este parametrul de spin (pivotare), $c = \sqrt{ab}$.

În regiunea de "prindere" (stick)

$$\dot{s}_x = \dot{s}_y = 0 \quad (7.24)$$

și $(q(x, y)) \leq \mu P(x, y)$

În regiunea de alunecare

$$\begin{aligned} |q(x, y)| &= \mu p(x, y) \\ \text{și} \quad \frac{q(x, y)}{|q(x, y)|} &= \frac{\dot{s}(x, y)}{|\dot{s}(x, y)|} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Exemplu de patinare și micro-alunecare în contactul de rostogolire –

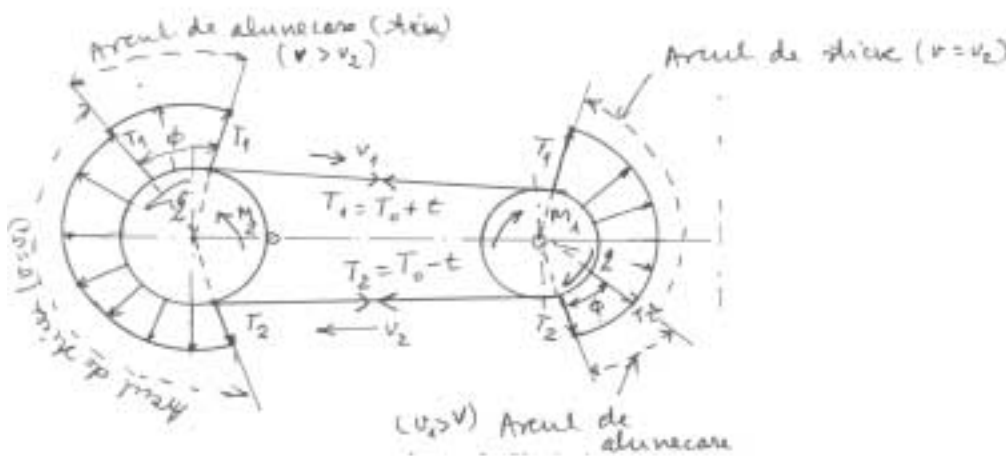
Transmisia cu curele elastice

Fie M momentul de torsiune ce trebuie transmis $\Rightarrow T_1 = T_0 + t$ și $T_2 = T_0 - t$

$$T_1 - T_2 = 2t = M/R$$

$$e^{\mu\phi} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + M/2RT_0}{1 - M/2RT_0}$$

Unde este situat arcul de alunecare pe fiecare roată ?



Tensiunile de tracțiune din curea vor întinde curea și o vor alungi relativ elastic (legea Hooke)

$$\epsilon = \lambda T, \quad (7.26)$$

unde λ este E/A (E - modulul de elasticitate longitudinală, A - secțiunea curelei).

Astfel, un element de lungime dx va avea lungimea

$$dl = (1 + \epsilon) dx \quad (7.27)$$

$$\text{Viteza elementului} \quad v = \frac{dl}{dt} = (1 + \epsilon) \frac{dx}{dt} = (1 + \lambda T) V,$$

$$(7.28)$$

în care $V = dx / dt$ este viteza de "întindere" a curelei.

Această viteză este mai mare în ramura conducătoare (întinsă) a curelei (v_1) decât în cea condusă (v_2).

Rația (raportul) de patinare pentru transmisie

$$\xi \equiv \frac{(\omega_1 - \omega_2)R}{V} = \frac{v_1 - v_2}{V} = \lambda(T_1 - T_2) = \lambda M/R \quad (7.28')$$

Pierderea de putere are loc în zona de alunecare prin disiparea prin frecare.

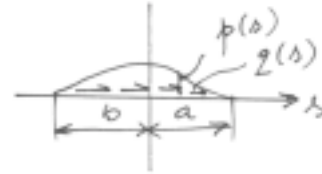
7.2. Rostogolirea liberă a corpurilor cu proprietăți elastice diferite

a) Cilindri cu axe paralele

Cilindrii sunt apăsați cu forța P pe unitatea de lungime. Presiunea și aria de contact se determină cu relațiile lui Hertz.

Din teoria elasticității

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{a(s)}{x-s} ds$$



Considerând că frecarea este suficient de mare pentru a împiedica alunecarea \Rightarrow

$$\pi\beta p(x) + \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds = \frac{1}{2} \pi E^* \xi_x = \text{constant}, \quad -a \leq x \leq a \quad (7.29)$$

$$\text{cu} \quad \beta \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\{(1-2\nu_1)/G_1\} - \{(1-2\nu_2)/G_2\}}{\{(1-\nu_1)/G_1\} + \{(1-\nu_2)/G_2\}} \right]$$

Tracțiunea care satisface condiția (7.9) este

$$q(x) = \frac{\beta}{x} p_0 (1 - x^2/a^2)^{1/2} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (7.30)$$

$$\text{și} \quad \xi_x = 4\beta p_0 / \pi E^* = 2\beta a / \pi R \quad (7.31)$$

Se analizează posibilitatea de alunecare.

Raportul $\frac{q(x)}{p(x)} \rightarrow \infty$ pentru $x = \pm a$, deci alunecarea este inevitabilă.

Pentru cazul extrem, când coeficientul de frecare este mic, efectul tracțiunii tangențiale este mic asupra deformației elastice. În această situație, $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \approx -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x)$ cu $p(x)$ distribuția hertziană. Cu această precizare, rezultă viteza de alunecare

$$\frac{\dot{s}_x}{V} = \xi_x - (\beta a / 4R) (1 - x^2/a^2)^{1/2} \quad (7.32)$$

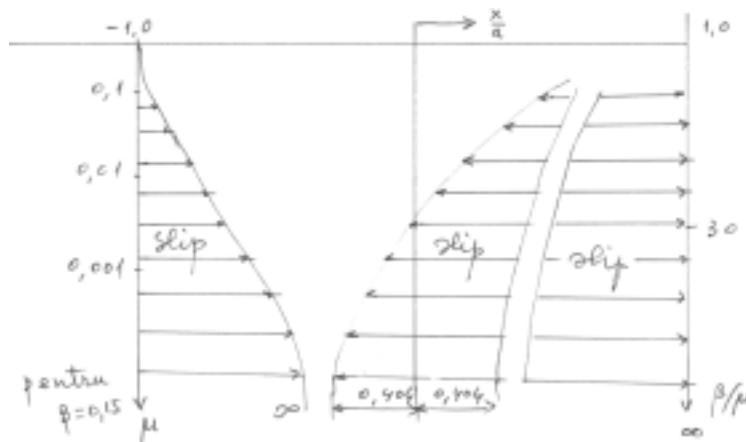
Dacă rația (raportul) de patinare ξ_x are o valoare pozitivă, atunci viteza de alunecare este pozitivă pe muchia de contact și negativă în centru.

Tracțiunea de frecare $\pm \mu p(x)$, deși mică, poate schimba sensul de alunecare în două puncte simetrice față de origine.

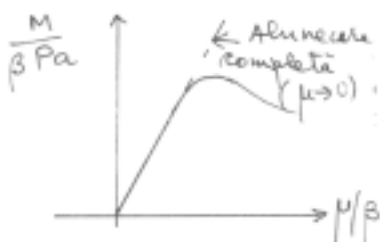
Poziția acestor puncte și, implicit valoarea lui ξ_x , este determinată din condiția că în rostogolirea liberă forța tangențială este zero. Această cerință este îndeplinită pentru $x = \pm 0,404 a$, astfel că

$$\xi_x = 0,914 \beta a / R \quad (7.33)$$

În funcție de raportul (β / μ) , între alunecarea completă și fără alunecare există două regiuni de stick (prindere) ce separă trei regiuni în care alunecarea are sensuri alternante.



Disiparea energiei din zonele de alunecare (slip) contribuie la momentul rezistent la rotație (rostogolire) a cilindrilor (M).



Reynolds a prezis că rezistența la rostogolire este mică atunci când μ este mare, deoarece microalunecările sunt esențiale și este, din nou, mică atunci când μ este mic, deoarece forțele de frecare sunt foarte mici.

Rezistența la rostogolire este maximă când $\mu \approx \beta / 5$
 $(\mu / \beta \approx 0,2)$.

b) Rostogolirea liberă a sferelor

Se consideră inițial că nu există alunecare și se neglijează influența tracțiunii tangențiale asupra distribuției presiunii normale.

În aceste condiții

$$\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x} = -\xi_x = ct; \quad \frac{\partial \bar{u}_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{y2}}{\partial x} = -\xi_x = ct = -\xi_y$$

Tensiunea tangențială $q(x,y)$, care satisface aceste condiții, are expresia

$$q(r) = \frac{\beta p_0}{\pi} \left\{ -\frac{a}{r} (a^2 - r^2)^{1/2} + \frac{1}{r} \int_r^a \frac{t^2}{(t^2 - r^2)^{1/2}} \ln \left(\frac{t+r}{t-r} \right) dt \right\} \tag{7.34}$$

$$\text{și} \quad \xi_x = \beta a / \pi R \tag{7.35}$$

7.3. Rostogolirea cu tracțiune a cilindrilor elastici

Este cazul roților motoare ale vehiculelor. Se consideră cilindrii cu aceleași proprietăți elastice și că forța transmisă este mai mică decât limita de frecare.

Se dorește detremnarea zonelor cu alunecare și cu prindere (aderență, stick).

Condițiile $(q(x, y) = \mu p(x, y))$ - condiția de alunecare - și $\frac{q(x, y)}{|q(x, y)|} = -\frac{\dot{s}(x, y)}{|\dot{s}(x, y)|}$ - direcția tensiunilor tangențiale este opusă ca sens vitezei de alunecare - sunt satisfăcute dacă

$$q'(x) = \mu p_0 (1 - x^2/a^2)^{1/2}, \quad q'' = \frac{c}{a} \mu p_0 (1 - x^2/c^2)^{1/2} \quad (7.36)$$

$$\text{și } \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial x} = -\frac{2(1-v^2)}{aE} \mu p_0 x, \quad \frac{\partial \bar{u}''_x}{\partial x} = \frac{c}{a} \frac{2(1-v^2)}{cE} \mu p_0 (x+d) \quad (7.37)$$

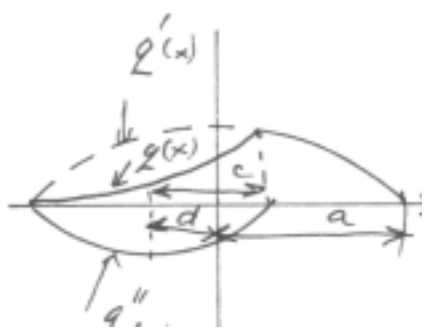
Deci, în interiorul zonei $-a \leq x \leq c-d$

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{2(1-v^2)}{aE} \mu p_0 d = \text{constant} \quad (7.38)$$

În această zonă, rația (raportul) de fluaj (patinare) este

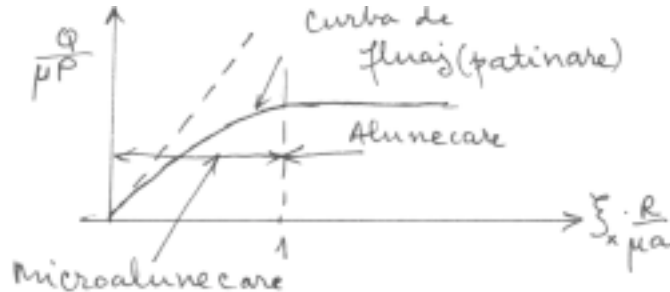
$$\xi_x = -4(1-v^2) \mu p_0 d / aE \quad (7.39)$$

Lățimea zonei de stick (adeziune, prindere) este determinată de mărimea forței tangențiale.



$$\frac{d}{a} = 1 - \frac{c}{a} = 1 - (1 - Q/\mu P)^{1/2} \quad (7.40)$$

$$\text{și } \xi_x = -\frac{\mu a}{R} \left\{ 1 - (1 - Q_x/\mu P)^{1/2} \right\} \quad (7.41)$$



Efectul forței de tracțiune, deși mică, determină microalunecări pe muchia de tracțiune a suprafeței.

Regiunea de alunecare se întinde în fața cilindrilor, astfel că, la o anumită forță tangențială $Q = \mu P$, alunecarea este totală.

În cazul unei frecări mari, $Q/\mu P$ este foarte mic, regiunea de alunecare pe muchia de tracțiune se reduce foarte mult și distribuția tracțiunii tangențiale este

$$q(x) = \frac{p_0}{2} \frac{a+x}{(a^2-x^2)^{1/2}} \cdot \frac{Q_x}{P} \quad (7.42)$$

Raportul (rația) limită al patinării este

$$\xi_x = aQ_x / 2RP \quad (7.43)$$

Rata energiei disipate (viteza de disipare), ca urmare a forței de tracțiune, este

$$\dot{W} = Q_x \xi_x V = aQ_x^2 V / 2RP \quad (7.44)$$

Când forța tangențială acționează în direcția y (axa cilindrilor), analog se deduce

$$\xi_y = -\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \mu p_0 \left\{ 1 - (1 - Q_y/\mu P)^{1/2} \right\} \quad (7.45)$$

7.4. Rostogolirea cu tracțiune și spin a corpurilor tridimensionale

Corpurile tridimensionale, în contactul cu rostogolire, transmit forțe tangențiale Q_x în direcție longitudinală și Q_y în direcție transversală, în timp ce viteza unghiulară în jurul axei normale comune de contact $\Delta\omega_z \equiv \omega_{z1} - \omega_{z2} \neq 0$.

Mișcarea de spin tinde să răsucescă interfața de contact și conduce la creșterea tracțiunii și microalunecării.

Contactul se consideră eliptic. Se acceptă apriori că în zonele cu alunecare și prindere (stick, aderență) sunt îndeplinite condițiile (7.25):

$$\begin{aligned} \dot{s}_x = \dot{s}_y = 0 \quad \text{și} \quad |q(x, y)| \leq \mu p(x, y) & \quad - \quad \text{zona de "stick"} \\ \frac{q(x, y)}{|q(x, y)|} = -\frac{\dot{s}(x, y)}{|\dot{s}(x, y)|} \quad \text{și} \quad |q(x, y)| = \mu p(x, y) & \quad - \quad \text{zona de "slip"} \end{aligned}$$

Se analizează următoarele situații, funcție de mărimea coeficientului de frecare la alunecare (μ).

a) Neglijarea alunecării ($\mu \rightarrow \infty$) : teoria patinării liniare

Pentru simplificare, se consideră că pe un contact circular se transmite o forță tangențială Q_x și tracțiunea are expresia

$$q_x(x, y) = \frac{Q_x}{2\pi a^2} \cdot \frac{a+x}{(a^2-r^2)^{1/2}} \quad (7.46)$$

Deplasările tangențiale în interiorul cercului de contact ($r \leq a$), produse de această tracțiune, sunt:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{Q(4-3\nu)}{32Ga^2}; \quad \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{nu există deformare pe direcția } y, Q_y = 0) \quad (7.47)$$

și care respectă condițiile de a nu apărea alunecarea.

Rația (raportul) de patinare este

$$\xi_x = -\frac{4-3\nu}{16Ga^2} Q_x; \quad \xi_y = 0 \quad (7.48)$$

Analog, pentru o forță tangențială în direcția y , Q_y

$$q_y(x, y) = \frac{Q_y}{2\pi a^2} \cdot \frac{a+x}{(a^2-x^2)^{1/2}} \quad (7.49)$$

$$\text{rezultă} \quad \xi_y = -\frac{(4-\nu)Q_y}{16Ga^2}; \quad \xi_x = 0 \quad (7.50)$$

Ca urmare a asimetriei tracțiunii $q_y(x, y)$, se exercită un moment de pivotare în jurul punctului 0

$$M_z = -\frac{1}{3} Q_y a = \frac{16}{3(4-\nu)} \xi_y \quad (7.51)$$

În cazul pivotării pure, distribuțiile tracțiunii, care satisfac condițiile de a nu apărea alunecarea, sunt

$$q_x = \frac{8G(3-\nu)}{3\pi(3-2\nu)} \psi \frac{(a+x)y/a}{(a^2-r^2)^{1/2}} \quad \text{și} \quad q_y = \frac{8G(1-\nu)}{3\pi(3-2\nu)} \psi \frac{(a^2-2x^2-ax-y^2)/a}{(a^2-r^2)^{1/2}} \quad (7.52)$$

cu $\psi = (\omega_{z1} - \omega_{z2})c/V$ și $c = \sqrt{ab}$ - parametrul de "spin" sau pivotare.

Aceste tracțiuni corespund unei forțe rezultante nule, $Q_x = Q_y = 0$, dar determină un moment resultant ce se opune mișcării de spin

$$M_z = \frac{32(2-\nu)}{q(3-2\nu)} Ga^3 \psi \quad (7.53)$$

Când gradientul deplasărilor determinate de tracțiunile (52) respectă condițiile "fără alunecare", rezultă rațiile (rapoartele) de patinare

$$\xi_x = 0; \quad \xi_y = \frac{2(2-\nu)}{3(3-2\nu)} \psi \quad (7.54)$$

Pentru contactul eliptic, Kalker (1964) a utilizat următoarea distribuție a tracțiunii

$$q(x,y) = A_{mn} (x/a)^m (y/b)^n \left[1 - (x/a)^2 - (y/b)^2 \right]^{1/2} \quad (7.55)$$

S-au dedus următoarele trei ecuații liniare de fluaj (patinare):

$$\frac{Q_x}{Gab} = C_{11} \xi_x; \quad \frac{Q_y}{Gab} = C_{22} \xi_y + C_{23} \psi; \quad \frac{M_z}{G(ab)^{3/2}} = C_{32} \xi_y + C_{33} \psi \quad (7.56)$$

în care C_{11} , C_{22} , C_{23} , C_{32} , C_{33} sunt coeficienți adimensionali, deduși teoretic:

	Elipticitatea	$-C_{11}$	$-C_{22}$	$C_{23} = -C_{32}$	$-C_{33}$
$\frac{a}{b}$	0,2	3,56	2,65	0,62	4,68
	0,4	3,72	2,91	0,83	2,42
	0,6	3,90	3,17	1,04	1,74
	0,8	4,08	3,46	1,27	1,32
	1,0	4,29	3,73	1,50	1,18
$\frac{b}{a}$	0,8	4,58	4,11	1,82	1,01
	0,6	4,99	4,65	2,29	0,86
	0,4	5,80	5,59	3,27	0,70
	0,2	7,93	8,45	6,76	0,57

*) a - este semiaxa elipsei în direcția de rostogolire.

b) Alunecare completă

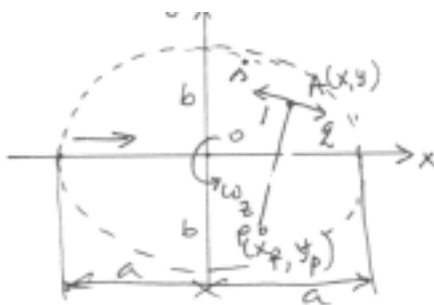
În cazul extrem, când fluajul și pivotarea sunt mari iar coeficientul de frecare este mic, deformațiile elastice determinate de tracțiunea tangențială sunt mici. În expresiile (23.a,b), termenii deplasărilor elastice se neglijează, astfel că numai într-un punct P (x_p, y_p) (polul pivotării, "spinului")

$$x_p / a = -\xi_y / \psi \quad \text{și} \quad y_p / a = \xi_x / \psi$$

(7.57)

Deoarece deformația elastică în planul $x - y$ este neglijată, mișcarea relativă a suprafeței comprimate este aceea a unui rigid în rotație cu viteza unghiulară $\omega_{z1} - \omega_{z2}$ în jurul polului pivotării P.

Într-un punct oarecare A(x,y), tracțiunea tangențială rezultantă $q(x,y)$ are mărimea $\mu p(x,y)$ în direcție perpendiculară pe linia PA.



Forțele Q_x , Q_y și momentul M_z corespund unei combinații de fluaj și alunecare ce pot fi determinate prin integrare numerică. Interacțiunea între pivotare și tracțiune joacă un rol important în contactul cu rostogolire al variatoarelor de turație.

c) Alunecare parțială: teoria patinării neliniare

Pentru contactul circular, atunci când se transmite numai Q_x , patinarea (fluaj) este dată de

$$\xi_x = -\frac{3\mu P(4-3\nu)}{16Ga^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{Q_x}{\mu P} \right)^{1/3} \right\} \quad (7.58.a)$$

și când se transmite Q_y

$$\xi_y = -\frac{3\mu P(4-\nu)}{16Ga^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{Q_y}{\mu P} \right)^{1/3} \right\} \quad (7.58.b)$$

Pentru contactul eliptic:

$$\frac{Q_x}{\mu P} = \frac{3}{2} \eta_x \arccos(\eta_x) + \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{2} \eta_x^2 \right) (1 - \eta_x^2)^{1/2} \right\} \quad (7.59)$$

unde $\eta_x = \xi_x G / \mu p_0$.

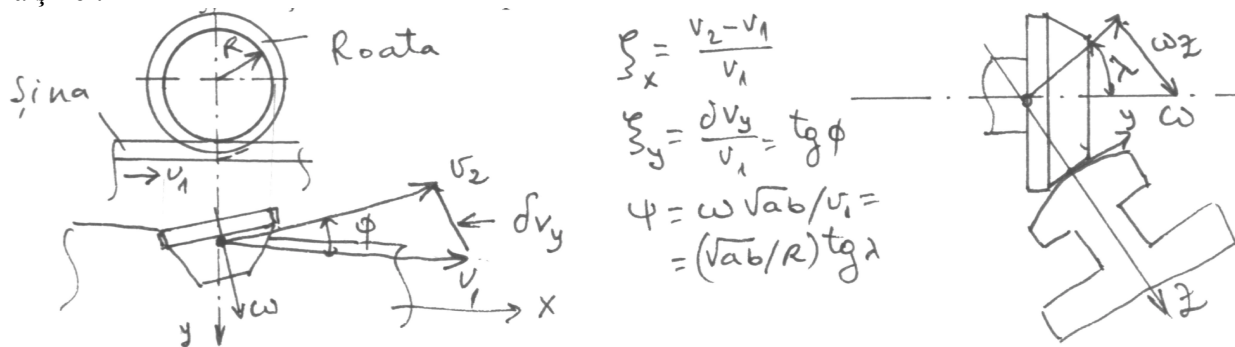
Pentru alunecare foarte mică, $\mu \rightarrow \infty$

$$Q_x = \frac{\pi^2}{4} \frac{G ab}{1-\nu} \xi_x \quad (7.60)$$

Forțele de patinare au rol important în ghidarea și stabilitatea rulării roților vehiculelor pe șine.

Punctul de contact este astfel situat încât viteza relativă dintre șină și roată (viteza vehiculului) V_1 să aibă sensul de mișcare ("înainte"). Profilul roții este conic, astfel că patinarea longitudinală ξ_x poate crește când cele două roți ale vehiculului se deplasează pe raze diferite. Patinarea longitudinală este, de asemenea, o consecință a roții motoare sau de frână.

Patinarea laterală ξ_y crește dacă în timpul înaintării setului de roți, planul roții face un unghi mic ϕ cu axa șinei.

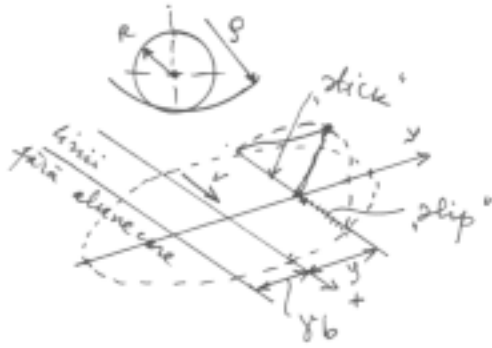


Deoarece normala comună în punctul de contact este înclinată cu unghiul λ față de axa de rotație, roata are o viteză unghiulară de pivotare (spin) $\omega_z = \omega \sin \lambda$ față de șină.

Pentru valori reduse ale patinărilor (ξ_x, ξ_y), se pot determina forțele de patinare Q_x, Q_y (rel. 7.56.a,b,c).

7.5. Rostogolirea unei bile într-un canal

O bilă într-un șanț (canal) cu secțiunea transversală de rază ρ reprezintă cazul frecvent al rulmenților. Sub acțiunea forței normale, aria de contact este o elipsă alungită în direcția transversală. Punctele de contact din zona încărcată au viteze periferice diferite care conduc la microalunecări.



Viteza periferică a bilei:

$$V_1 = \omega(R - \delta_z) \approx \omega(R - y^2 / 2R) \tag{7.61}$$

Raportul de patinare

$$\begin{aligned} \xi(y) &= \frac{V_1 - V_2}{\omega R} = \frac{\omega R - \omega y^2 / 2R}{\omega R} - \frac{V_2}{\omega R} = \left(1 - \frac{V_2}{\omega R}\right) - \frac{y^2}{2R^2} = \\ &= \xi_0 - y^2 / 2R \end{aligned} \tag{7.62}$$

În condițiile rostogolirii libere (fără forțe tangențiale) se disting pe aria de contact trei zone (Heathcote):

- o zonă centrală (y mic), unde alunecarea este pozitivă;
- 2 zone laterale (y mare), unde alunecarea este negativă.

Heathcote (1921) a dezvoltat teoria alunecării complete, prin neglijarea complianței elastice a bilei și a canalului. El a dedus că rotirea bilei se face cu un moment de frecare M ,

$$\frac{M}{RP} = 0,08\mu \frac{b^2}{R^2}, \tag{7.63}$$

unde b este semiaxa elipsei de contact în direcție transversală

Dimensiunile suprafeței eliptice de contact (a,b) și presiunea maximă (p_o) se determină cu relațiile lui Hertz.

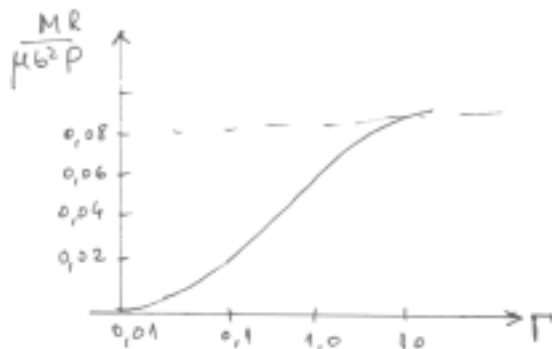
Rezultă:

- o regiune de "stick" (aderență) pe muchia conducătoare, care are centrul localizat la x = -d;
- o regiune de "slip" (alunecare), pe muchia condusă.

Dacă se înlocuiește coeficientul de patinare, $\xi_x = -4(1 - \nu^2)\mu p_o d / aE$, în (7.62), rezultă poziția d :

$$\frac{d}{a} = \Gamma(\gamma^2 - y^2 / b^2) \tag{7.64}$$

unde $\Gamma = \frac{b^2 E^*}{4\mu p_o R} = \frac{b^2 \rho E(e)}{2\mu a R(2\rho - R)}$ și $\gamma^2 = 2R^2 \xi_0 b^2$ (Γ - factor de conformitate).



E(e) - integrală eliptică de ordinul II

$$e = \sqrt{1 - b^2 / a^2}, \quad b < a$$

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x^2 \sin^2 e)^{1/2} de$$

Zona "fără micro-alunecări" se găsește în intervalul $y = \pm \gamma b$ și $d / a_x < 1$, cu d determinabil din (7.64).

Pentru $d / a_x = 1$ are loc cea mai mare alunecare în direcția y . Determinarea mărimii γ se face ținând seama de condiția că forța tangențială rezultantă este nulă.

Ținând seama că regiunea de "aderență" (fără micro-alunecări) este dată de $\frac{d}{a} = 1 - \frac{c}{a} = 1 - (1 - Q_x / \mu P)^{1/2}$, rezultă forța tangențială pe unitatea de lățime, exercitată la "desprindere"

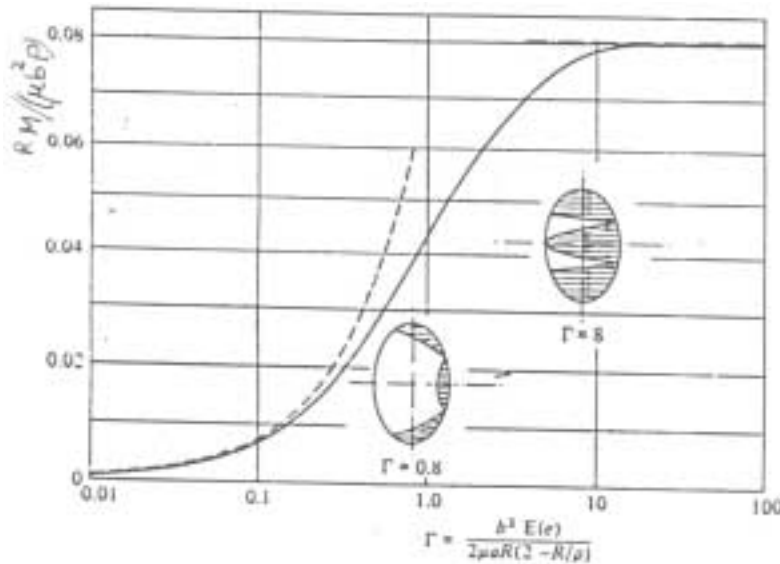
$$Q^* = \frac{\pi}{2} \mu p_o^* a_x \frac{d}{a_x} \left(2 - \frac{d}{a_x} \right) = \frac{\pi}{2} \mu p_o a \frac{d}{a} \left(2 \frac{a_x}{a} - \frac{d}{a} \right) \quad (7.65)$$

$$\text{Pentru rostogolirea liberă, forța totală de tracțiune este } Q = \int_{-b}^b Q^* dy = 0 \quad (7.66)$$

Această condiție determină valoarea lui γ (poziția benzilor cu alunecarea zero) și, deci, coeficientul (rația) de patinare ξ_o . Momentul rezistent la rostogolire este definit prin

$$M = \int_{-b}^b Q^* (R - y^2 / R) dy = - \int_{-b}^b Q^* (y^2 / R) dy \quad (7.67)$$

și este dependent de factorul de conformitate.



Rezolvarea numerică a integralei (7.67) se ilustrează în figura alăturată.

Când conformitatea este închisă ($\rho \rightarrow R$) sau când coeficientul de frecare este mic, Γ este mare, momentul rezistent la rostogolire se apropie de cel obținut la alunecare completă, dat de (7.63).

contactului cu rostogolire (modelul Winkler)

Două corpuri elastice în rostogolire pot fi considerate ca un tor rigid, cu aceeași curbură principală relativă și pe care se rulează un strat elastic de grosime h . Acest tor rigid, "îmbrăcat" în stratul elastic se rostogolește pe un strat plan rigid.

Elasticitățile celor două materiale sunt reprezentate prin modelul stratului K_p pentru compresiunea normală și K_q pentru forfecarea tangențială.

Curbura și mărimea elipsei de contact și presiunea de contact sunt determinate cu teoria lui Hertz.

Deplasările tangențiale de suprafață \bar{u}_x și \bar{u}_y sunt definite de componentele tracțiunii tangențiale

$$\text{prin } q_x = (K_q / h) \bar{u}_x; \quad q_y = (K_q / h) \bar{u}_y; \quad (\text{Explicație: } \sigma = \epsilon E = \frac{\Delta \ell}{L} E = \Delta \ell \left(\frac{E}{L} \right)) \quad (7.68)$$

$$q_x = \epsilon_x G = \frac{\bar{u}_x}{L_x} G = u_x \frac{K_q}{h}$$

Astfel, stratul este în același timp o "perie de sârmă" și fiecare "țeapă-sârmă" se poate deforma corespunzător relației (7.68), independent de "vecinii" săi.

Condițiile pentru alunecare și aderență (stick și slip) - relațiile (7.21-7.25) corespund și, împreună cu condiția că tracțiunea este zero pe muchia conducătoare, sunt utilizate pentru definirea distribuției tracțiunii tangențiale pe aria de contact.

Deoarece tracțiunea (ec. 7.68) în orice punct depinde numai deplasarea din acel punct, (ecuațiile de alunecare (ec. 7.23):

$$\dot{s}_x / V = \xi_x - \psi y / c + \left(\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x} \right); \quad \dot{s}_y / V = \xi_y - \psi x / c + \left(\frac{\partial \bar{u}_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{y2}}{\partial x} \right)$$

pot fi integrate direct pentru definierea tracțiunii.

Condițiile de tranziție ale variației deplasărilor cu timpul trebuie urmate pas cu pas de la condițiile inițiale la cele finale.

Metoda numerică este cea mai corectă (utilizată de Kalker - 1973).

Se analizează prin modelul Winkler, contactul de tracțiune cu rostogolire a doi cilindri (analizat exact în §.3)

Deplasările elastice ale ambelor suprafețe sunt combinate în deplasarea \bar{u}_x a stratului, astfel că în zona de aderență (stick) ecuațiile (7.23) și $\dot{s}_x = \dot{s}_y = 0$ se reduc la:

$$\xi_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \dot{s}_x / V = 0 \quad (7.69)$$

$\xi_x \equiv (\delta V_{x1} - \delta V_r) / V$ - coeficient (rația) de patinare (fluj)

Dacă se substituie \bar{u}_x din (7.68), $\bar{u}_x = q_x (h / K_q)$, rezultă o ecuație diferențială simplă pentru q_x care, integrată în condițiile $q_x = 0$ la $x = -a$, rezultă

$$q_x = -(K_q \xi_x / h)(a + x) \quad (7.70)$$

În contrast cu soluție exactă, tracțiunea este finită pe muchia condusă a contactului. Forța tangențială totală se obține prin integrarea a ecuației (7.70)

$$Q_x = \int_{-a}^a q_x dx = -K_q \xi_x a^2 h \quad (7.71)$$

Alunecarea va apărea pe muchia codusă, acolo unde presiunea tinde către zero, dar tracțiunea q_x nu este nulă.

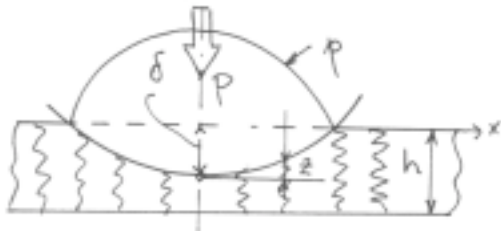
Se consideră distribuția parabolică a presiunii: $p(x) = (K / 2Rh)(a^2 - x^2)$

Modelul Winkler

$$p(x, y) = \frac{K}{h} \bar{u}_z(x, y);$$

K - modulul elastic al stratului.

$$\text{Dar } \bar{u}_z(x, y) = \begin{cases} \delta - z(x, y) & \text{pt } \delta > z \\ 0 & \text{pt } \delta \leq z \end{cases}$$



$$\text{și } z(x, y) = \frac{x^2}{2R'} + \frac{y^2}{2R''}.$$

Deoarece $\bar{u}_z = 0$ în afara zonei de contact, la limită rezultă semiaxele $a = \sqrt{2\delta R'}$, $b = \sqrt{2\delta R''}$.

Deci, $p(x, y) = \frac{K\delta}{h} (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$ - distribuție parabolică (în ecuațiile hertziene - distribuția era eliptică $\sqrt{1 - x^2}$).

Prin integrare, rezultă sarcina totală

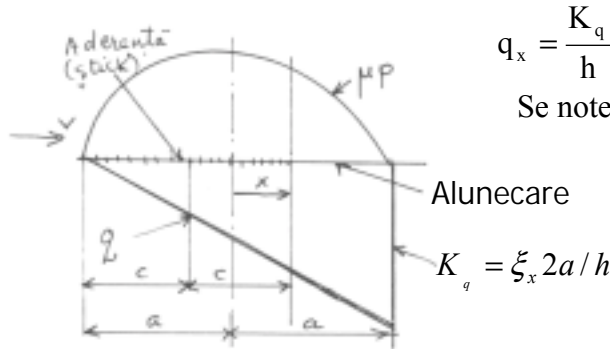
$$P = K\pi ab\delta / 2h$$

În cazul axial simetric $a = b = \sqrt{2\delta R}$ și $P = \frac{\pi}{4} \left(\frac{Ka}{h} \right) \frac{a^3}{R}$.

În cazul bidimensional al cilindrilor lungi

$\bar{u}_z = \delta - x^2 / 2R = (a^2 - x^2) / 2R$ și $P = \frac{2}{3} \left(\frac{Ka}{h} \right) \cdot \frac{a^2}{R}$.

O regiune de aderență de lățime $2c$ se extinde până la muchia conducătoare. Într-un punct unde începe alunecarea ($x = 2c - a$),



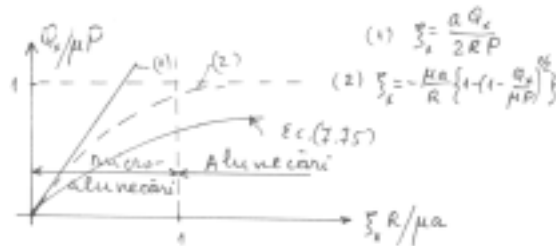
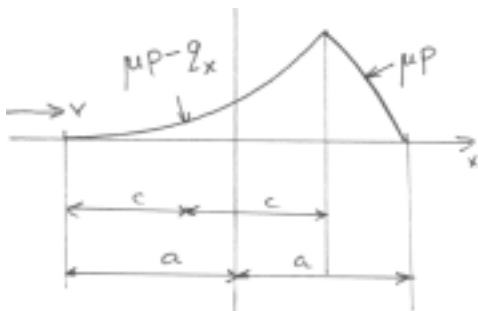
$q_x = \frac{K_q}{h} \xi_x 2c = \mu_p P = \frac{4\mu K_p}{2Rh} (a - c)$ (7.73)

Se notează $\lambda \equiv 2(1 - c/a) = K_q \xi_x R / K_p \mu a$ (7.74)

Forța de tracțiune, formată din suma tracțiunilor în cele două zone, este dată prin

$Q_x = \int_{-a}^{2c-a} \left[\mu \frac{K_p}{2Rh} (a^2 - x^2) - \frac{K_q \xi_x}{h} (a + x) \right] dx + \int_{2c-a}^a \mu \frac{K_p}{2Rh} (a^2 - x^2) dx = -\mu P \cdot \frac{3}{2} \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{12} \lambda^2 \right)$ (7.75)

cu $P = \frac{2}{3} \cdot \frac{Ka}{h} \cdot \frac{a^2}{R}$.



Coeficientul de patinare ξ_x în modelul Winkler, și anume când are o variație liniară, coincide cu soluția semispațiului elastic,

modulul tangențial al învelișului (fundăție, strat) $K_q \equiv \frac{2}{3} K_p$. Cu aceasta, se poate face aproximația

$K_q a / h \approx 1,1 E^{-x}$ (E^* - modulul de elasticitate redus al celor două materiale).

b) Contactul tridimensional

Se consideră numai patinarea longitudinală, fiecare element de patinare ("dezlipire") este paralel cu axa x și se poartă analog cazului bidimensional analizat anterior. Tracțiunea crește liniar de la zero pe muchia conducătoare până la valoarea μ_p , când încep alunecările. Dacă alunecarea este prevenită, integrând tracțiunea pe întreaga elipsă de contact (semiaxele a,b), rezultă

$$Q_x = \frac{8ab}{3} \left(\frac{K_q a}{h} \right) \xi_x \quad (7.76)$$

Comparând cu rezultatul exact (ec. 7.56, $Q_x = C_{11} Gab \xi_x$), modulul tangențial al stratului K_q este

$\frac{K_q a}{h} = \frac{3}{8} GC_{11} = \frac{3}{8} (1-\nu) E^* C_{11}$, cu valorile lui C_{11} date în tabelul alăturat relației (7.56). Analog pentru patinarea laterală (se înlocuiește C_{11} cu C_{22}). Pentru spin (pivotare) \Rightarrow

$$\frac{K_q a}{h} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} (1-\nu) E^* C_{23} .$$