

## 6. FRECAREA PRIN ȘOC (IMPACT)

### 6.1. Undă de deformații în solide [A6, A7]

Problemele de contact, în care viteza de aplicare a sarcinii este redusă, privind starea de tensiuni și deformații se rezolvă, așa cum s-au precizat succint în capitolul 4, pe baza echilibrului mecanic static. Acest echilibru are loc în tot timpul unui ciclu de încărcare.

În condiții de șoc mecanic (impact mecanic) viteza de aplicare a sarcinii este foarte mare și efectele dinamice pot fi importante: în mișcarea de alunecare și de rostogolire la viteze foarte mari, inerția materialului face ca acesta să “curgă” în zona deformată, astfel că starea de tensiuni este sensibil influențată.

Forțele de inerție sunt luate în considerație în ecuațiile de echilibru:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0.$$

în care  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  sunt tensiunile normale și tangențiale în direcțiile  $x$ ,  $z$ ,  $\rho$ -densitatea materialului deformat, iar  $u_x$  și  $u_z$  sunt deplasările.

Când aceste ecuații de echilibru sunt combinate cu ecuațiile de compatibilitate și cu relațiile tensiuni-deformații elastice, soluțiile obținute pentru tensiuni și deplasări pot fi interpretate ca impulsuri sau unde ce parcurg solidul cu viteze caracteristice.

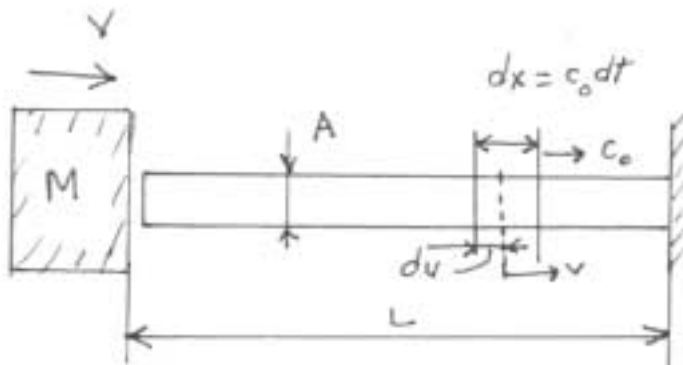


Fig. 6.1

Se introduce conceptul de undă de tensiune prin considerarea unui corp unidimensional supus la compresiune (tijă elastică).

Se acceptă un puls de tensiune de intensitate  $\sigma$  ce străbate tija în lung de la stânga la dreapta cu viteza  $c_0$ . În timpul elementar  $dt$ , frontul de undă se deplasează cu distanța  $dx$  ( $dx=c_0 dt$ ) și elementul de masă,  $dm=\rho A dx$  ( $\rho$  - densitatea,  $A$  - secțiunea tijei) se deplasează cu viteza  $v$ .

Condiția de echilibru (conservarea impulsului mecanic):

$$-\sigma A dt = (\rho A dx)v = \rho A c_0 dt v \Rightarrow \sigma = -\rho c_0 v \quad (6.1)$$

Elementul de masă  $dm$  va fi comprimat cu  $du=v dt$ , astfel că rezultă:

$$\frac{du}{dx} = \frac{v dt}{dx} = \frac{v}{c_0} \quad \text{dar} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{legea lui Hooke}) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{v}{c_0} \quad (6.2)$$

Din (6.1) și (6.2) rezultă:

$$\frac{\rho c_0 v}{E} = \frac{v}{c_0} \Rightarrow c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.3)$$

ca fiind caracteristică de material.

Deoarece deformațiile elastice sunt mici ( $u$ ) rezultă că viteza particulelor tijei sunt foarte mici în comparație cu viteza pulsului  $c_0$ .

Se consideră că particulele supuse la compresiune se deplasează în aceeași direcție și sens cu unda, iar cele supuse la tracțiune se deplasează în sens invers.

Dacă se consideră tija fixată la un capăt (fig.6.1) și la celălalt se aplică o masă rigidă  $M$  cu viteza  $V$ , au loc următoarele fenomene:

- imediat după impact; capătul din partea stângă a tijei va avea viteza  $V$  și unda de compresiune se propagă în lungul tijei cu viteza  $c_0$   $\left( c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$ ;

- tensiunea inițială de compresiune în tijă este  $\sigma = -\rho c_0 V$ ;
- blocul rigid decelerează în timpul acțiunii asupra tijei în interfața comună; succesiunea acestor evenimente depinde de masa blocului  $M$  în comparație cu masa tijei  $\rho AL$ ; se disting două cazuri extreme;

1. La aplicarea rapidă a masei  $M$  cu viteza  $V$  asupra tijei, tensiunea  $\sigma = -\rho c_0 V$  se propagă în tijă la valori destul de mici ale frontului de undă la interfața tijă-bloc; în acest timp unda de presiune este reflectată la capătul fixat al tijei. Când undele reflectate se întorc, la capătul liber accelerează blocul de masă  $M$  și sunt parțial reflectate. Astfel, blocul reacționează și induce în tijă unde cu viteza mai mică decât  $V$  și tija intră în vibrație. Tensiunile maxime din tijă, ca rezultat al impactului, sunt  $\rho c_0 V$  independente de masa  $M$ . Are loc un impact instantaneu.

2. Masa blocului  $M \gg \rho AL$  (masa tijei) – tensiunea undei este reflectată și cedată tijei de câteva ori, înainte ca blocul să se repună în mișcare. Starea de tensiune în tijă este aproximativ uniformă. Tensiunile din tijă pot fi determinate cu aproximație bună ignorând efectele dinamice, considerând tija ca un “arc ideal”. Tensiunea maximă se determină din condiția de conservare a energiei mecanice:

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho AL \left( \frac{\sigma}{\rho c_0} \right)^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\rho AL \sigma^2}{\rho^2 \frac{E}{\rho}} \Rightarrow \sigma_{\max} = V \sqrt{\frac{ME}{AL}} \quad (6.4)$$

Se observă că  $\sigma_{\max}$  depinde de masa blocului rigid  $M$ .

În acest caz, analiza dinamică a problemei se face neglijând deformarea materialului, problema “cvasistatică”, însă sarcinile dinamice exterioare conduc la echilibrul cu câmpul de tensiuni determinat static.

**Ipoteza Johnson:** - tija perfect elastică, dar tensiunile de impact sunt mari și deformația neelastică joacă un rol important în zona de contact:

$$\sigma = -\rho c_0 v \leq \sigma_c \Rightarrow v \leq \frac{\sigma_c}{\rho c_0} \quad (6.5)$$

unde  $\sigma_c$  este tensiunea de curgere a materialului.

De exemplu, pentru oțel  $c_0 \approx 520$  m/s,  $\sigma_c \approx 300$  N/mm<sup>2</sup>, astfel că rezultă ca viteză maximă de impact pentru deformații elastice  $v = 75$  m/s. La viteze mai mari, capul tijei se deformează plastic și unda elastică se propagă cu  $c_0$  și este urmată de unda plastică.

Pentru corpuri elastice tridimensionale sunt posibile două tipuri de mișcări ale undei:

- (i) dilatarea (sau presarea) undelor în care materialul își modifică volumul fără deformații de forfecare;
- (ii) distorsionarea (sau forfecare) undelor în care materialul se distorsionează, fără să-și modifice volumul.

Vitezele de propagare ale acestor unde în materiale izotropice sunt:

- dilatare:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)\rho}} \quad (6.6)$$

- distorsionare (transversale):

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.7)$$

unde  $G$  este modulul de elasticitate transversala.

Pentru  $\nu = 0,25 \Rightarrow c_1 = \sqrt{3}c_2$ . Dacă frontul de undă este plan, care poate fi considerat la distanță destul de mare de sursă, mișcarea punctelor materiale în undele de dilatare în direcția frontului de undă descrie undele longitudinale.

Când un corp solid este apăsat pe un plan sau pe o suprafață apropiată de un plan, apar problemele elasticității de contact, astfel că apar unde Rayleigh, ce se propagă în lungul suprafeței cu viteza

$$c_3 = \alpha c_2 = \alpha \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (8)$$

unde  $\alpha$  este o soluție a ecuației

$$(2 - \alpha^2)^4 = 16(1 - \alpha^2) \left( 1 - \frac{\alpha^2 c_2^2}{c_1^2} \right).$$

De exemplu, pentru  $\nu = 0,25$ ,  $\alpha = 0,919$  și pentru  $\nu = 0,5$ ,  $\alpha = 0,955$ .

Viteze ale undelor elastice (m/s)

|                                       |       | Oțel | Cu   | Al   | Sticlă | Cauciuc |
|---------------------------------------|-------|------|------|------|--------|---------|
| Unidimensional (tensiune-compresiune) | $c_0$ | 5200 | 3700 | 5100 | 5300   | 46      |
| Dilatare                              | $c_1$ | 5900 | 4600 | 6300 | 5800   | 1100    |
| Distorsionare                         | $c_2$ | 3200 | 2300 | 3100 | 3400   | 27      |
| Rayleigh                              | $c_3$ | 3000 | 2100 | 2900 | 3100   | 26      |

## 6.2. Impactul elastic

Ipoteze:

- se consideră corpurile elastice și deformațiile se apreciază numai în vecinătatea ariei de contact, determinată cu teoria statică;

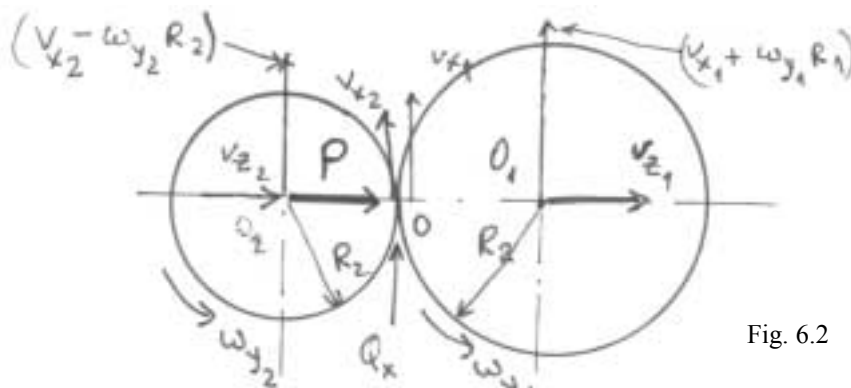


Fig. 6.2

- mișcarea undei elastice în corpuri se neglijează;  
- masa totală a fiecărui corp se consideră în mișcare cu viteza instantanee a centrului de masă.

### a) Impactul coliniar al sferelor

Două sfere elastice, de mase  $m_1$  și  $m_2$ , sunt în mișcare

cu vitezele  $v_{z1}$  și  $v_{z2}$  în lungul liniei centrelor. Fie O punctul de impact. Se consideră impactul coliniar în care  $v_{x1}=v_{x2}=\omega_{y1}=\omega_{y2}$ .

În timpul impactului, ca urmare a deformației elastice, centrele sferelor se apropie cu  $\delta_z$ .

Viteza relativă este  $v_{z2} - v_{z1} = \frac{d\delta_z}{dt}$  și forța instantanee dintre sfere  $P(t)$ ,

$$P = m_1 \frac{dv_{z1}}{dt} = -m_2 \frac{dv_{z2}}{dt} \quad (6.9)$$

$$\text{Deci } \frac{dv_{z1}}{dt} = \frac{P}{m_1}; \quad \frac{dv_{z2}}{dt} = -\frac{P}{m_2} \text{ și } \frac{d(v_{z2} - v_{z1})}{dt} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} P = \frac{d^2 \delta_z}{dt^2} \quad (6.9')$$

Pentru relația dintre deformația  $\delta_z$  și forța exterioară  $P$  se aplică relațiile statice (hertziene)

$$P = \frac{4}{3} R^{1/2} E^* \delta_z^{3/2} = k \delta_z^{3/2} \quad (6.10)$$

$$\text{cu } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ și } \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_0^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Scriind  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ , rezultă

$$m \frac{d^2 \delta_z}{dt^2} = -k \delta_z^{3/2} \quad (6.11)$$

Integrând în raport cu  $\delta_z$

$$m \frac{1}{2} \left( \frac{d\delta_z}{dt} \right)^2 \Big|_0^t = -k \frac{2}{5} \delta_z^{5/2} \text{ sau } \frac{1}{2} \left\{ V_z^2 - \left( \frac{d\delta_z}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{2}{5} \frac{k}{m} \delta_z^{5/2}$$

unde  $V_z = (v_{z2} - v_{z1})_{t=0}$  este viteza din momentul impactului.

Compresiunea maximă  $\delta_z^*$  se obține când  $\frac{d\delta_z}{dt} = 0$  și este

$$\delta_z^* = \left( \frac{5mV_z^{2/5}}{4k} \right)^{2/5} = \left( \frac{15mV_z^2}{16R^{1/2}E^*} \right)^{2/5} \quad (6.12)$$

Timpu cât durează compresiunea ( $t$ ) se obține prin integrarea ecuației (6.11), (ecuația diferențială de forma  $\ddot{y} = f(y)$  cu soluția

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + c}} + c_2, \text{ cu următoarele condiții la}$$

limită:  $\frac{d\delta_z}{dt} \Big|_{t=0} = V_z$  și  $\delta_z = \delta_z^*$  pentru  $\frac{d\delta_z}{dt} = 0$ , rezultă:

$$t = \frac{\delta_z^*}{V_z} \int \frac{d\left(\frac{\delta_z}{\delta_z^*}\right)}{\left\{ 1 - \left(\frac{\delta_z}{\delta_z^*}\right)^{5/2} \right\}^{1/2}} \quad (6.13)$$

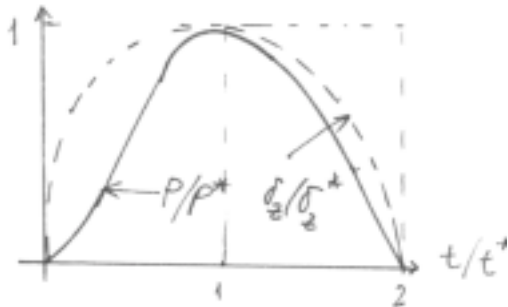


Fig.6.3

integrală rezolvabilă numeric (Deresiewicz, 1968)

După atingerea deformației de compresiune  $\delta_z^*$  (timpul  $t^*$ ), sferile se extind din nou.

Deoarece contactul este perfect elastic și fără alunecare, energia absolută în mișcarea unei se neglijează și deformația este perfect reversibilă. Timpul total de impact  $T_c$  este:

$$T_c = 2t^* = 2 \frac{\delta_z^*}{V_z} \int_0^1 \frac{d\left(\frac{\delta_z}{\delta_z^*}\right)}{\left\{1 - \left(\frac{\delta_z}{\delta_z^*}\right)^{5/2}\right\}^{1/2}} = 2,94 \frac{\delta_z^*}{V_z} = 2,87 \left(\frac{m^2}{RE^* V_z}\right)^{1/5} \quad (6.14)$$

Dacă se consideră că deformația este cvasistatică (durata impactului este suficientă ca unda de tensiune să traverseze lungimea de mai multe ori), pentru sferă rezultă:

- timpul de parcurgere a sferelor:  $T = \frac{4R}{c_0}$ ;
- timpul total de impact (relația (6.14)):

$$T_c = 3,87 \left(\frac{m^2}{RE^* V_z}\right)^{1/5} = 2,87 \left(\frac{\left(\frac{4}{3} \pi \rho R^3\right)^2}{R(c_0^2 \rho)^2 V_z}\right)^{1/5} = 5,6 \left(\frac{R^5}{c_0^4 V_z}\right)^{1/5} \quad (6.15)$$

și  $\frac{T}{T_c} \approx \left(\frac{V_z}{c_0}\right)^{1/5} \ll 1$  deci fenomenul poate fi considerat cvasistatic (criteriul Lore, 1952).

### b) Impactul oblic al sferelor

Dacă sferile au o mișcare coplanară, se introduc vitezele punctului de impact  $v_x$  și viteza unghiulară  $\omega_y$  (fig. 6.2). Se consideră că suprafața de contact nu este perturbată de mișcarea impactului.

Se notează cu  $Q_x$  forța de frecare:

$$Q_x = m_1 \frac{d}{dt} (v_{x1} + \omega_{y1} R_1) = -m_2 \frac{d}{dt} (v_{x2} - \omega_{y2} R_2) \quad (6.16)$$

Conservarea momentului cinetic al fiecărei sfere în lungul axei  $Oy$ :

$$\frac{d}{dt} \{m_1 v_{x1} R_1 + m_1 (R_1^2 + k_1^2) \omega_{y1}\} = \frac{d}{dt} \{-m_2 v_{x2} R_2 + m_2 (R_2^2 + k_2^2) \omega_{y2}\} = 0 \quad (6.17)$$

unde  $k_1$  și  $k_2$  sunt razele de girație ale sferelor față de centrele lor de masă.. Eliminând  $\omega_{y1}$  și  $\omega_{y2}$  în (6.16) și (6.17) rezultă:

$$Q_x = \frac{m_1}{1 + \frac{R_1^2}{k_1^2}} \frac{dv_{x1}}{dt} = \frac{m_2}{1 + \frac{R_2^2}{k_2^2}} \frac{dv_{x2}}{dt}$$

sau notând  $\frac{m_i}{1 + \frac{R_i^2}{k_i^2}} = m_i^*$  și  $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1^*} + \frac{1}{m_2^*}$  rezultă:

$$\frac{1}{m^*} Q_x = \frac{d}{dt}(v_{x1} - v_{x2}) = \frac{d^2 \delta_x}{dt^2} \quad (6.18)$$

unde  $\delta_x$  este deplasarea tangențială elastică între cele două sfere în punctul de contact.

$$\text{Ecuția (6.18) este similară cu (6.9')} \left( -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} P = \frac{d^2 \delta_z}{dt^2} \right).$$

Dacă  $Q_x \geq \mu P$  ( $\mu$  coeficient de frecare) apare alunecare completă între sfere. Pentru  $Q_x < |\mu P|$  nu apar macroalunecări, însă în zona de contact apar microalunecări (micro-slip).

Variația tracțiunii tangențiale și micro-slip-ul sunt determinate de constantele elastice ale corpurilor.

Din ecuația Hertz:

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left( \frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} \Rightarrow \frac{d\delta_z}{dP} = \frac{2}{3} \left\{ \frac{9}{v} \left( \frac{1-v^2}{E} \right)^2 \frac{1}{R} \frac{1}{P} \right\}^{1/3} = \frac{1-v}{2Ga}.$$

$$\text{Din } \delta_x = \bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2} = \frac{Q_x}{8a} \left( \frac{2-v_1}{G_1} + \frac{2-v_2}{G_2} \right) - \text{contactul sferelor fără alunecare.}$$

Rezultă

$$\frac{d\delta_x}{dQ_x} = \frac{\frac{2-v_1}{G_1} + \frac{2-v_2}{G_2}}{8a} \quad (6.19)$$

$$\bullet \text{ Se definește coeficientul de rigiditate } k = \frac{\frac{2-v_1}{G_1} + \frac{2-v_2}{G_2}}{\frac{1-v_1}{G_1} + \frac{1-v_2}{G_2}}.$$

Pentru materiale similare și  $v=0,3 \Rightarrow k=0,824$ .

$$\bullet\bullet \text{ Condițiile de impact sunt specificate prin parametrul } \psi = \frac{kV_x}{\mu V_z}, \text{ unde } V_x = (v_{x1} - v_{x2})|_{t=0}$$

este viteza tangențială relativă înainte de impact.

Se notează cu  $\arctg \frac{V_x}{V_z}$  unghiul de incidență din O.

$\bullet\bullet\bullet$  Influențele impactului sunt evaluate prin un al doilea parametru  $\chi = \frac{km}{2m^*}$ ; pentru materiale similare, omogene cu  $v = 0,3 \Rightarrow \chi = 1,44$ .

Soluția ecuației (6.18)  $\left( Q_x = m^* \frac{d^2 \delta_x}{dt^2} \right)$  se determină ținând seama că P variază în timpul impactului ( $P = k\delta_z^{3/2}$ ).

$$P^* = k\delta_z^{*3/2} \text{ cu } \delta_z^* \text{ compresiunea maximă corespunzătoare } \frac{d\delta_x}{dt} = 0 \left[ \delta_z^* = \left( \frac{15mv_z^2}{16R^{1/2}E^*} \right)^{2/5} \right].$$

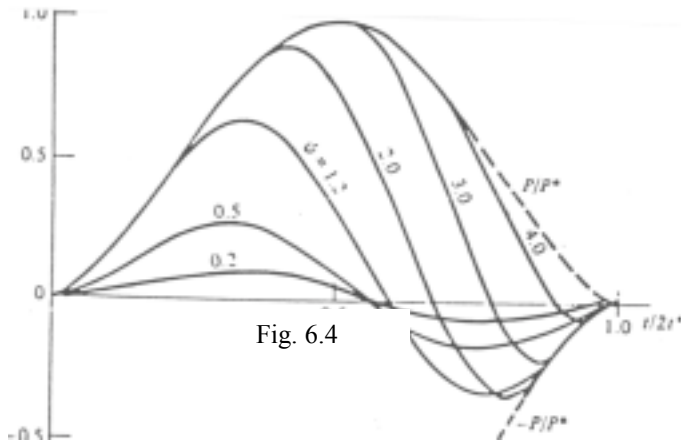


Fig. 6.4

Variația forței  $Q_x$  în timpul impactului se determină prin calcularea pas cu pas a soluției ecuației (6.18) pentru diferite condiții de incidență (fig. 6.4)

Pentru unghiuri de incidență mici în comparație cu unghiul de frecare ( $\psi \leq 1$ ) nu apare alunecare la inițierea impactului.

La unghiuri de incidență mari ( $1 < \psi < 4\chi - 1$ ) impactul începe și se termină cu alunecare completă, însă în timpul intermediar are loc alunecarea.

La incidențe suficient de mari ( $\psi \geq 4\chi - 1$ ), alunecarea are loc pe toată perioada

impactului.

“Rezonanța de contact” se definește prin intermediul rigidității și masei specifice:

- “Frecvența normală” de rezonanță  $\left( \omega = \sqrt{s \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \text{ cu } s = \frac{dP}{d\delta} - \text{rigiditatea} \right), \omega_n = \sqrt{\frac{s_n}{m}}$ ,

$$s_n = \frac{dP}{d\delta_z}.$$

- “Frecvența tangențială” de rezonanță,  $\omega_t = \frac{s_t}{m^*}$ .

Raportul frecvențelor de contact este

$$\frac{\omega_t}{\omega_n} = \left( \frac{km}{m^*} \right)^{1/2} = (2\chi)^{1/2} \quad (6.20)$$

Pentru sfere solide  $\frac{\omega_t}{\omega_n} = 1,7$  și care arată că forța tangențială parcurge aproape un ciclu complet în timp ce forța normală parcurge un semiciclu.

Forța tangențială negativă către finele unei perioade de impact face ca să apară un “ricoșeu” tangențial negativ. Definind parametrul de “ricoșeu” (restituire)  $\psi' = \frac{kV_x'}{\mu V_z}$ , se prezintă în fig. 6.5

condițiile de restituire în funcție de parametrul inițial  $\psi = \frac{kV_x}{\mu V_z}$ .

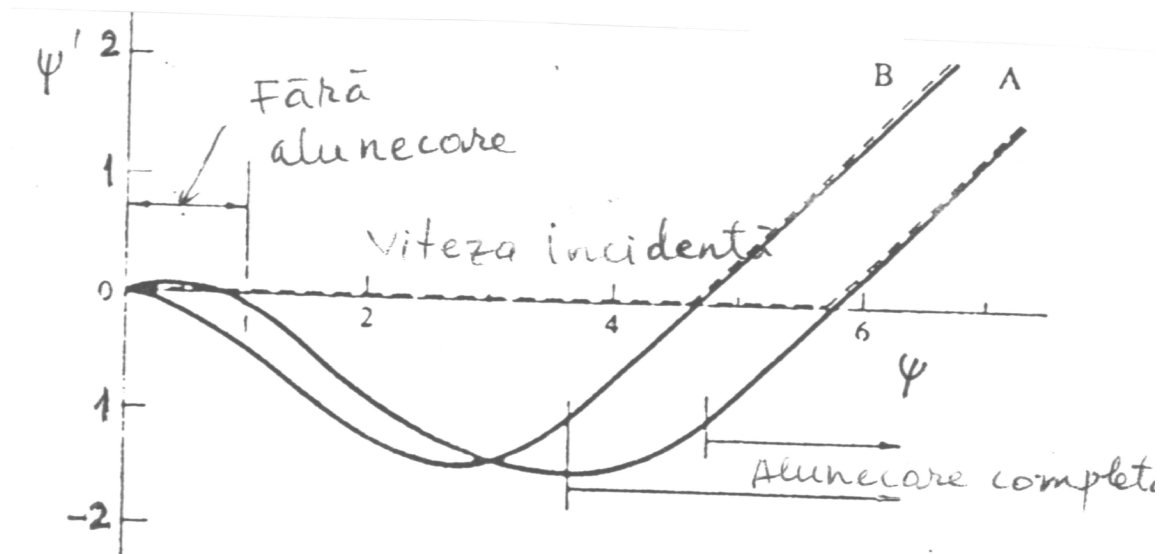


Fig. 6.5

Viteza tangențială de ricoșeu  $V'_x$  este de obicei negativă cu excepția cazului c'nd  $\psi > 4\chi$ .

Teoria clasică a impactului corpurilor rigide, care ignoră deformația de contact, precizează că viteza tangențială de ricoșeu  $V'_x$  este ori pozitivă dacă alunecarea este pozitivă, ori 0 dacă alunecarea încetează în timpul contactului.

### 6.3. Impactul neelastic

#### a) Starea de curgere

Pentru materialele elastoplastice este necesară cunoașterea presiunii maxime de contact ( $p_0$ ) la care începe curgerea. Conform criteriului Mises:

$$p_0 = 2,8k = 1,6\sigma_c,$$

$k$  – tensiunea de forfecare la curgere;  $\sigma_c$  – tensiunea uniaxială la compresiune de curgere pentru materialul mai moale din contact.

Presiunea maximă  $p_0^*$  din timpul impactului elastic se deduce din

$$P = \frac{4}{3} R^{1/2} E^* \delta_z^{3/2} \text{ și } \delta_z^* = \left( \frac{15mV_z^*}{16R^{1/2}E^*} \right)^{2/5}$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left( \frac{6PE^*}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}$$

$$p_0^* = \frac{3}{2\pi} \left( \frac{4E^*}{3R^{3/4}} \right)^{4/5} \left( \frac{5}{4} mV_z^2 \right)^{1/5} \quad (6.21)$$



unde  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ ,  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  și  $V_z$  este viteza relativă la impactul normal.

Introducând  $p_o^*$  în criteriul Mises, rezultă

$$\frac{1}{2} m V_z^{*2} \approx \frac{53 R^3 \sigma_c^5}{E^{*4}} \quad (6.22)$$

$V_z^*$  fiind viteza critică pentru curgerea materialului.

În cazul impactului unei sfere pline (densitatea materialului  $\rho$ ) cu o suprafață plană de dimensiuni mari, (22) devine:

$$\frac{\rho V_z^{*2}}{\sigma_c} = 26 \left( \frac{\sigma_c}{E^*} \right)^4; \quad V_z^* = \sqrt{26} \left( \frac{\sigma_c}{E^*} \right)^2 \sqrt{\frac{\sigma_c}{\rho}} \quad (6.23)$$

Viteza de impact  $V_z^*$  care produce curgerea materialului este foarte mică, de exemplu pentru o sferă din oțel care ciocnește un plan tot din același material (oțel dur) ( $\sigma_c=1000 \text{ N/mm}^2$ ), rezultă  $V_z^* \approx 0,14 \text{ m/s}$ . Este clar, deci, că impactul între corpurile metalice este însoțit de deformații plastice.

### b) Impactul plastic la viteze moderate (<500 m/s)

Se consideră impactul normal. Energia cinetică este absorbită prin deformația locală (elastică sau plastică) a corpurilor

$$\frac{1}{2} m V^2 = W = \int_0^{\delta^*} P d\delta, \quad (6.24)$$

cu  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$  și  $V$  viteza relativă de impact.

După ciocnire (ricșeu), energia cinetică este egală cu lucrul mecanic al recuperării elastice

$$\frac{1}{2} m V^2 = W' = \int_0^{\delta^*} P' d\delta'. \quad (6.25)$$

Se vor determina: tensiunile maxime de contact, durata impactului și coeficientul de restituire  $\left( \frac{V'}{V} \right)$  în funcție de viteza de impact  $V$  și proprietățile celor două materiale.

Din (6.24) și (6.25) se observă că impactul este determinat de relația de complianță (rigiditate),  $P(\delta)$  la încărcare și la descărcare. Pentru condiții statice, se cunosc aceste relații (criteriile de plasticitate – pentru contacte sferice, cilindrice, elipsoidale).

Pentru contactul sferelor:

- după descărcare

$$\frac{P}{P_c} = 8 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\delta' E^{*2}}{2 \sigma_c^2} \right)^2 = 0,38 \left( \frac{\delta'}{\delta_c} \right)^2 \quad (6.26)$$

$$\delta' = \frac{9\pi P p_m}{16 E^{*2}},$$

$p_m = \frac{P}{\pi a^2}$  - presiunea medie; pentru deformații plastice depline  $p_m = 3\sigma_c$ .

- În timpul încărcării

$$\frac{P}{P_c} = 0,81 \left( \frac{\delta E^{*2}}{R \sigma_c^2} \right)^2 = 5,5 \left( \frac{\delta}{\delta_c} \right) \quad (6.27)$$

În domeniul elastic ( $P \leq P_c$ ), încărcarea și descărcarea sunt identice, expresia  $P = k\sigma^{3-2}$ .

Inițierea curgerii se face într-un punct sub suprafață pentru presiuni medii ce variază între  $1,1\sigma_c$  și  $3\sigma_c$  când sunt îndeplinite condițiile deformațiilor plastice depline.

Se consideră cazul impactului plastic. Se reamintesc ipotezele analizei contactului static:

a) compresiunea totală (elastică și plastică) are mărimea  $\delta = \frac{a^2}{2R}$  și nu apare nici o “prindere”

pe muchia de contact;

b) presiunea medie de contact  $p_m$  este constantă ( $p_m = 3\sigma_c$ ).

Aceste ipoteze conduc la următoarea expresia a complianței (rigidității) (relația 6.27)

$$\frac{P}{P_c} = 0,81 \left( \frac{\delta E^{*2}}{R \sigma_c^2} \right)^2 = 5,5 \left( \frac{\delta}{\delta_c} \right) \quad \left( a = \left( \frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3}; p_o = \frac{3P}{2\pi a^2} = \frac{3}{2} p_m \right)$$

Ținând seama de (6.24) rezultă

$$\frac{1}{2} mV^2 = \int_0^{a^*} \pi a^2 p_d \frac{a}{R} da = \frac{\pi a^{*4} p_d}{4R} = p_d v_a \quad (6.28)$$

unde  $p_d$  este presiunea medie în timpul încărcării dinamice.

Se notează cantitatea  $\frac{\pi a^{*4}}{4R}$  ca fiind volumul aparent al materialului ( $v_a$ ) dispus sub penetratorul

de rază  $R$ . Pentru un material neelastice cu legea tensiune-deformații  $\epsilon = \epsilon_o \left( \frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n$ ,

$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{\pi a^{*4} p_d}{4R} \frac{4n}{4n+1} \quad (6.28')$$

unde  $p_d$  este presiunea dinamică maximă la compresiunea instantanee maximă.

Pentru determinarea energiei cinetice a corpului după ciocnire se consideră relația (6.26)

$\left( \frac{P}{P^*} = 0,38 \left( \frac{\delta'}{\delta_c} \right)^2 \right)$ , unde  $P^* = \pi a^{*2} p_d$  este forța de compresiune între corpuri la inițierea “ricșoului”.

Dar,  $a = \left( \frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3}$  (Hertz) astfel că eliminând  $R$  și înlocuind în (6.25) rezultă:

$$\frac{1}{2} mV^2 = W' = \frac{3P^{*2}}{10a^* E^*} = \frac{3}{10} \pi^2 a^{*3} \frac{p_d^2}{E^*} \quad (6.29)$$

Considerând  $\delta = \frac{a^2}{2R}$  se poate determina energia disipată în timpul deformației plastice

$\Delta W = W - W' = p_d v_r$ ,  $v_r$  fiind volumul rezidual după impact.

Cu ipoteza modificării (6.28), rezultă

$$\frac{1}{2} m \left( V^2 - \frac{3}{8} V'^2 \right) = p_d v_a = \pi a^* \frac{p_d}{4R} \quad (6.30)$$

$V'$  dedusă din (29).

Eliminând  $a^*$  între (6.28) și (6.29) și definind coeficientul de restituire  $e = \frac{V'}{V}$ , rezultă

$$e^2 = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{3\pi^{5/4} 4^{3/4}}{10} \left( \frac{p_d}{E^*} \right) \left( \frac{\frac{1}{2} m V^2}{p_d R^3} \right)^{-1/4}, \quad (6.31)$$

sau considerând  $p_d \approx 3\sigma_c$  ( $\sigma_c$  – tensiunea dinamică de curgere) rezultă

$$e \approx 3,8 \left( \frac{\sigma_c}{E^*} \right)^{1/2} \left( \frac{\frac{1}{2} m V^2}{\sigma_c R^3} \right)^{-1/8} \quad (6.32)$$

Se observă că acest coeficient de restituire ( $e$ ) nu este o proprietate de material ci depinde de severitatea impactului. Pentru viteze de impact suficient de mici  $\left( V < V_z^* = \sqrt{26} \left( \frac{\sigma_c}{E^*} \right)^2 \sqrt{\frac{\sigma_c}{\rho}} \right)$  (ecuația 6.23), deformația este elastică și coeficientul de restituire,  $e$ , este apropiate de unitate.

Coeficientul de restituire scade cu creșterea vitezei. Când deformația este pe deplin plastică,  $e \sim V^{-1/4}$ .

Coeficientul de restituire este puternic influențat de duritatea materialului evaluată prin  $\sigma_c$ ,  $e \sim \sigma_c^{5/8}$ .

Prin utilizarea experimentelor pe baza de impact a fost determinată presiunea dinamică de curgere ( $p_d$ ).

Față de presiunea medie hertziană de curgere ( $p_m$ ), presiunea dinamică  $p_d$  este mai mare. În

| Metal       | $p_d/p_m$ | $p_r/p_m$ |
|-------------|-----------|-----------|
| Oțel        | 1,28      | 1,09      |
| Sticlă      | 1,32      | 1,10      |
| Aliaj de Al | 1,36      |           |
| Plumb       | 1,58      | 1,11      |

timpul de deformării plastice presiunea de contact scade până la o anumită presiune statică de “ricșeu” ( $p_r$ ).

Timpul total de impact se poate determina pe baza a două componente: timpul de deformație (pătrundere) plastică,  $t_p$ , și timpul de “ricșeu” elastic,  $t'$  ( $t = t_p + t'$ ).

Cu aceleași ipoteze, presiunea dinamică de curgere  $p_d$  este constantă și compresiunea  $\delta = \frac{a^2}{2R}$ , timpul de impact poate fi calculat. Ecuația mișcării relative ale celor două corpuri

$$m \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -\pi a^2 p_d = -2\pi R p_d \delta, \quad (6.33)$$

$$\text{cu } \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \text{ și } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Soluția ecuației (6.33) este

$$t_p = \left( \frac{\pi m}{8 R p_d} \right)^{1/2} \quad (6.34)$$

Care este independentă de viteza de impact.

De exemplu pentru o bilă de oțel cu diametrul de 10 mm care atinge un material mai moale  $t_p \approx 10^{-4} - 10^{-5}$  s.

Considerând “ricoșeul” ca fiind elastic și determinat de ecuația lui Hertz, din (6.32) și

$$\left[ T_c = 2,87 \left( \frac{m^2}{R E^* V_z} \right)^{1/5} \right] \text{ din (6.15) se deduce}$$

$$t' = 1,2 e t_p \quad (6.35)$$

Pentru impactul apropiat de cel plastic, coeficientul de restituire,  $e$ , este foarte mic, astfel  $t'$  are pondere mică în timpul total de impact ( $t_p + t'$ ).

În timpul impactului plastic oblic se produc cratera pe suprafață. Calculul se poate face pas cu pas, determinându-se volumul craterului și pierderea de energie cinetică. cu ipoteza că penetrația

maximă  $\delta^* \approx \frac{a^{*2}}{2R}$ ,  $\frac{a^*}{R} \ll 5$ , din  $\frac{1}{2} m V^2 = \frac{\pi a^{*4} p_d}{4R} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{m V^2}{p_d R^3} < 0,05$ . Pentru o sferă din oțel, această cerință este valabilă când  $V < 100$  m/s.

Johnson propune parametrul adimensional  $\frac{\rho V^2}{\sigma_c}$  ca mărime a regimului de impact a metalelor.

Pentru impactul unei sfere de densitate  $\rho_1$  cu un bloc masiv de densitate  $\rho$  și tensiunea dinamică de curgere  $\sigma_c$  și considerând  $p_d = 3\sigma_c$  se poate scrie

$$\frac{1}{2} \frac{m V^2}{\rho_d R^3} = 0,72 \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right) \left( \frac{\rho V^2}{\sigma_c} \right) = \frac{\rho V^2}{\sigma_c} \quad (6.36)$$

Pentru majoritatea metalelor,  $\frac{E^*}{\sigma_c} \geq 100$ , astfel că viteza critică până la care deformațiile sunt

elastice  $\left( \rho \frac{V_z^*}{\sigma_c} = 26 \left( \frac{\sigma}{E^*} \right)^4 - \text{rel. (23)} \right)$  și raportul  $\frac{\rho V^2}{\sigma_c} \leq 10^{-6}$ .

| Regimul de impact | $\frac{\rho V^2}{\sigma_c}$ | Viteza aproximativă V (m/s) |
|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Elastic           | $< 10^{-6}$                 | $< 0,1$                     |

|   |                |              |
|---|----------------|--------------|
| Penetrare plastică deplină                  | $\sim 10^{-3}$ | $\sim 5$     |
| Teoria cvasistatică                         | $\sim 10^{-1}$ | $\sim 100$   |
| Curgere plastică cu influențe hidrodinamice | $\sim 10$      | $\sim 1000$  |
| Impact cu viteze foarte mari (hiperimpact)  | $\sim 10^3$    | $\sim 10000$ |

Pentru hiperimpact s-a dedus relația:

$$\frac{\rho V^2}{\sigma_c} = \left( \frac{E}{\sigma_c} \right) \left( \frac{\rho V^2}{E} \right) = \frac{E}{\sigma_c} \left( \frac{V}{c_0} \right)^2, \quad (6.37)$$

unde  $c_0$  viteza undei elastice

#### 6.4. Interacțiunea de frecare la impact

Se consideră o particulă (1) situată la distanța  $h_0$  de sistemul de axe  $yOx$  și care are vitezele liniare inițiale  $V_{t10}$ ,  $V_{n10}$  și viteza unghiulară  $\omega_{10}$ .

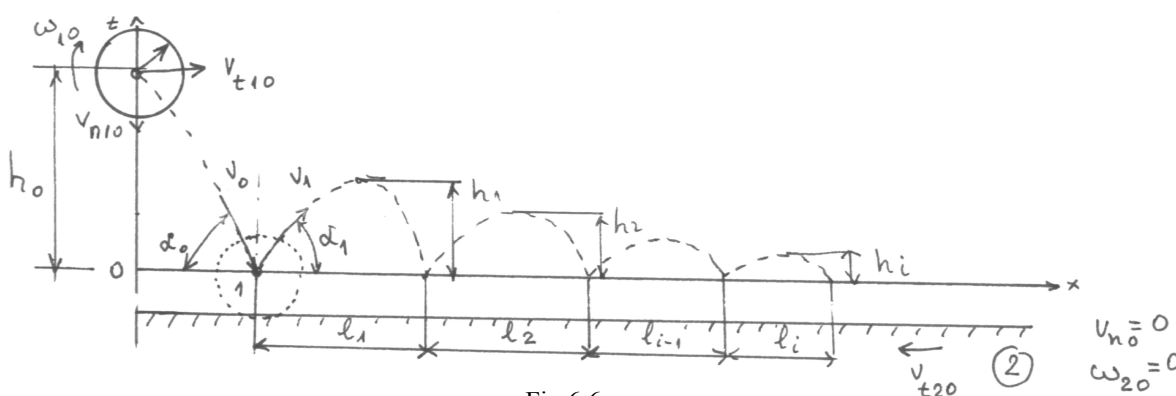


Fig.6.6

Suprafața plană solidă (2) are vitezele inițiale  $V_{2t0}$ ,  $V_{2n0}=0$  și  $\omega_{20}=0$ . Masa suprafeței plane (2) este mult mai mare decât a particulei, astfel că se poate aprecia că viteza sa rămâne constantă  $V_{2t1}=V_{2t2}=...=V_{2to}$ ,  $V_{2n1}=V_{2n2}=...=V_{2no}=0$  și  $\omega_{21}=\omega_{22}=...=\omega_{2o}=0$ .

După ciocnire particula (1) se desprinde de planul (2), astfel că direcția este dată de rezultanta vitezei tangențiale  $V_t$ , care se determină din egalitatea

$$V_t = \omega_{10}R - V_{t10} - V_{t20} \quad (6.38)$$

Impulsul tangențial apare ca urmare a acțiunii forței de frecare.

În cazul în care prin impact se obține  $V_t=0$  la  $\omega_{10} \neq 0$ , deci  $\omega_{10}R=V_{t10}+V_{t20}$ , se realizează frecarea prin rostogolire la viteza cerută.

După prima ciocnire la viteza  $V_{t0}$ , particula cu viteza obținută se deplasează după o traiectorie parabolică și cade din nou pe suprafața plană cu viteza unghiulară  $\omega_{11}$  și viteza tangențială  $V_{t11}$  relativă la suprafața (2) mai mică decât  $V_{t10}$ , procesul repetându-se până când viteza tangențială devine nulă.

Considerând  $t$  timpul de ciocnire (impact), se poate scrie următoarele ecuații:

$$m\Delta V_{tl} = \int_0^t F_f dt; \quad m\Delta V_{nl} = \int_0^t P dt; \quad J\Delta\omega = R_l \int_0^t F_f dt \quad (6.39)$$

în care:  $\Delta V_{tl}$ ,  $\Delta V_{nl}$  și  $\Delta\omega$  sunt variațiile vitezelor tangențiale, normale și unghiulare;  $F_f$  - forța de frecare;  $P$  - forța normală;  $J$  - momentul de inerție față de axa de rotație;  $R_l$  - brațul forței de frecare.

$$\text{Ecuția } J\Delta\omega = R_l \int_0^t F_f dt \text{ se mai scrie } \frac{mr^2}{R_l} \Delta\omega = \int_0^t F_f dt, \text{ astfel că } m\Delta V_{tl} = \frac{mr^2}{R_l} \Delta\omega, \text{ } r \text{ fiind raza}$$

de inerție a particulei. Definind coeficientul de frecare mediu la impact (șoc),

$$\bar{\mu}_i = \frac{\int_0^t F_f dt}{\int_0^t P dt}, \quad (6.40)$$

$$\text{se deduce } \bar{\mu}_i = \frac{r^2 \Delta\omega}{R_l \Delta V_{nl}} = \frac{\Delta V_{tl}}{\Delta V_{nl}} \quad (6.41)$$

Pentru impactul normal  $V_{t10}=0$ ,  $V_{n10}=0$  și  $\omega_{10}=0$ , relația (40) la al "i" lea impact are expresia

$$\bar{\mu}_i = \frac{I}{4} \left| \frac{l_i \sqrt{h_{i-1}} - l_{i-1} \sqrt{h_i}}{h_i \sqrt{h_{i-1}} + h_{i-1} \sqrt{h_i}} \right| \quad (6.42)$$

unde  $l_i$  este lungimea parcursă după  $i$  impacturi;  $h_i$  - înălțimea maximă după impactul "i".

Pentru primul impact

$$\bar{\mu}_i = \frac{I}{4} \left| \frac{l_1}{h_1 + \sqrt{h_1 h_0}} \right| \quad (6.42')$$

### 6.5. Forțe (sarcini) mobile

Când vitezele de alunecare sau de rostogolire sunt apropiate de vitezele elastice, inerția materialului modifică tenisiunile de contact. Prin analogie cu mișcarea unui corp într-un fluid se pot defini trei regimuri: "subsonic", "transonic" și "supersonic" în funcție de raportul vitezei de alunecare sau rostogolire și a vitezei de propagare a undelor elastice. Pentru suprafețele solidelor elastice influența este complicată deoarece sunt trei viteze ale undelor elastice - de dilatare sau compresiune  $c_1$ , de forfecare și de suprafață  $c_3$  (Rayleigh).

#### a) Sarcină liniară pe semispațiu elastic

Se consideră o forță liniară concentrată  $P$  care se mișcă cu viteza  $V$  pe un semispațiu elastic. Problema a fost rezolvată de Cole și Hunt (1958).

$$\text{Se definesc numerele Mach: } M_1 = \frac{V}{c_1} \text{ și } M_2 = \frac{V}{c_2} \left( c_1 = \sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)G}}; \quad c_2 = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{\rho}} \right).$$

Condițiile "subsonice" sunt îndeplinite dacă  $M_1 < 1$  și  $M_2 < 1$ .

$$\text{Se definesc mărimile } \beta_1 = (1 - M_1^2)^{1/2}; \quad \beta_2 = (1 - M_2^2)^{1/2} \text{ și } N = (2 - M_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2. \quad (6.43)$$

S-a dedus analitic deplasarea de suprafață  $\bar{u}_z$  într-un punct situat la distanța  $x$  de sarcină

$$\bar{u}_z = \frac{2(I+\nu)P}{\pi E} \frac{\beta_1 M_2^2}{N} \ln|x| + c, \quad (6.44)$$

unde “c” este o constantă determinată prin alegerea datelor deplasării. La viteze mici:  $V \rightarrow 0$ ,  $\beta_1 \rightarrow 1$  și  $N \rightarrow 2(M_1^2 - M_2^2) = -M_2^2(I - \nu)$  și expresia (6.44) devine

$$\bar{u}_z = -\frac{2(I+\nu)P}{\pi E} \ln|x| + c, \quad (6.45)$$

Identică cu rezultatul obținut pentru contactul static.

Pentru regimul “supersonic”,  $M_1 > 1$  și  $M_2 > 1$ , se definesc mărimile

$$\beta'_1 = (M_1^2 - I)^{1/2}, \quad \beta'_2 = (M_2^2 - I)^{1/2}, \quad N = (2 - M_2^2) + 4\beta'_1\beta'_2.$$

Deplasarea de suprafață, în acest caz, este

$$\bar{u}_z = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2(I+\nu)P}{E} \frac{\beta'_1 M_2^2}{N'}, & x > 0 \end{cases}, \quad (6.45)$$

În fața sarcinii, suprafața nu este perturbată; în spatele sarcinii suprafața este uniform decomprimată la o valoare ce depinde de viteză. Tensiunile în semispațiul elastic sunt nule în toate punctele cu excepția liniilor celor “două unde de șoc” ce se propagă din punctul de aplicație a sarcinii. Pe frontul de undă tensiunea este infinită. Undele de șoc traversează corpul la vitezele  $c_1$  și  $c_2$  și fac unghiurile  $\arctg\beta'_1$  și  $\arctg\beta'_2$  cu suprafața. Acest proces nu este conservativ; sarcina mobilă generează lucru mecanic ce se disipă sub forma undei de șoc.

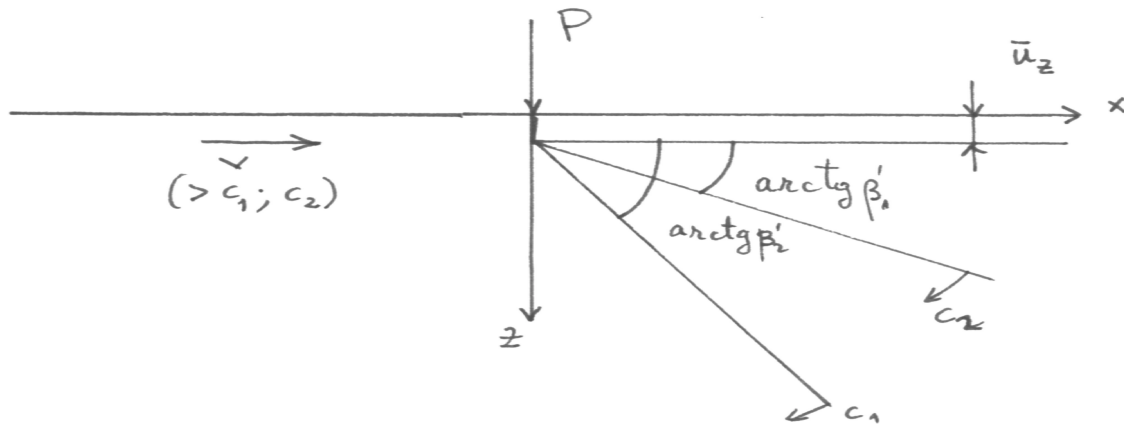


Fig.6.7

Regimul “transonic” este complicat. În zona vitezelor mici  $c_3 < V < c_1$ , parametrul  $N$  (rel.6.43) schimbă semnul, astfel că în patele forței crește deplasarea de suprafață. Pentru  $c_2 < V < c_1$ ,  $N$  este complex și tensiunile și deformația sunt combinații ale undei de șoc ce traversează cu viteza  $c_2$  și la  $c_1$  pentru modelul “subsonic”.