

## 5. FRECARA USCATĂ ȘI LIMITĂ DE ALUNECARE

### 5.1. Definiție [A1, A6, A7, A8, A15]

Frecarea exterioară este definită ca rezistența opusă mișcării relative a unui corp solid față de altul. Forța de rezistență are sensul opus mișcării.

Frecarea exterioară este efectul unui proces de disipare a energiei ce apare în transferul forței de la un solid la altul, în prezența mișcării relative, prin intermediul ariei reale de contact. În funcție de modul de transfer, frecarea poate fi de alunecare, pivotare și rostogolire.

Evaluarea cantitativă a frecării se face prin forța de frecare ( $F_f$ ) și momentul de frecare ( $M_f$ ) pentru frecarea de alunecare și respectiv pivotare și rostogolire.

În practica inginerescă, pentru evaluarea frecării, se folosesc patru mărimi adimensionale:

1. Coeficientul de frecare la alunecare:  $\mu = \frac{F_f}{F_n}$ ,  $F_n$  – forța nominală. Referitor la

prelucrarea metalelor prin presare, coeficientul de frecare este raportul dintre rezistența tangențială din zona de contact și limita de curgere a materialului prelucrat. În acest caz, în concordanță cu teoria plasticității, coeficientul de frecare nu poate depăși valoarea 0,5.

2. Coeficientul de frecare la șoc  $\mu = \frac{\Delta(mv_t)}{\Delta(mv_n)}$ ,  $\Delta(mv_t)$  – variația cantității de mișcare

(impuls) după direcția tangențială în timpul șocului;  $\Delta(mv_n)$  – variația cantității de mișcare după direcția normală.

3. Coeficientul de pierderi prin frecare  $\mu = \frac{W_f}{W}$ ,  $W_f$  – lucrul mecanic (energia) consumată prin frecare,  $W$  – lucrul mecanic total.

4. Coeficientul rezistenței la rostogolire  $\mu = \frac{k_l}{R}$ ,  $k_l$  – dimensiunea specifică de rostogolire,  $r$  – raza de rostogolire (se va analiza detaliat în capitolul 6).

### 5.2. Legile frecării

Prin observații experimentale s-au dedus două “legi” de bază ale frecării. Legile sunt entități empirice și nu sunt încălcate principiile fizice.

Cele două “legi” de bază au fost enunțate, inițial, de Amonton în 1699:

1. Frecare este independentă de aria aparentă de contact a celor două corpuri (o cărămidă sub greutatea proprie necesită aceeași forță de frecare indiferent pe care dintre fețe este trasă).

2. Forța de frecare este proporțională cu sarcina normală dintre corpuri.

Coulomb în 1785 a propus cea de-a “treia” lege:

3. Frecarea cinetică este independentă de viteza de alunecare – are un domeniu mai puțin de aplicabilitate decât celelalte două.

Coeficientul de proporționalitate din legea a doua,  $F_f = \mu F_n$ , este coeficientul de frecare. După cum frecarea poate fi statică sau cinetică, rezultă coeficient de frecare static  $\mu_s$  sau cinetic  $\mu_k$ .

#### Explicarea legilor lui Amonton

Se fac următoarele două presupuneri (ipoteze):

1. În timpul alunecării, forța rezistivă pe unitatea de arie de contact este constantă:

$$F_f = A_r s$$

unde:  $F_f$  este forța de frecare,  $A_r$  – aria reală de contact,  $s$  - forța specifică de frecare (forța pe unitatea de arie).

2. Aria reală de contact,  $A_r$ , este proporțională cu forța normală  $F_n$ ,

$$A_r = qF_n,$$

unde  $q$  este o constantă de proporționalitate.

Eliminând  $A_r$ , rezultă  $F_f = qF_n$ .

Prima ipoteză este ușor de justificat, nu se implică nici o presupunere privind natura forței specifice de frecare.

A doua ipoteză nu poate fi justificată în toate cazurile, dar pentru anumite condiții de contact valabilitatea este asigurată:

- a) pentru contactul plastic total, aria reală nu depinde de topografia suprafeței;
- b) ori de câte ori suprafețele de contact au distribuție exponențială sau normală Gauss a înălțimii rugozității, aria reală nu depinde de modul de deformare.

### 5.3. Originile frecării

Se știe că forța de frecare este datorată interacțiunilor dintre asperitățile opuse ale celor două suprafețe cu alunecare. Fiecare interacțiune a asperității va contribui la forța de frecare, astfel că forța de frecare totală va fi suma acestor forțe ale contactelor individuale.

Pe deasupra, la mișcarea relativă a suprafețelor, energia consumată este continuu disipată la suprafețe sau în apropierea acestora, energia disipată în unitatea de timp va fi suma energiilor disipate în procese individuale în același timp.

Observația că forța de frecare este aproximativ constantă, la aceeași forță normală, viteză, material etc., se datorează faptului că numărul interacțiunilor care au loc la un moment dat este mai mare și că legea de distribuția statistică a proceselor de contact este aproximativ constantă.

Este clar că frecarea are la bază două procese fundamentale – interacțiunea asperităților (adeziune și deformării) și disiparea energiei.

Aceste procese fundamentale nu sunt aditive, ci interactive.

#### a) Adeziunea.

Când două suprafețe sunt încărcate împreună ele pot adera pe o parte din aria reală, formând joncțiuni și care se desfac dacă alunecarea are loc. Desfacerea va avea loc în partea cea mai slabă a joncțiunii, care poate fi interfață originală sau pe o suprafață a unuia dintre cele două materiale. Dacă desfacerea este chiar interfața originală, atunci interacțiunea produce un stres (o tensiune), care, prin acumulare, va genera particulă de uzură prin mecanismul de oboseală.

Dacă desfacerea are loc în materialul mai moale dintre cele două materiale, atunci acest fragment de material se va transfera pe contrapiesa mai dură.

Pentru explicarea contribuției adeziunii la frecare, este necesară descrierea adeziunii a două solide în contact static.

- Energia superficială liberă a unui solid este definită, din punct de vedere termodinamic, ca energia reversibilă necesară formării unei unități de arie a unei noi suprafețe.

- Similar, dacă două suprafețe sunt aduse în contact, energia liberă interfacială este definită, din punct de vedere termodinamic, ca energia reversibilă necesară formării unei unități de arie a interfeței. Astfel, dacă se notează cu  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  energiile superficiale, se formează o interfață cu energia interfacială  $\gamma_{12}$ , atunci energia eliberată este

$$\Delta\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12} \quad (5.1)$$

Această cantitate este cunoscută ca lucrul mecanic al adeziunii, în principiu, măsură a energiei (lucrul mecanic) necesar separării corpurilor.

De exemplu:  $\gamma_{Al}=900 \text{ erg/cm}^2=900 \cdot 10^{-7} \text{ J/cm}^2$ ,  $\gamma_{Wo}=2300 \cdot 10^{-7} \text{ J/cm}^2$ ,  $\gamma_{Fe}=1500 \cdot 10^{-7}$ ;  $\gamma_{Au}=1120 \cdot 10^{-7}$ ;  $\gamma_{Cu}=1100 \cdot 10^{-7}$ ;  $\gamma_{Pb}=450 \cdot 10^{-7}$ ;  $\gamma_{Zn}=790 \cdot 10^{-7}$ .

Deși ecuația (5.1) este cunoscută ca fiind valabilă pentru lichide, Tabor (1985) a arătat că nu poate fi aplicată întocmai pentru solide ideal elastice/casante. Pentru solide de alte tipuri, energia calculată cu (5.1) este numai o parte mică a energiei necesare separării suprafețelor.

Totuși, deși lucrul termodinamic al adeziunii este de mică relevanță în multe contacte, lucrul mecanic și forța de separare a suprafețelor sunt relevante, astfel că Tabor (1985) a propus denumirea de lucrul mecanic de “scoatere liberă” și forță de “scoatere liberă”.

Una dintre sursele de disipare a energiei de frecare este formarea și distrugerea legăturilor moleculare din punctele de contact ale suprafeței ce alunecă. Aceste prinderi se numesc microprinderi. Un parametru de bază ce evaluează componenta moleculară a frecării este  $\frac{\tau}{\sigma_c}$  ( $\tau$  - rezistența de forfecare a legăturii moleculare;  $\sigma_c$  - rezistența la curgere a materialului de bază).

Cauza acestor microprinderi este existența forțelor Van der Waals (energia de ordinul  $0,15 \cdot 10^{-19} \text{J}$ ).

În zona de contact există un transfer continuu de energie, formându-se și distrugându-se straturile, astfel că se poate defini un “al treilea corp” în continuă transformare. Puterea superficială transmisă prin acest corp este de ordinul de mărimea  $10^3 \text{ W/mm}^2$ , astfel că substanța din zonă se găsește în stare de disociere.

Rezistența la alunecare a unei legături din corpul terț se evaluează prin energia de activare  $U$ , necesară distrugerii acestei legături.

Potrivit teoriei lui Frankel, un atom al unui metal în stare topită trece dintr-o stare de echilibru la alta, prin două faze – evaporare și condensare. În acest caz, timpul de staționare în starea de echilibru,  $t$ , este:

$$t = t_0 \exp\left(\frac{U}{k\theta}\right)$$

unde  $t_0$  este timpul corespunzător unei energii foarte mici  $U \rightarrow 0$ ,  $k$  - constanta Boltzmann,  $\theta$  - temperatura.

Se consideră că rezistența la alunecare ( $\tau$ ) a corpului terț este proporțională cu timpul de staționare

$$\tau = a_0 t = a_0 t_0 \exp\left(\frac{U}{k\theta}\right) = a \exp\left(\frac{U_0 + \gamma p_r}{k\theta}\right) \approx a \left(1 + \frac{U}{k\theta} + \frac{\gamma p_r}{k\theta}\right) = \tau_0 + \beta p_r$$

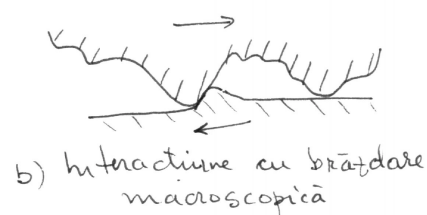
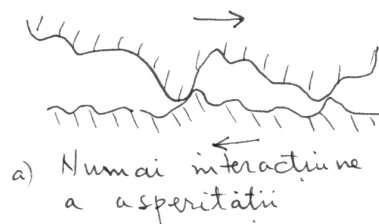
unde  $\gamma$  - coeficient ce ia în considerație dimensiunile “prinderii” suprafețelor;  $\tau_0 = a + a \frac{U_0}{k\theta}$  - tensiune specifică la forfecare;  $\beta$  - coeficient al componentei moleculare a frecării.

Pentru multe metale  $\beta = 0,02 \dots 0,15$ ; pentru cupla metal-metal fără ungere  $\tau_0 = 2,5-30 \text{ MPa}$  și cu ungere  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ ; pentru cupla metal-polimer  $\tau_0 = 0,2-0,5 \text{ MPa}$ .

### b) Deformarea

Dacă adeziunea nu are loc, altă alternativă de interacțiune este aceea că rezistența la mișcare este una în care materialul este deformat și deplasat în timpul mișcării relative.

Materialul mai dur pătrunde în materialul mai moale și se produce o brăzdare.



Interacțiunile asperității sunt întotdeauna prezente, sunt însoțite de adeziune și sunt adesea cauza frecării.

Contribuția brăzdării poate fi sau nu semnificativă, în funcție de rugozitățile suprafeței, de duritățile relative ale celor două suprafețe și de mărimea, curbura și duritățile produselor de uzură și de reacție dintre suprafețe.

#### 5.4. Teorii ale frecării de alunecare

##### 5.4.1. Teoria simplă a adeziunii (Bowden, Tabor – 1950)

Este prima teorie modernă de explicare a frecării și este dezvoltată pentru metale ideal elasto-plastice.

Se fac următoarele ipoteze:

1) Când suprafețele sunt încărcate împreună, ele fac contact numai pe vârfurile asperităților.  
2) Chiar la sarcini mici, presiunea reală de contact este mare, astfel că vârfurile asperităților celor mai mari ale materialului mai moale se deformează plastic.

3) Curgerea plastică determină creșterea ariei de contact atât prin mărirea contactelor inițiale cât și prin inițierea de noi contacte, până ce aria reală de contact este suficientă pentru a prelua sarcina prin deformații elastice.

4) În aceste condiții, pentru un material elasto-plastic

$$F_n = A_r p_o \quad \begin{array}{c} \sigma \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \epsilon \end{array} \quad (5.2)$$

unde  $F_n$  este forța normală;  $A_r$  – aria reală de contact;  $p_o$  – presiunea de curgere a materialului mai moale dintre cele două.

Presiunea de curgere este foarte apropiată de duritate,  $H$ , măsurată prin teste de imprimare, astfel că:

$$F_n = A_r H. \quad (5.3)$$

5) Ca urmare a deformației plastice severe, asperitățile formează suduri reci ce sunt legături adezive puternice.

6) Forța specifică de frecare,  $s$ , este necesară forfecării unității de arie a joncțiunii asperității:

$$F_f = A_r s. \quad (5.4)$$

Neglijând efectul de brăzdare din (5.3) și (5.4), rezultă coeficientul de frecare  $\mu$ :

$$\mu = \frac{F_f}{F_n} = \frac{s}{H} \quad (5.5)$$

Se observă că se explică teoretic legile lui Amonton: frecarea este independentă de aria nominală de contact și forța de frecare este proporțională cu forța normală.

Pentru materiale ideal elasto-plastice și neglijând efectul de ecruisare, forfecarea materialului mai moale are loc când  $s = k$  (tensiunea critică de forfecare  $k = \sigma_c / 2$  pentru criteriul de curgere Tresca și  $k = \sigma_c / 2^{1/2}$  pentru criteriul Mises), astfel că

$$\mu = \frac{k}{H} = \begin{cases} 0,5 \frac{\sigma_c}{H} \rightarrow \text{Tresca} \\ 0,67 \frac{\sigma_c}{H} \rightarrow \text{Mises} \end{cases} \quad (5.6)$$

Raportul  $\frac{k}{H}$  este relativ constant pentru multe materiale, astfel că valorile coeficientului de frecare pentru o cuplă din materiale similare este  $\mu \approx \frac{k}{H} \approx 0,16$ , chiar dacă valorile  $k$  și  $H$  sunt esențial diferite pentru metale diferite.

Potrivit acestei teorii, efectul de brăzdare al frecării  $\mu_b$  se adaugă la efectele date de ecuația (5.6). Efectul de brăzdare se va analiza detaliat într-un viitor subcapitol.

Deși această teorie simplă este atractivă, totuși este inadecvată în multe situații:

1) coeficientul de frecare,  $\mu = \frac{k}{H}$ , depinde numai de proprietățile mecanice ale materialului mai moale dintre cele două, astfel că un anumit material are același coeficient de frecare contra fiecărei contrafețe dure; acest lucru nu este pe deplin verificat;

2) Valorile coeficientului de frecare în atmosfera normală ca temperatură și umiditate pentru metale sunt de ordinul 0,5, mai mare decât valoarea 0,16 din  $\mu = \frac{k}{H}$ .

3) Multe materiale, în special cele ductile, manifestă coeficienți de frecare mult mai mari atunci când suprafețele nu sunt contaminate cu filme de oxizi (condiție verificată în vid). Coeficienții de frecare sunt mult mai mari decât unitatea în cazul unor viteze de alunecare extreme și când pe muchia cuplei se formează adeziuni.

#### 5.4.2. Extensie a teoriei adeziunii (completări Bowden-Tabor)

În teoria simplă a adeziunii, efectele forței normale și ale celei tangențiale au fost considerate separat; aria reală de contact a fost apreciată ca fiind determinată numai de forța normală ( $F_n = A_r H$ ) și forța de frecare ca fiind o cauză a forfecării acestei arii ( $F_f = A_r s$ ).

Totuși, coeficienții de frecare observați între suprafețe metalice curate indică că adevărata arie de contact trebuie să fie mai mare decât cea prezisă prin teoria simplă a adeziunii. Această creștere a ariei este explicată de Bowden și Tabor prin combinarea efectelor tensiunilor normale și tangențiale.

Se consideră inițial sistemul bidimensional de tensiuni și se apreciază că apariția curgerii are loc când tensiunea de forfecare atinge valoarea critică  $k$ .

Utilizând cercul Mohr, curgerea apare când

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \tau^2 = k^2$$

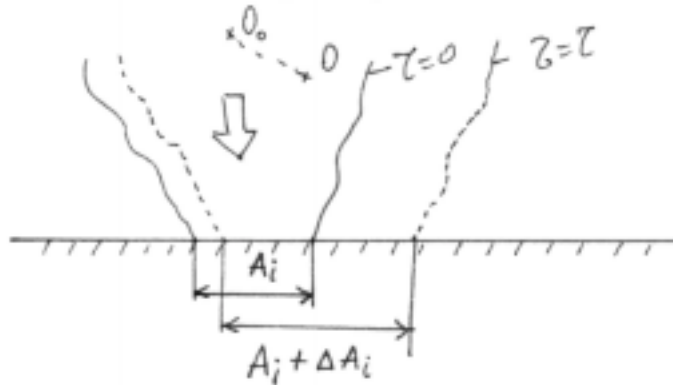
sau

$$p^2 + 4\tau^2 = 4k^2 \quad (5.7')$$

Se examinează efectele compunerii tensiunilor normale și tangențiale asupra ariei reale de contact în joncțiunea asperității.

Se consideră o singură asperitate sub sarcina normală  $F_n$ , având aria de contact  $A_r$ , definită prin  $A_r = \frac{F_n}{H}$ . Se notează că punctul de curgere este chiar duritatea  $H$  și că tensiunea tangențială (de forfecare) maximă din material este  $k$ , astfel că la creșterea tensiunii normale sau tangențiale în joncțiune va avea loc curgerea plastică.

Dacă crește joncțiunea, atunci ambele tensiuni normale și tangențiale descresc și acest



proces continuă până când tensiunea tangențială în joncțiune face ca să atingă valoarea  $k$ , când din nou va suporta sarcina elastic.

❖ Pentru cazul tridimensional se consideră o relație de forma:

$$p^2 + \alpha\tau^2 = r^2 \tag{5.8}$$

unde  $\alpha$  și  $r$  sunt constante ce se vor determina din următoarele condiții la limită:

1) când nu este forță tangențială  $\tau=0$  și  $p=H$  rezultă  $r^2=H^2$ ,

deci

$$p^2 + \alpha\tau^2 = H^2 \tag{5.9}$$

2) când joncțiunea este foarte mare și adeziunile sunt puternice, forța de frecare este mult mai mare decât forța normală ( $p \ll \tau$ ), astfel că  $\alpha\tau^2 \approx H^2$ , în acest caz  $\tau \approx k$  deci

$$\alpha k^2 = H^2 \Rightarrow \alpha = \frac{H^2}{k^2} \tag{5.10}$$

Ținând seama că  $H \approx 6k \Rightarrow \alpha \approx 36$ .

Totuși, experimental s-a constatat că  $\alpha < 36$  și Bowden și Tabor au adoptat  $\alpha=9$ .

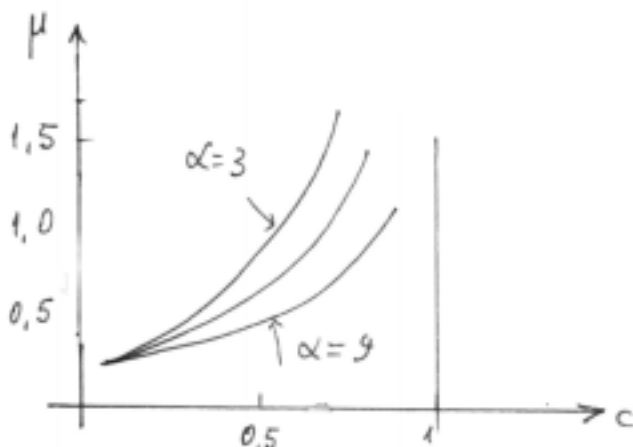
Se va analiza că valoarea exactă a lui  $\alpha$  are influență secundară numai asupra mărimii joncțiunii.

Se consideră joncțiunea contaminată, astfel că  $\tau_s = ck$ , unde  $c < 1$ . În timp ce tensiunea de frecare,  $\frac{F_f}{A_r}$ , este mai mică decât  $\tau_s$ , filmul de contaminant va fi forfecat, mărimea joncțiunii nu se

mai produce și va apare alunecare. Astfel, condiția pentru alunecare va fi:

$$p^2 + \alpha\tau_s^2 = H^2.$$

Dar  $H^2 = \alpha k^2$ , astfel că



$$p^2 + \alpha\tau_s^2 = \alpha k^2 = \alpha \frac{\tau_s^2}{c^2}$$

și

$$\mu = \frac{\tau_s}{p} = \frac{c}{[\alpha(1-c^2)]^{1/2}}$$

În acord cu această teorie, când  $c \rightarrow 1$  ( $\tau_s = k$ ), coeficientul de frecare tinde spre  $\infty$ , lucru observat pentru metalele curate. Se observă din (5.11) că  $\mu$  scade foarte repede cu  $c$ . Când  $c$  este mic

$$\mu \approx \frac{c}{\alpha^{1/2}}$$

Se obține coeficientul de frecare scăzut dacă există un film cu tensiune redusă la forfecare. Acest principiu se aplică la lubrifiția cu filme de metale moi și lubrifianți limită.

❖ Johnson a sugerat în locul relației (5.8),  $(p^2 + \alpha\tau^2 = r^2)$ , o relație de forma

$$p^2 + \alpha_1 \tau_s^2 = \alpha_2 k^2, \quad (5.12)$$

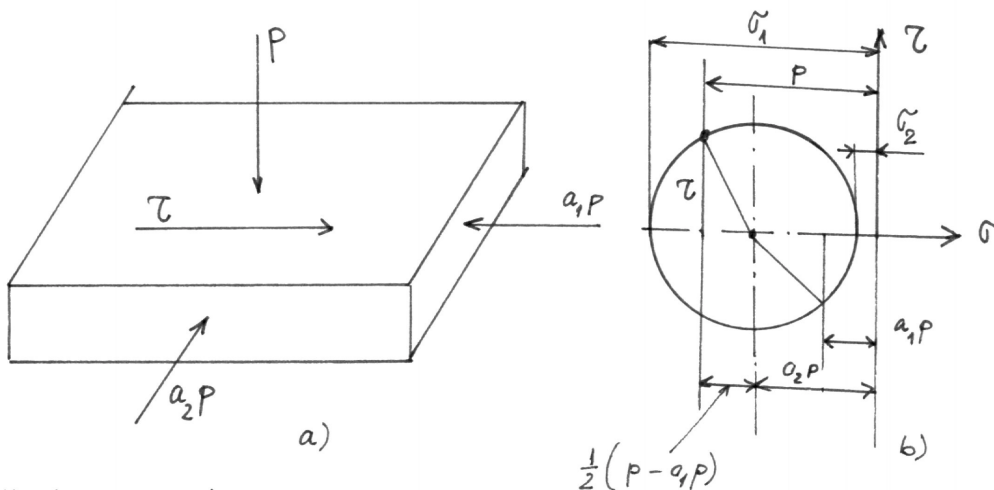
asfel că

$$\mu = \frac{\tau_s}{p} = \frac{c}{[\alpha_2 - \alpha_1 c^2]^{1/2}}, \quad (5.13)$$

cu  $\tau_s = ck$ ,  $c < 1$ .

Johnson a arătat că dacă  $c \rightarrow 1$ , alunecarea este posibilă și  $\mu \rightarrow 1$ . Este posibil să apară coeficienți de frecare mai mare decât 1, dar fără mărirea joncțiunii și formarea unei așchii sau material transferat pe suprafața opusă.

❖ Halling a sugerat că  $\alpha$  nu este constant ci este funcție de  $c$ . Se consideră cazul unui element de suprafață supus la tensiuni normale  $p$  și tangențiale  $\tau$  și se menține în echilibru prin acționarea tensiunilor interne  $a_1 p$  și  $a_2 p$ .



În cazul general  $0 < c < 1$ , starea plană de deformații poate fi reprezentată prin cercul Mohr

$$a_2 p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{a_1 p + p}{2} = \frac{p(a_1 + 1)}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + 1}{2}$$

și

$$p^2 \left( \frac{1 - a_1}{2} \right)^2 + c^2 k^2 = k^2$$

sau

$$p^2 + \alpha c^2 k^2 = \alpha k^2$$

unde

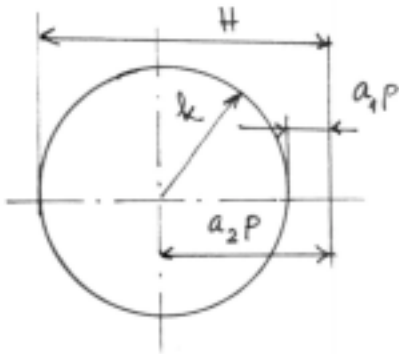
$$\alpha = \left[ \frac{2}{1 - a_1} \right]^2 \quad (5.14)$$

și

$$\mu = \frac{ck}{p} = \frac{c}{[\alpha(1 - c^2)]^{1/2}} \quad (5.15)$$

relație similară cu (5.11) dar cu  $\alpha$  variabil (5.14). Valorile lui  $\alpha$  pentru cazurile extreme:  $c=0$  și  $c=1$ .

$c=0$  – rigid- material platic:  $\tau = ck = 0$



$$p^2 \left( \frac{1-a_1}{2} \right)^2 = k^2 \Rightarrow p \left( \frac{1-a_1}{2} \right) = k,$$

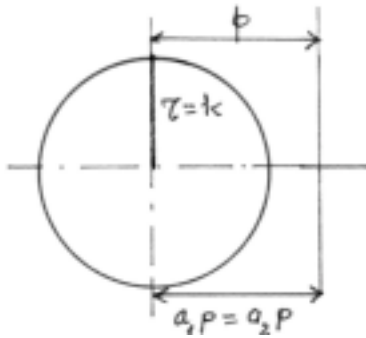
dar  $p = H$  și  $H \approx 6k \Rightarrow$

$$\frac{1-a_1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

deci

$$\alpha = \left[ \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} \right]^2 = 36$$

$c=1$



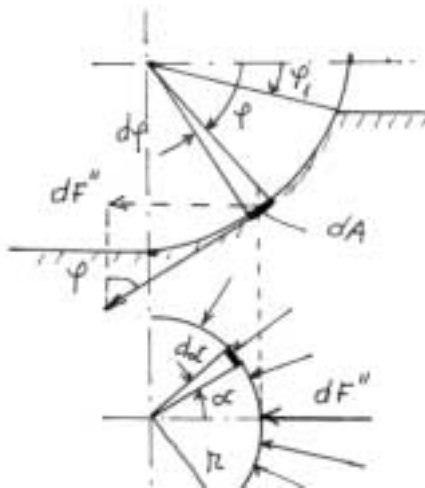
$$\begin{aligned} a_1 p = a_2 p = p \\ \tau = k \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ \alpha \rightarrow \infty \end{cases}$$

Variația lui  $\alpha$  între aceste limite,  $(36, \infty)$ , nu este cunoscută și ecuațiile trebuie modificate pentru cazul real al tensiunilor triaxiale și pentru deformații deplin elastice sau plastice cu ecrusare. Deci, potrivit acestei teorii, coeficientul de frecare depinde de tensiunile interfaciale de forfecare, reprezentate de  $ck$  și caracteristicile de deformație ale materialului.

### 5.4.3. Componenta de adeziune a forței de frecare

Din expresiile coeficientului de frecare (5.6), (5.11), (5.13) și (5.15) se observă că nu depinde de forma corpului (rugozității) și caracterizează numai materialul  $\left( \mu = \frac{k}{H}, \mu = \frac{\tau_s}{p} \right)$ .

Se analizează influența formei rugozității asupra componentei de adeziune a coeficientului de frecare.



#### a) Rugozitatea sferică – pe suport moale

Se consideră suprafața elementară  $dA$  din zona de separație

$$\begin{aligned} dA &= R d\varphi \pi r = r d\varphi \pi R \cos \varphi = \\ &= \pi R^2 \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

și forța de adeziune ce acționează pe această suprafață

$$dF' = \tau_s dA$$

$\tau_s$  - rezistența la forfecare pe suprafața de contact.

Componenta ce acționează pe direcția de mișcare

$$dF'' = dF' \sin \varphi = \tau_s \pi R^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \tau_s R^2 \sin 2\varphi d\varphi$$

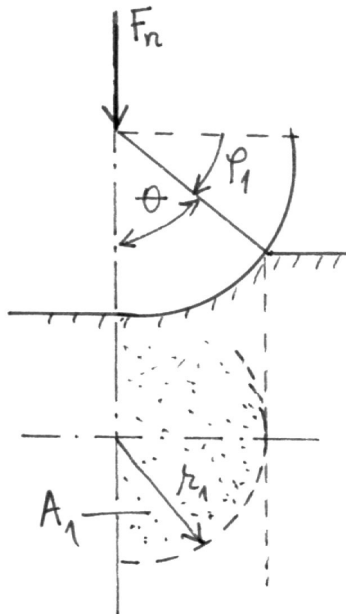


Valoarea medie a componentei  $dF''$  pe direcția de mișcare,  $dF''_a$ ,

$$\pi r dF''_a = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r d\alpha dF'' \cos \alpha = r dF'' \cdot 2 \Rightarrow dF''_a = \frac{2}{\pi} dF'' = R^2 \tau_s \sin 2\varphi d\varphi$$

Componenta de adeziune pe direcția de mișcare va fi

$$F_a = \int dF''_a = \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \tau_s \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \tau_s (1 + \cos 2\varphi_1)$$



Notând

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \Rightarrow F_a = R^2 \tau_s \sin^2 \theta = \tau_s r_1^2$$

Dar  $A_1 = \frac{1}{2} \pi r_1^2$

și  $F_n = \sigma_c A_1 = \frac{1}{2} \pi \sigma_c r_1^2$

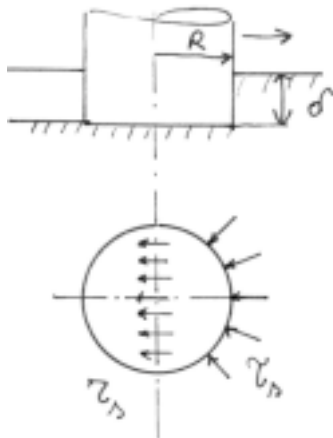
Deci  $\mu_a = \frac{F_a}{F_n} = \frac{2\tau_s r_1^2}{\pi \sigma_c r_1^2} = \frac{2}{\pi} \frac{\tau_s}{\sigma_c}$

**b) Rugozitate cilindrică**

**b1) Cu generatoarea pe planul moale – analog, rezultă:**

$$\mu_a = \frac{F_a}{F_n} = \frac{BR\tau_s \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi}{BR\sigma_c \cos \varphi_1} = \frac{\tau_s}{\sigma_c}$$

**b2) Cu generatoarea perpendiculară pe planul moale**



$$F_a = \overbrace{\pi R^2 \tau_s}^{F_{a0}} + \overbrace{2R\delta \tau_s}^{F_{av}};$$

$$F_n = \pi R^2 \sigma_c;$$

$$F_{av} = \delta R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_s \cos \alpha d\alpha = 2R\tau_s \delta$$

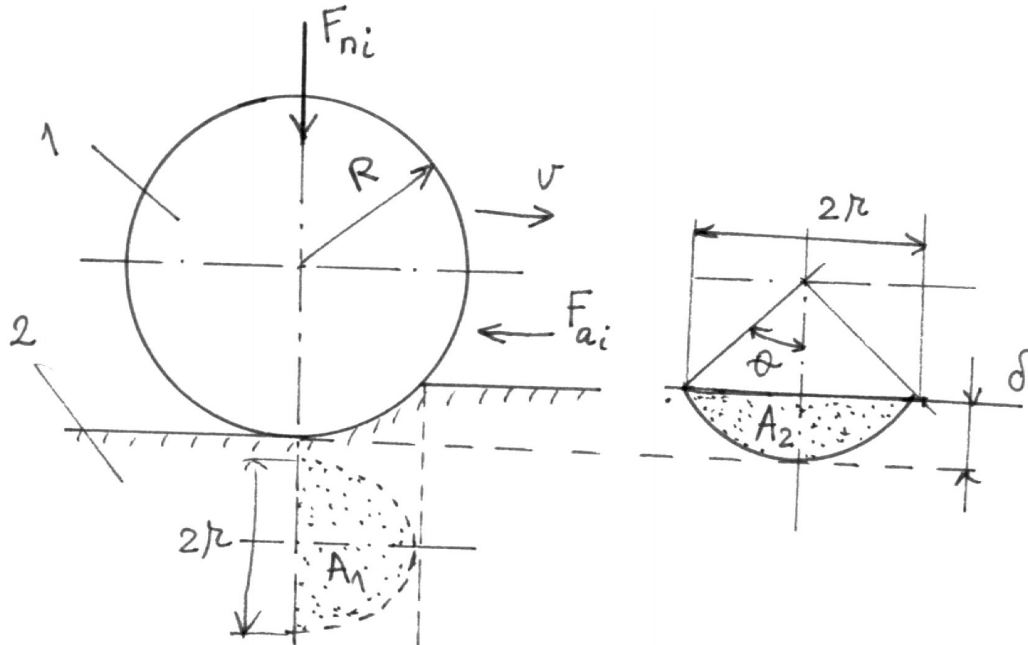
rezultă

$$\mu_a = \frac{F_a}{F_n} = \frac{\pi R^2 \tau_s \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{R}\right)}{\pi R^2 \sigma_c} = \frac{\tau_s}{\sigma_c} \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{R}\right)$$

#### 5.4.4. Teoria brăzdării

Se consideră că rugozitățile suprafeței dure pătrund în materialul mai moale și-n prezența mișcării are loc un fenomen de brăzdare.

##### a) Rugozități sferice rigide



Materialul planului 2 se deformează plastic, fără curgere, atingându-se limita de curgere  $\sigma_c$ , evaluată prin duritatea  $H$ .

Geometric:

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}(R2\theta R - 2R^2 \sin \theta \cos \theta) = \frac{1}{2}R^2(2\theta - \sin 2\theta)$$

Considerând materialul planului izotrop:  $F_{ni} = \sigma_c A_1$  și  $F_{ai} = \sigma_c A_2$ .

Deci, coeficientul de frecare la brăzdare este:

$$\begin{aligned} \mu_b &= \frac{F_{ni}}{F_{ai}} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{R^2}{2\pi \frac{r^2}{2}}(2\theta - \sin 2\theta) = \frac{R^2}{\pi(2R\delta - \delta^2)}(2\theta - \sin 2\theta) = \\ &= \frac{R^2}{\delta^2} \frac{1}{\left(\frac{R}{\delta} - 1\right)} \frac{2\theta - \sin 2\theta}{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{2\theta - \sin 2\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{c(\theta)}{r} \end{aligned} \quad (5.16)$$

unde  $c(\theta) = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{\sin^2 \theta} \approx \frac{\varphi\theta}{3}$  pentru valori mici ale lui  $\theta$ .

Pentru  $r = \frac{R}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow \mu_b = 0,23$  și pentru  $r = R \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \mu_b = 1$ .

##### b) Rugozități cilindrice rigide

Se consideră că rugozitățile cilindrice rigide se găsesc în contact cu o suprafață plană dintr-un material moale, caracterizat prin rezistență la curgere  $\sigma_c$ . Se atinge limita de curgere, însă materialul nu curge.

Geometric:

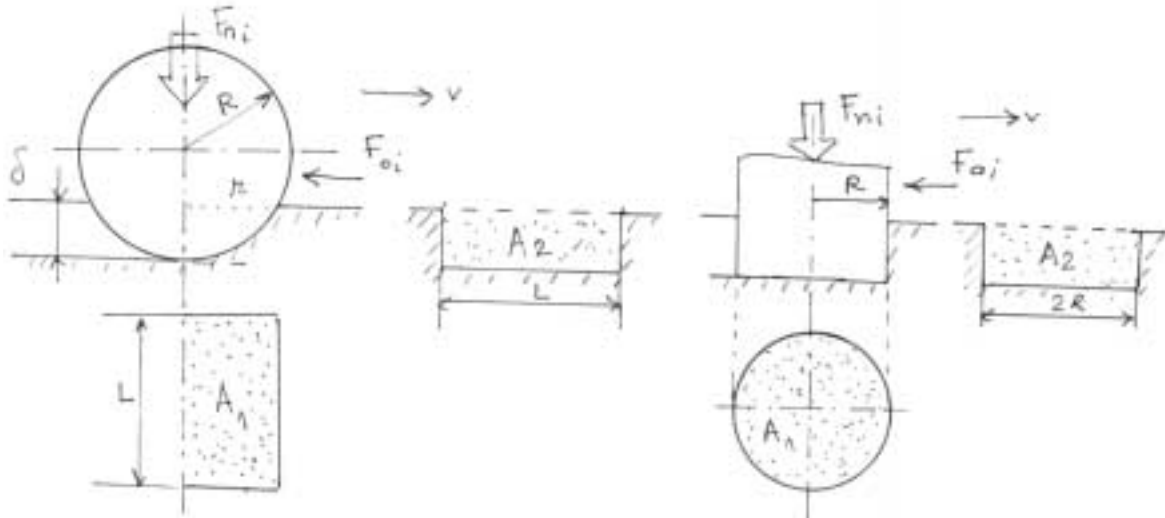
- pentru cilindrul orizontal

$$A_1 = Lr = L\sqrt{R^2 - (R - \delta)^2} = L\sqrt{(2R - \delta)\delta}$$

$$A_2 = L\delta$$

și coeficientul de frecare la brăzdare:

$$\mu_b = \frac{F_{ai}}{F_{ni}} = \frac{A_2\sigma_c}{A_1\sigma_c} = \sqrt{\frac{1}{2\frac{R}{\delta} - 1}} \quad (5.17)$$



- pentru cilindrul vertical

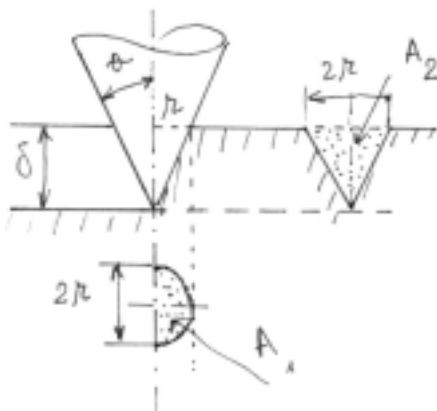
Geometric:

$$A_1 = \pi R^2; \quad A_2 = 2R\delta$$

și

$$\mu_b = \frac{F_{ai}}{F_{ni}} = \frac{A_2\sigma_c}{A_1\sigma_c} = \frac{2\delta}{\pi R} \quad (5.18)$$

**c) Rugozități conice**



Materialul moale nu curge –

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} 2r\delta = r\delta \text{ctg}\theta = r^2 \text{ctg}\delta \quad (5.19)$$

$$\Rightarrow \mu_b = \frac{A_2\sigma_c}{A_1\sigma_c} = \frac{2r^2 \text{ctg}\delta}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} \text{ctg}\theta$$

De exemplu pentru  $\theta=60^\circ \Rightarrow \mu_b=0,32$ ,

$\theta=30^\circ \Rightarrow \mu_b=1,1$ .

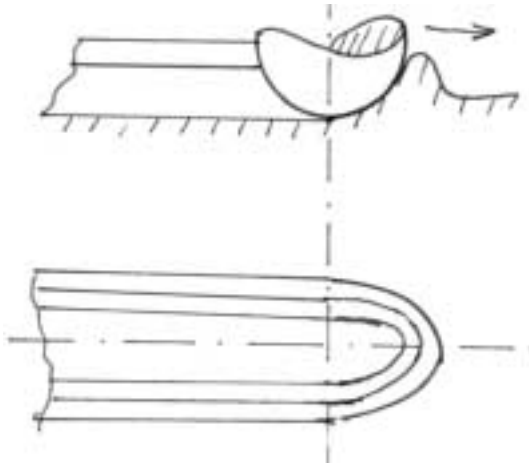
Uzual rugozitățile cu unghiul  $\theta \approx 85^\circ$ , astfel că  $\mu_b \approx 0,056$ .

**d) Efectul curgerii materialului asupra coeficientului de frecare**

În ipoteza curgerii materialului se menține constant volumul de material, astfel că în fața rugozității se formează un “val” de deformare. Efectul acestei deformări este acela de a mări coeficientul de frecare ( $\mu_{bp}$ ) față de cel determinat în ipoteza că materialul nu curge  $\mu_p$  (5.16), (5.17), (5.18), (5.19).

$$\mu_{bp} = \mu_p k_p \quad (5.20)$$

unde  $k_p$  este un coeficient dependent de material.



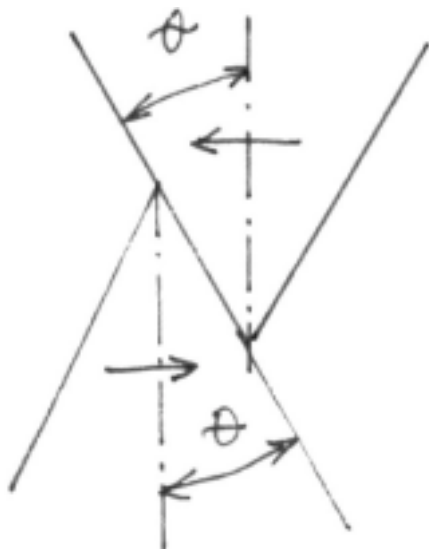
Material	$k_p$
Wolfram	1,55
Oțel	1,35-1,70
Fier	1,90
Cupru	1,55
Cositor	2,40
Plumb	2,90

**5.4.5. Teorii ale frecării pe bază de deformații**

În teoria adeziunii, tensiunile normale și de curgere ale unei asperități sunt considerate ca reprezentative pentru toate rugozitățile. În teoriile frecării pe baza deformațiilor se consideră că tensiunile normale și tangențiale ale asperităților variază în timpul existenței joncțiunii.

Baza fizică a acestei analize este aceea că în timpul mișcării macroscopice a suprafeței, mișcarea este paralelă cu interfața și separarea suprafețelor (interstițiul) rămâne constantă.

Cu această ipoteză se poate aprecia că aria de contact este constantă la un anumit nivel de deformare determinat de o forță normală constantă și drept consecință asperitățile din contact trebuie să se deformeze atâta timp cât există mișcare între suprafețe.

**a) Teoria lui Edwards și Halling (1968)**

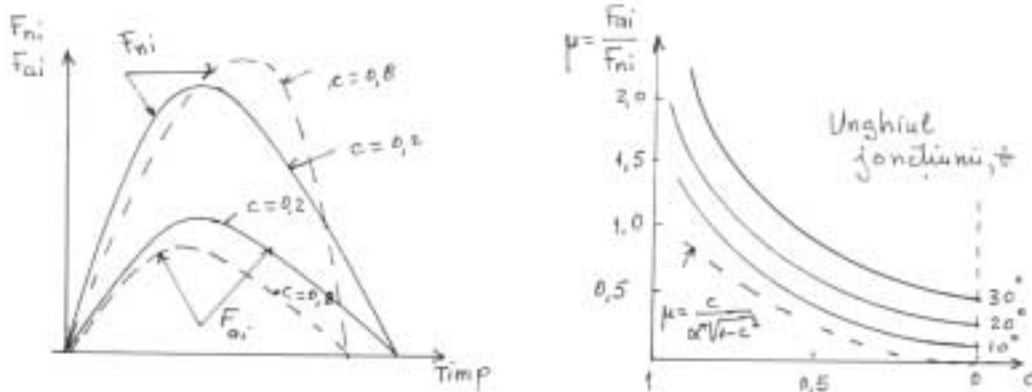
Se consideră două asperități idealizate sub formă de pană cu semiunghiul  $\theta$  și care se deplasează relativ. Cele două asperități solide se deformează ideal elastic-plastic (după atingerea limitei de curgere și ariei de contact corespunzătoare, asperitatea în ansamblu se deformează elastic)

Cu aceste precizări, se poate calcula valoarea instantanee a forței de frecare  $F_{ai}$  și a forței normale  $F_{ni}$  în timpul existenței joncțiunii.

În cazul unei suprafețe de contact perfect curată, tensiunea de forfecare a joncțiunii va fi  $k$ ,  $\frac{\sigma_c}{\sqrt{2}}$  sau  $\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}$  după criteriul de plasticitate sau  $ck$ , dacă suprafața este contaminată cu un anumit film ( $c \leq 1$ ).

Calculul se face pentru valori diferite ale lui  $\theta$  și  $c$

cu teoria lui Bowden și Tabor ( $F_n = A_r H$ ,  $F_f = F_a = s A_r$ ,  $\mu = \frac{s}{H}$  și  $\mu = \frac{\tau_s}{p} = \frac{c}{[\alpha(1-c^2)]^{1/2}}$ ).



Ecuția generală pentru  $\mu$ , dată de Edwards și Halling, este:

$$\mu = \frac{\frac{c}{\alpha(1-c^2)^{1/2}} + \phi}{1 - \frac{c}{\alpha(1-c^2)^{1/2}} \phi} \quad (5.21)$$

unde  $\phi$  este o funcție de  $c$  și de geometria joncțiunii și  $\phi=0$  când  $\theta=0$ .

Este interesant că atunci când  $\phi=0$ , ecuația se reduce la cazul teoriei extinse a adeziunii modificată de Bowden și Tabor (relatia 5.11):  $\mu = \frac{c}{[\alpha(1-c^2)]^{1/2}}$ .

Este caracteristic că teoria deformației ia în considerare faptul că energia consumată ca urmare a deformației plastice crește cu “ascuțirea” rugozităților (unghiul la vârful). Pentru rugozități semisferice energia crește cu scăderea razei sferelor.

În cazul deformației elastice a asperităților, nu există o componentă de deformație a frecării, dar aria reală și implicit forța de forfecare crește cu panta asperității. Aceste două considerații fac ca să se accepte că frecarea între două suprafețe macroscopice netede crește cu raza de curbura medie absolută.

### b) Teoria frecării prin histerezis

Se consideră că materialul se deformează elastic și că o parte din energia necesară deformării pe direcția de alunecare se pierde prin histerezis. Această energie are ca efect o forță de frecare.

Pentru cazul în care un corp se consideră perfect rigid, de formă idealizată (sferă, cilindru, con) și celălalt un semispațiu elastic, forța de frecare  $F_{aih}$  se definește ca energia necesară deformării pe direcția de alunecare ( $L_{mi}$ ) corespunzătoare unei lungimi de frecare egală cu dimensiunea corpului pe acea direcție ( $\lambda$ ):

$$F_{aih} = \frac{L_{mi}}{\lambda}$$

Energia necesară deformării,  $L_{mi}$ , se apreciază prin energia elastică înmagazinată în corp și nerestituită (pierdere prin histerezis),

$$L_{mi} = E_{ei} \alpha_h,$$

unde  $E_{ei}$  este energia elastică,  $E_{ei} = \frac{1}{2} p_m^2 \frac{V}{E^*}$  ( $p_m$  – presiunea medie de contact,  $E^*$  – modulul de elasticitate redus al materialului semispațiului elastic  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $V$  – volumul de material deformat);  $\alpha_h$  – coeficientul pierderilor prin histerezis ( $\alpha_h=0,01$  pentru metale,  $\alpha_h \approx 0,6 \dots 0,8$  pentru elastomeri). De remarcat că acest coeficient depinde de temperatură și de frecvența solicitărilor, în special pentru materialele vâscoelastice.

Considerăm că pe o suprafață de arie  $A$  se găsesc  $n_o$  corpuri rigide (rugozități de formă idealizată cu dimensiunea în direcția de alunecare  $\lambda$ )

$$n_o \approx \frac{A}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}.$$

Din acest număr maxim de rugozități ( $n_o$ ), numai o parte se găsesc în contact ( $n = \gamma n_o$ ,  $\gamma \leq 1$ ,  $\gamma$  – coeficient de “densitate” a rugozității), astfel că:

$$n = \frac{4\gamma A}{\lambda^2}.$$

Forța totală de frecare prin histerezis,  $F_{ah}$ , este:

$$F_{ah} = n F_{ain} = \frac{4\gamma A}{\lambda^3} E_{ei} \alpha_h = \frac{4\gamma A}{\lambda^3} \frac{p_m^2 V}{2E^*} \alpha_h.$$

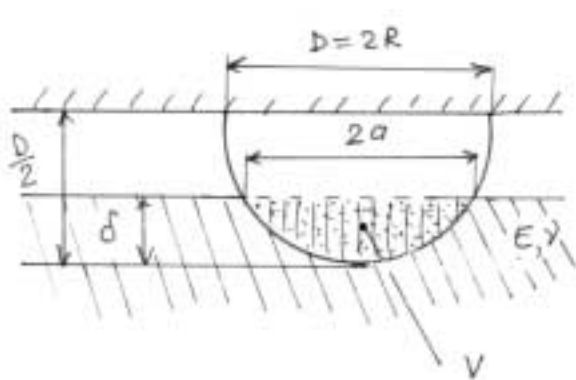
Prin definirea coeficientului de frecare,  $\mu_h = \frac{F_{ah}}{F_n}$ , rezultă:

$$\mu_h = \frac{F_{ah}}{p_m A} = 2\gamma \alpha_h \left(\frac{p_m}{E^*}\right) \left(\frac{V}{\lambda^3}\right).$$

Se analizează concret expresia coeficientului de frecare, prin histerezis, pentru trei forme idealizate de rugozități: sferă, cilindru, con.

### 1. Rugozități sferice

- Relațiile hertziene:



$$a = \left(\frac{3P \frac{D}{2}}{4E^*}\right)^{1/3}; \quad \delta = \frac{a^2}{2};$$

$$p_m = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{2}{3} p_o = \left[\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 \left(\frac{D}{2}\right)^2}\right]^{1/3};$$

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$$

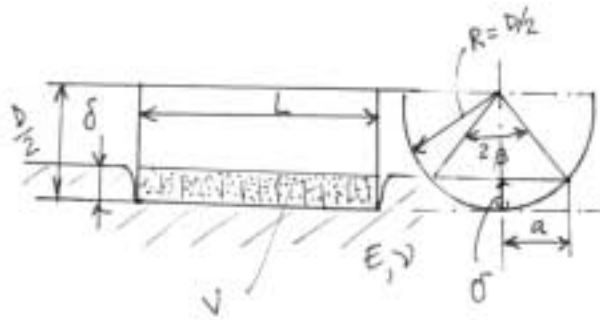
- Volumul calotei sferice – volumul materialului deformat:

$$V = \frac{\pi}{3} \delta^2 \left(\frac{3D}{2} - \delta\right) \approx \frac{\pi}{2} \delta^2 D = 2\pi \frac{a^4}{D} = \frac{2\pi}{D} \left(\frac{\pi}{4\sqrt[3]{2}} \frac{p_m}{E^*} D\right)^4 = \frac{\pi^5}{128\sqrt[3]{2}} \left(\frac{p_m}{E}\right)^4 D^3.$$

$$\text{Deci } \mu_h = \frac{\pi^5}{64\sqrt[3]{2}} \left(\frac{p_m}{E}\right)^5.$$

## 2. Rugozități cilindrice

- Relațiile hertziene:



$$a = \left( \frac{2PD}{\pi E^*} \right)^{1/2};$$

$$p_m = \frac{\pi}{4} \left( \frac{2PE^*}{\pi LD} \right)^{1/2} \Rightarrow a = \frac{4}{\pi} D \frac{p_m}{E};$$

$$\delta = \frac{P}{\pi E^* L} \left\{ 2 \ln \left( \frac{2D}{a} \right) - 1 \right\} \approx \frac{a^2}{D}$$

$$a^2 = R^2 - (R - \delta)^2 \approx 2R\delta$$

- Volumul segmentului de cilindru:

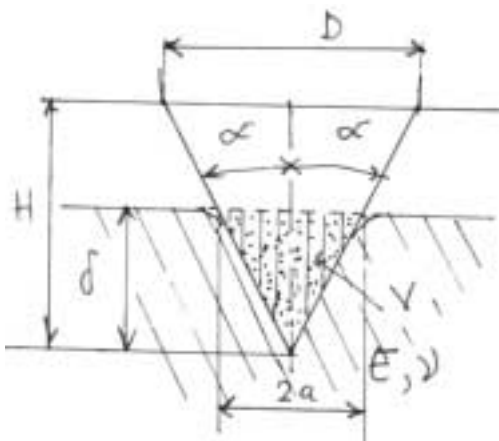
$$V = L \left( \frac{1}{2} \frac{2\pi R}{360} 2\beta R - \frac{1}{2} 2a(R - R \cos \beta) \right) \approx a\delta L = \frac{a^3 L}{D} = \frac{L}{D} \left( \frac{8}{\pi} R \frac{p_m}{E} \right)^3 =$$

$$= \frac{L}{D} \frac{4^3 D^3}{\pi^3} \left( \frac{p_m}{E} \right)^3 = \left( \frac{4}{\pi} \right)^3 LD^2 \left( \frac{p_m}{E} \right)^3$$

$$\text{Deci } \mu_h = 2 \left( \frac{4}{\pi} \right)^3 \gamma \alpha_h \frac{L}{D} \left( \frac{p_m}{E^*} \right)^4.$$

## 3. Rugozități conice

- Relațiile contactului elastic



$$p(r) = \frac{1}{2} E^* \text{ctg} \alpha \cdot \cosh^{-1} \frac{a}{r} =$$

$$= \frac{1}{2} E^* \text{ctg} \alpha \cdot \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2}}$$

$$p_m = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{1}{2} E^* \text{ctg} \alpha = E^* \frac{H}{D}$$

- Volumul conului de material deformat

$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 \delta = \frac{1}{3} \pi a^3 \text{ctg} \alpha.$$

$$\text{Deci } \mu_h = 2 \gamma \alpha_h \left( \frac{p_m}{E^*} \right) \frac{\pi a^3 \text{ctg} \alpha}{3D^3} = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\pi} \gamma \alpha_h \left( \frac{p_m}{E^*} \right)^2 \left( \frac{p_a}{E} \right)^{3/2} \text{ unde } p_a = \frac{2P}{HD}, \text{ P fiind forța}$$

exterioară preluată.

### 5.4.6. Teoria molecular-mecanică a frecării

#### a) Componenta moleculară a frecării

În zona de contact, rugozitățile celor două suprafețe se întrepătrund și au o mare densitate de energie de ordinul de mărime a  $10^3 \text{ W/m}^2$ . Ca urmare a acestei energii, moleculele din contact se găsesc aproape de starea de disociere. Totodată densitatea “golurilor” din stratul superficial este de circa 2-3 ori mai mare decât în materialul de bază în cazul metalelor, iar în cazul polimerilor stratul superficial are o masă moleculară de 2...4 ori mai mică decât a materialului de bază. Ca atare, rezistența stratului superficial este influențată de rezistența unei “legături”, determinată pe baza energiei de activare ( $U$ ) și de numărul real al acestor “legături”.

Potrivit teoriei lui Frankel, trecerea unui atom de metal lichid, topit din starea temporară de echilibru în altă stare se face pe baza evaporizării și condensării. În acest caz timpul de “staționare” ( $t$ ) se poate determina cu o expresie de forma Arrhenius

$$t = t_0 \exp\left(\frac{U}{kT}\right)$$

unde  $k$  este constanta lui Boltzman,  $t_0$  – timpul de oscilație proprie,  $T$  – temperatura locală,  $U$  – energia de activare,

$$U = U_0 + \gamma p_r$$

depinde de natura materialului ( $U_0$ ), de geometria rugozităților ce formează “corpul terț” ( $\gamma$ ) și de presiunea reală de contact ( $p_r$ ).

Rezistența adeziunii se consideră proporțională cu timpul de “staționare”

$$\tau = a_0 t = a_0 t_0 \exp\left(\frac{U}{kT}\right) = a_0 t_0 \exp\left(\frac{U_0 + \gamma p_r}{kT}\right) \approx a_0 t_0 \left(1 + \frac{U_0}{kT} + \frac{\gamma p_r}{kT}\right) = \tau_0 + \beta p_r$$

unde  $\tau_0 = a_0 t_0 + a_0 t_0 \frac{U_0}{kT}$  este rezistența specifică moleculară a materialului,  $\beta = a_0 t_0 \frac{\gamma}{kT}$  - piezocoeeficient caracteristic “corpului terț”, format în zona de frecare.

Pentru multe materiale (metale și polimeri) în regim uscat  $\beta=0,02-0,15$ . Pentru cupla de frecare metal-metal fără lubrifiant  $\tau_0=2..3 \text{ MPa}$ , iar cu lubrifiant  $\tau_0=1..1,5 \text{ MPa}$ . Pentru cupla polimer  $\tau_0=0,2-0,5 \text{ MPa}$ .

Considerând că “legăturile” au loc numai pe aria reală de contact ( $A_r$ ), se deduce componenta moleculară a coeficientului de frecare ( $\mu_a$ ).

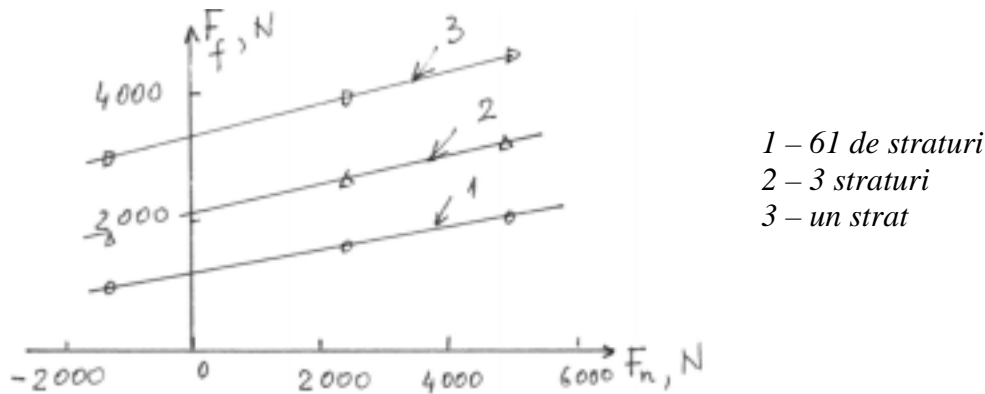
$$\mu_a = \frac{F_t}{F_n} = \frac{\tau A_r}{p_r A_r} = \frac{\tau_0}{p_r} + \beta.$$

Mărimile  $\tau_0$  și  $\beta$  se pot determina experimental pe standuri specializate.

Material	$\tau_0$ , N/mm <sup>2</sup>	$\beta$	Material	$\tau_0$ , N/mm <sup>2</sup>	$\beta$
Vanadiu	18,0	0,250	Argint	65,0	0,090
Crom	50,0	0,240	Aluminiu	30,0	0,043
Beriliu	4,5	0,250	Zinc	80,0	0,020
Platină	95,0	0,100	Cositor	12,5	0,012
Cupru	110	0,110	Plumb	9,0	0,014



Componenta moleculară ( $\mu_a$ ) poate fi evidențiată și pentru regimul de frecare limită. Mărimile  $\tau_o$  și  $\beta$  depind de natura stratului din zona de frecare și de materialul suprafeței. De exemplu, pentru contactul unei epruvete din sticlă pe parafină, s-a constatat că forța de frecare ( $F_f$ ) depinde de numărul straturilor de săpun de calciu depus pe sticlă



$$F_f = \mu F_n = \left( \frac{\tau_o}{p_r} + \beta \right) F_n = \frac{\tau_o}{p_r} F_n + \beta F_n = \tau_o A_r + \beta F_n = F_{f_0} + \beta F_n,$$

$F_{f_0}$  fiind forța moleculară ( $\tau_o A_r$ ) dependentă semnificativ de numărul straturilor de pe suprafață.

Un oțel de scule cu patru lichide diferite are  $\tau_o = 1 \dots 16,5$  MPa ( $\text{N/mm}^2$ ) și  $\beta = 0,04 \dots 0,11$ ; un bronz cu aceleași patru lichide are  $\tau_o = 0,5 \dots 7$  MPa și  $\beta = 0,03 \dots 0,6$ .

Cunoașterea mărimilor moleculare  $\tau_o$  și  $\beta$ , pentru anumite condiții de lucru și de calitate a suprafeței de frecare pentru care se poate determina presiunea reală ( $p_r$ ), permite calculul analitic al componentei moleculare a coeficientului de frecare ( $\mu_a$ ).

### b) Componenta mecanică a frecării

Un parametru important ce caracterizează deformația mecanică a rugozităților este raportul  $\frac{\delta}{R}$  ( $\delta$  adâncimea de penetrare a rugozităților,  $R$  – raza de curbură a rugozităților modelate sub de sferă). Proprietățile reologice ale materialelor, și-n special ale stratului format în zona de contact (corpul terț), determină rezistența în direcția de mișcare relativă. Comportarea la frecare a materialelor se apreciază prin tensiunile de curgere la tracțiune simplă ( $\sigma_c$ ), forfecare simplă ( $\tau_c$ ), elasticitate după diferite direcții ( $E, G$ ), contracție transversală (coeficientul Poisson,  $\nu$ ), frecarea internă evaluată, de obicei, prin vâscozitate sau prin coeficientul pierderilor prin histerezis  $\alpha_h$ .

Se analizează câteva cazuri simple:

#### 1) Contactul unei singure rugozități

##### - Deformație plastică

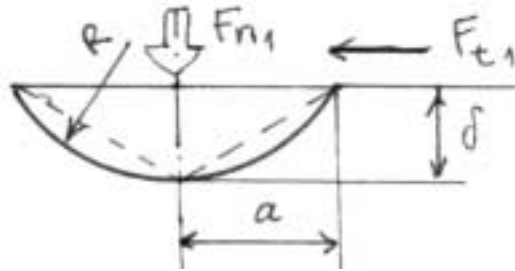
Fie o rugozitate perfect rigidă de formă sferică (raza  $R$ ) care deformează plastic o suprafață plană.

Dacă sub o anumită forță normală  $F_{n1}$ , rugozitatea deformează suportul cu penetrație  $\delta$ , atunci se poate determina aria pe direcția de mișcare  $A_t = 2 \frac{1}{2} a \delta = a \delta$  (aria triunghiului).

Forța de rezistență a materialului deformat plastic va fi:

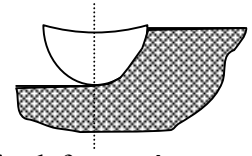
$$F_{tl} = \sigma_t A_t = \sigma_t a \delta,$$

unde  $\sigma_t$  este tensiunea normală de înlăturare a materialului de pe direcția de direcție de mișcare.



Sarcina normală  $F_{n1}$  ce deformează plastic suprafața plană este:

$$F_{n1} = \sigma_n A_n = \sigma_n \frac{\pi a^2}{2}$$



( $\frac{1}{2}$  ține seama că materialul deja deformat în partea din spate a sferei nu mai este portant).

Pentru un material izotrop și omogen ( $\sigma_n = \sigma_t$ ) rezultă, prin definiție, coeficientul de frecare (componenta mecanică  $\mu_m$ ):

$$\mu_m = \frac{F_{tl}}{F_{n1}} = \frac{2\sigma_t a \delta}{\pi \sigma_n a^2} = \frac{2\delta}{\pi a}.$$

Pentru deformații  $\delta$  mici se poate exprima  $a^2 = R^2 - (R - \delta)^2 = 2R\delta - \delta^2 \approx 2R\delta$ , deci  $a \approx \sqrt{2R\delta}$ .

Deci 
$$\mu_m = \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\sqrt{2R\delta}} = 0,47 \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$
 Un calcul mai exact conduce la

$$\mu_m = 0,55 \sqrt{\frac{\delta}{R}} \approx \frac{0,31}{R} \left( \frac{F_{n1}}{c\sigma_c} \right)^{1/2}$$

unde  $c\sigma_c \approx HB$ ,  $c$  – coeficient ce ține seama de ipoteza de curgere și de forma rugozităților,  $c \approx 3$ ;  $\sigma_c$  – tensiunea de curgere a materialului,  $HB$  – duritatea.

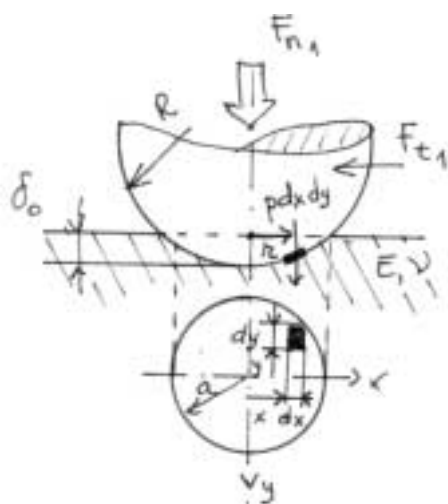
- Forța normală:  $F_{n1} = \frac{\pi a^2}{2} \sigma_n = \pi R \delta \sigma_n = \pi R \delta c \sigma_c \approx \pi R \delta HB.$

- Forța tangențială necesară deplasării sferei:

$$F_{tl} = \mu_m F_{n1} = 0,55 \sqrt{\frac{\delta}{R}} \pi R \delta c \sigma_c = 0,55 R^{1/2} \delta^{3/2} c \sigma_c \approx 0,55 R^{1/2} \delta^{3/2} HB.$$

**- Deformație elastică:**

O sferă rigidă de rază  $R$  în contact cu un plan elastic sub acțiunea sarcinii normale  $F_{n1}$ . Elementele geometrice ale contactului elastic se determină cu relațiile lui Hertz:



$$a = \left( \frac{3F_{n1}R}{4E^*} \right)^{1/3}; \quad \delta = \left( \frac{9F_{n1}^2}{16RE^*2} \right)^{1/3};$$

$$p = p_0 \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2};$$

$$p_0 = \left( \frac{6F_{n1}E^*2}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}$$

$$p_m = \frac{2}{3} p_0; \quad E^* = \frac{E}{1 - \nu_1^2}$$

Într-un punct oarecare de pe suprafața de contact

(x,y), deformația  $\delta$  va fi:

$$\delta = \delta_0 - \frac{r^2}{2R},$$

unde  $r^2 = x^2 + y^2$ . Variația deformației în punctul (x,y) în direcția de alunecare x este

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = -\frac{x}{R}$$

Lucrul mecanic elementar, specific consumat de sferă este

$$dL = -p dx dy \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{x}{R} p dx dy$$

Înlocuind presiunea  $p = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}}$  și integrând între limitele  $x=0$  până la

$x = \sqrt{a^2 - y^2}$  și  $y=-a$  până la  $y=a$ , rezultă

$$L_m = \frac{1}{R} \iint p x dx dy = \frac{3}{16} \left( \frac{3}{4} \frac{F_{nl}^4}{E^* R^2} \right)^{1/3}$$

Ținând seama că o parte din acest lucru mecanic unitar este cedat sub formă elastică, iar cealaltă parte ( $\alpha_{hv}$ ) este pierdută prin histerezis, rezultă că forța necesară translatareii sferei este  $F_{tl} = \alpha_{hv} L_m$  ( $\alpha_{hv}$  fiind coeficientul volumic al pierderii prin histerezis  $\alpha_{hv} \approx 2,2 \alpha_h$ ,  $\alpha_h$  – coeficientul pierderii prin histerezis al materialului, determinat experimental pentru solicitarea simplă de întindere-compresiune).

Deci,

$$\mu_m = \frac{F_{tl}}{F_{nl}} = \frac{\alpha_{hv} L_m}{F_{nl}} = \alpha_{hv} \frac{3}{16} \left( \frac{3}{4} \frac{F_{nl}}{E^* R^2} \right)^{1/3} = 0,19 \alpha_{hv} \left( \frac{p_0}{E^*} \right) = 0,66 \alpha_h \left( \frac{p_0}{E^*} \right)$$

## 2) Contactul mai multor rugozități (contactul multiplu)

Prezența mai multor rugozități pe suprafața de frecare impune luarea în considerație a aspectelor aleatoare ale geometriei rugozității (înălțime, pas, rază de curbură).

Se apreciază că regimul termic în procesul de alunecare este stabilizat, astfel că proprietățile fizico-mecanice ale rugozităților se mențin constante. Forța tangențială necesară deformării mecanice a asperităților pe direcția de alunecare ( $F_{tm}$ ) (componenta mecanică a forței de frecare) se obține prin însumarea forțelor elementare ce apar pe cele  $n$  asperități ce se găsesc în contact ca urmare a sarcinii normale  $F_n$

$$F_{tm} = \int_0^n F_{ti} dn,$$

în care  $F_{ti}$  este forța tangențială necesară deformării asperității  $i$  și depinde de starea de deformație și secțiunea asperității  $i$  la nivelul corespunzător deformării sub sarcina normală.

Se explicitează această relație pentru cazul rugozităților sferice cu raza constantă a înălțimii aleatoare.

În cazul contactului unei suprafețe rugoase cu toate rugozitățile sferice de aceeași rază  $R$  și înălțimi diferite cu o suprafață plană ideală, se găsesc  $n$  asperități. Dacă legea de dispunere a

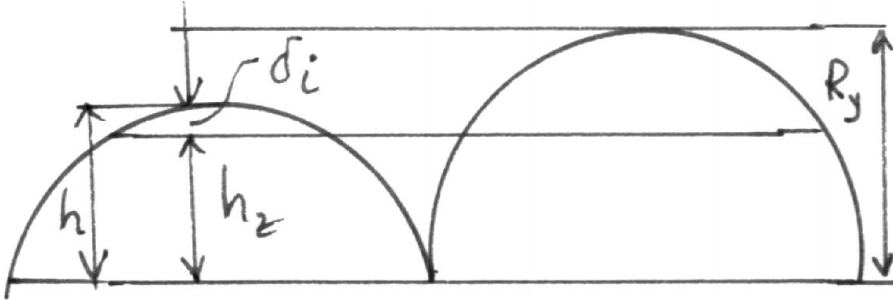
înălțimii rugozității este  $f(z) = \frac{n}{n_0}$  ( $n_0$  – numărul total de rugozități de pe suprafața de referință) se

poate scrie

$$dn = n_o f'(z) dz$$

- Pentru distribuția polinomială a înălțimii rugozității

$$f(z) = tz^s, \quad f'(z) = tsz^{s-1}$$



și contactul plastic

$$F_{ti} = 0,55\pi R^{1/2} \delta_i^{3/2} c\sigma_c = 0,55\pi R^{1/2} R_y (\varepsilon - z)^{3/2} c\sigma_c$$

în care  $R_y$  este înălțimea maximă a rugozității,  $\varepsilon$  - înălțimea relativă a uneia dintre rugozități

$$\left( \varepsilon = \frac{h}{R_y} \right).$$

$$s = v - 1, \quad n_o t = \frac{bvA_n}{2\pi RR_y}$$

unde  $t, s$  - constante determinate pe baza parametrilor  $b, v$  ai curbei de portanță,  $A_n$  fiind aria nominală de contact (v. 4.7.3).

$$\text{Deci, } dn = \frac{A_n bv(v-1)}{2\pi RR_y} z^{v-2} dz$$

Înlocuind în integrală rezultă

$$F_{tm} = \int_0^n F_{ti} dn = \frac{0,55c\sigma_c b(v-1)vA_n R^{1/2} \varepsilon^{\frac{2v+1}{2}}}{2R^{-1/2}} \int_0^1 (1-y)^{3/2} y^{v-2} dy,$$

în care  $y = \frac{z}{\varepsilon}$ .

Dacă se ține seama de relația dintre  $F_n$  și  $\varepsilon$  (v.4.7.3),

$$F_n = \frac{4}{3} E^* n_o t s R^{1/2} R_y^{3/2} \varepsilon^{\frac{5}{2}} B\left(\frac{5}{2}; s\right) = \frac{4}{3} E^* \frac{bvA_n (v-1) R^{1/2} R_y^{3/2}}{2\pi RR_y} \varepsilon^{\frac{2v+1}{2}} B\left(\frac{5}{2}; v-1\right)$$

cu  $B\left(\frac{5}{2}; v-1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(v-1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)}$ , funcția betta ( $\Gamma(x)$  - funcția gamma), se deduce

$$\mu_{mp} = \frac{F_{tm}}{F_n} = \frac{1,65\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{p_n}{c\sigma_c b}\right)^{1/2v} \sqrt{\frac{R_y}{R}} = k_{rp} \left(\frac{p_n}{c\sigma_c}\right)^a = k_{1rp} \sqrt{\Delta_r} \left(\frac{p_n}{c\sigma_c}\right)^a$$

în care  $p_n = \frac{F_n}{A_n}$  este presiunea nominală de contact;  $k_{rp}$  – constantă a microgeometriei

$$\left( \frac{1,65\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\frac{R_y}{R}} \frac{1}{b^{1/2v}} \right); \quad a = \frac{1}{2v} = \text{constantă.}$$

- Pentru distribuția polinomială a înălțimii rugozității și contact elastic, se deduce:

$$\mu_{me} = \frac{1,1\alpha_h}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(v+2)} k^{1/2v} \Delta_r^{2v+1} \left(\frac{p_n}{E^*}\right)^{\frac{1}{2v+1}} = k_{re} \alpha_h \Delta_r^{2v+1} \left(\frac{p_n}{E^*}\right)^{a_e}$$

în care  $k_v = \left[ \frac{3\pi}{4v(v-1)} \frac{\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(v-1)} \right]^{2v+1}$ ,  $\alpha_h$  – coeficientul pierderii prin histerezis al

materialului;  $\Delta_r = \frac{R_y}{Rb^{1/v}}$  – parametrul complex al microgeometriei;  $k_{re}$  – constantă a

microgeometriei pentru deformații elastice  $k_{re} = \frac{1,1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(v+2)} k_v^{1/2v}$ ;  $a_e = \frac{1}{2v+1}$ .

### c) Coeficientul de frecare global

În procesul de frecare, conform teoriei molecular-mecanice, forța necesară pe direcția de mișcare se compune dintr-o forță pentru învingerea adeziunilor molecular și una pentru realizarea deformațiilor. cu această precizare, coeficientul de frecare are expresia:

$$\mu = \mu_a + \mu_m = \frac{\tau_o}{p_r} + \beta + k_p \sqrt{\frac{\delta_o}{R}} - \text{pentru contactul plastic, constanta } k_p=0,55;$$

$$\mu = \mu_a + \mu_m = \frac{\tau_o}{p_r} + \beta + k_e \sqrt{\frac{\delta_o}{R}} - \text{pentru contactul elastic constanta } k_e=4,1\alpha_h.$$

Dacă se ține seama de expresiile presiunilor reale  $p_r$  și ale raportului  $\frac{\delta_o}{R}$  se deduce:

- pentru contactul plastic:

$$\mu = \frac{\tau_o}{c\sigma_c} + \beta + \frac{0,31}{R} \left(\frac{F_n}{c\sigma_c}\right)^{1/2} = \frac{\tau_o}{c\sigma_c} + \beta + k_{rp} \left(\frac{p_n}{c\sigma_c}\right)^a$$

- pentru contactul elastic:

$$\mu = k_1 \frac{\tau_o}{E^*} \frac{-1}{\left(\frac{p_n}{E^*}\right)^{2v+1}} \Delta_r^{v/(2v+1)} + \beta + k_2 \alpha_h \left(\frac{p_n}{E^*}\right)^{\frac{1}{2v+1}} \Delta_r^{\frac{v}{2v+1}}$$

$$\text{în care } k_1 = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/2v} k_v} \right)^{2v+1}, \quad k_v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)}, \quad k_2 = 10,9 \left( \frac{2\sqrt{\pi}}{k_v} \right)^{2v+1} \frac{\Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(v+2)}.$$

Din analiza detaliată a coeficientului de frecare se pot face următoarele aprecieri:

1. Pentru **contactul plastic**:

- coeficientul de frecare crește cu încărcarea, evaluată prin presiunea nominală  $p_n$ ;
- scade cu tensiunea de curgere  $\sigma_c$  ( $c\sigma_c \approx H$  – duritatea materialului);

- crește cu parametrul global al rugozității,  $\Delta_r = \frac{R_y}{Rb^{1/v}}$ .

2. Pentru **contactul elastic**:

- pentru o microgeometrie dată și care se menține constantă în timpul funcționării – ipoteză valabilă numai pentru un timp foarte scurt de funcționare – coeficientul de frecare are un minim cu

încărcarea, evaluată prin raportul  $\left( \frac{p_n}{E^*} \right)^{2v+1} = x$ ,  $\mu = \frac{c_1}{x} + \beta + c_2 x$ ,  $\left( \frac{p_n}{E^*} \right)_{\text{optim}} = \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{\frac{2v+1}{2}}$  și

$\mu = 2\sqrt{c_1 c_2} + \beta$  cu următoarele expresii ale constantelor  $c_1, c_2$ :

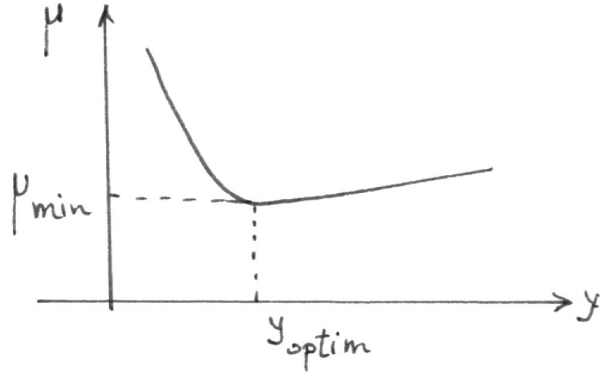
$$c_1 = \frac{\frac{\tau_o}{E^*}}{\Delta_r^{2v+1}} \quad \text{și} \quad c_2 = k_2 \alpha_h \Delta_r^{\frac{v}{2v+1}}$$

- în ipoteza autoadaptării sistemelor tribologice, ipoteză verificată pentru toate cuplele biologice cercetate și pentru unele cuple mecanice, funcționarea decurge către o minimizare a coeficientului de frecare pentru condiții relativ constante ale încărcării. În această ipoteză, coeficientul de frecare devine minim prin modificarea microgeometriei, rezultând un parametru

complex  $\Delta_r$  optim,  $\left( \Delta_r^{\frac{v}{2v+1}} = y \right)$ ,

$$\mu = \frac{c_1'}{y} + \beta + c_2' y, \quad (\Delta_r)_{\text{optim}} = \left( \frac{c_1'}{c_2'} \right)^{\frac{2\nu+1}{2\nu}} \quad \text{și} \quad \mu_m = 2\sqrt{c_1' c_2'} + \beta, \quad \text{cu următoarele expresii ale}$$

constantelor



$$c_1' = k_1 \frac{\tau_o}{E^*} \frac{1}{\left( \frac{p_n}{E^*} \right)^{2\nu+1}}; \quad c_2' = k_2 \alpha_h \left( \frac{p_n}{E^*} \right)^{\frac{1}{2\nu+1}}.$$