

4. ELEMENTE PRIVIND CALCULUL TENSIUNILOR ȘI ARIEI DE CONTACT

4.1. Mișcare și forțe în punctul de contact [A6, A14]

4.1.1. Sistem de referință

Suprafețele solide pot fi:

- {
 - conforme* - se "potrivesc" exact sau se pot deforma împreună; exemple: lagăre axiale, radiale, ambreiaje;
 - nonconforme* - au profile diferite:
 - punctuale,
 - liniare

exemple: rulmenți cu bile, role (conform - într-o direcție, și neconform - în direcție perpendiculară).

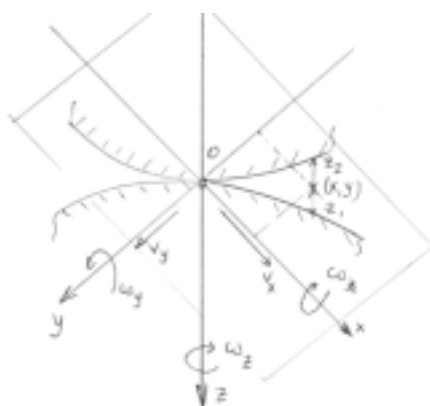


Fig. 4.1.1

Planul tangent $x - y =$ plan osculator (fig.4.1.1)

Direcțiile x și y să coincidă, pe cât posibil, cu axele de simetrie ale suprafețelor.

De ex: pentru contactul a doi cilindri cu

axele paralele, axa oy se alege în lungul axelor paralele, iar ox perpendiculară.

Pentru profile nedeformate,

$$z_1 = f_1(x, y)$$

$$z_2 = f_2(x, y)$$

Distanța de separare înainte de încărcare:

$$h = z_1 + z_2 = f(x, y) \quad (4.1.1)$$

4.1.2. Mișcarea relativă a suprafețelor - alunecare, rostogolire și spin (pivotare)

Mișcarea corpurilor solide - pentru un timp foarte scurt - instantanee.

Punct de referință - punctul de contact 0.

Corpul 1 are viteza liniară V_1 și viteza unghiulară Ω_1 .

Corpul 2 are viteza liniară V_2 și viteza unghiulară Ω_2 .

Sistemul de referință are viteza liniară V_0 și viteza unghiulară Ω_0 , fiind orientate relativ față de planele tangent și normal ale punctului de contact.

Cu aceste precizări \Rightarrow vitezele liniare și unghiulare ale corpurilor față de 0:

$$\begin{cases} v_1 = V_1 - V_0 \\ v_2 = V_2 - V_0 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \Omega_1 - \Omega_0 \\ \omega_2 = \Omega_2 - \Omega_0 \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Se descompun aceste viteze în sistemul cartezian. Dacă contactul este continuu, suprafețele nu de separă niciodată, vitezele în lungul normalei de contact sunt egale

$$V_{z1} = V_{z2} = V_{z0} \quad \text{și} \quad v_{z1} = v_{z2} = 0 \quad (4.1.4)$$

Viteza de alunecare relativă în punctul 0:

$$\Delta v = v_1 - v_2 = V_1 - V_2, \quad \text{cu componentele}$$

$$\begin{cases} \Delta v_x = v_{x1} - v_{x2} \\ \Delta v_y = v_{y1} - v_{y2} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Rostogolirea este definită ca viteză unghiulară relativă între corpuri în lungul unei axe din planul tangent:

$$\begin{cases} \Delta \omega_x = \omega_{x1} - \omega_{x2} = \Omega_{x1} - \Omega_{x2} \\ \Delta \omega_y = \omega_{y1} - \omega_{y2} = \Omega_{y1} - \Omega_{y2} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Mișcarea de spin (pivotare) este definită ca viteză unghiulară relativă în jurul normalei comune:

$$\Delta \omega_z = \omega_{z1} - \omega_{z2} = \Omega_{z1} - \Omega_{z2} \quad (4.1.7)$$

Orice mișcare trebuie să respecte condiția contactului continuu (4.1.4) și poate fi privită ca o combinație de alunecare, rostogolire și spin.

Spre exemplu, roata autovehiculului - normal este rulare - când este pe o curbă apare și spin; dacă derapează - alunecă fără rostogolire.

4.1.3. Transmiterea forțelor în punctul de contact

Forța normală P acționează în lungul normalie comune - este o forță de compresiune (fig. 4.1.2).

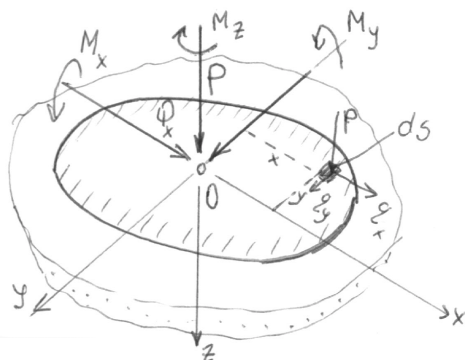
Forța tangențială Q - în planul tangent - mărimea trebuie să fie mai mică sau la limită egală cu forța de frecare limită

$$Q \leq \mu P \quad (4.1.8)$$

unde μ este coeficientul limită de frecare.

Q se descompune după două direcții paralele cu axele Q_x, Q_y .

Pentru alunecare pură forțele tangențiale sunt la limită egale cu forțele de frecare și de sens invers mișcării



$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\Delta v_x}{|\Delta v_x|} \mu P \\ Q_y &= -\frac{\Delta v_y}{|\Delta v_y|} \mu P \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Fig. 4.1.2

Forța transmisă în punctul de contact are ca efect modificarea contactului, transformându-l într-o suprafață de mărime finită.

Ca atare, devine posibilă transmiterea unui moment adițional la forță. Corespondențele acestui moment M_x și M_y sunt definite ca momente de rostogolire. Ele produc o rezistență la mișcarea de rostogolire, numită frecare de rostogolire și, în general, sunt mici și uneori se neglijează.

Cea de-a treia componentă M_z , care acționează după normala comună, se opune mișcării de spin și se numește *moment de spin*. Când spinul acompaniază rostogolirea, energia disipată prin spin și rostogolire se numește *rezistență la rulare*.

La acest punct este potrivită denumirea de *rostogolire liberă* (inertțială). Se va folosi acest termen pentru a descrie mișcarea de rostogolire în care spinul este absent și unde forța tangențială Q în punctul de contact este zero.

Aceasta este condiția de oprire și pornire a roților vehiculelor. Dacă rezistența de rulare și frecarea în lagăre sunt neglijate; este în contrast cu roțile conducătoare și roțile de frână care transmit forțe tangențiale sesizabile prin punctele de contact cu solul sau șina.

4.1.4. Tracțiuni de suprafață

Forțele și momentele sunt transmise prin suprafața de contact și pe suprafață.

Tracțiunea normală (presiune) - notată p și tracțiunea tangențială (datorată frecării) - notată q , sunt considerate pozitive (fig. 4.1.2).

Condițiile de echilibru:

$$P = \int_S p ds \quad (4.1.10)$$

$$Q_x = \int_S q_x ds, \quad Q_y = \int_S q_y ds \quad (4.1.11)$$

Pentru contactele neconforme (inclusiv cilindrii cu axe paralele), suprafața de contact în planul x, y se consideră plană, deci:

$$M_x = \int_S p y ds, \quad M_y = \int_S p x ds \quad (4.1.12)$$

și $M_z = \int_S (q_y x - q_x y) ds$

4.1.5. Exemple

1. Angrenaje evolventice

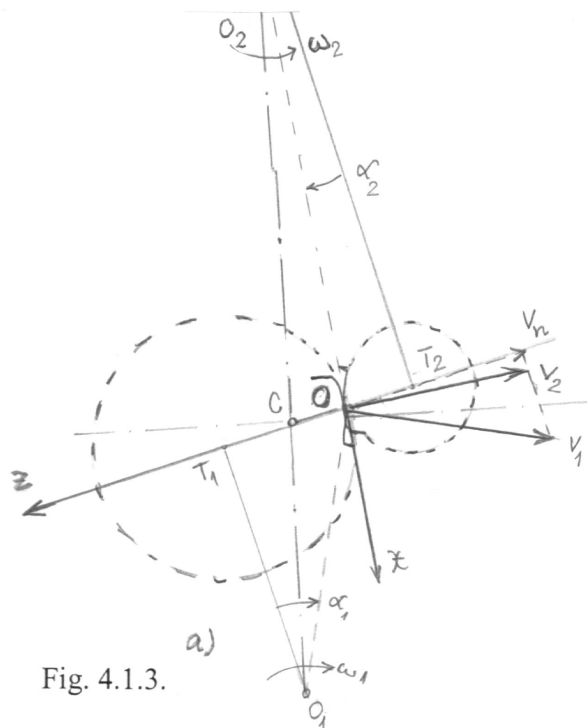


Fig. 4.1.3.

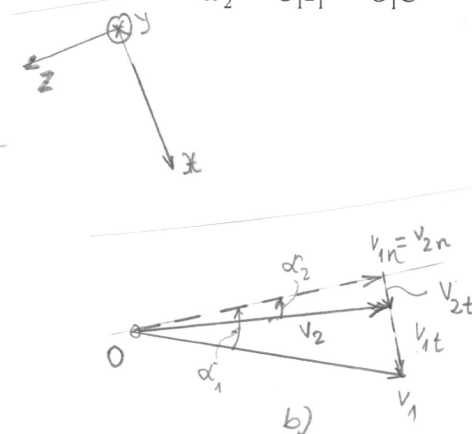
Condiția continuității contactului

$$V_1 \cos \alpha_1 = V_2 \cos \alpha_2 = V_{n0}$$

sau

$$\omega_1(O_1T_1) = \omega_2(O_2T_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2T_2}{O_1T_1} = \frac{O_2C}{O_1C} \quad (4.1.14)$$



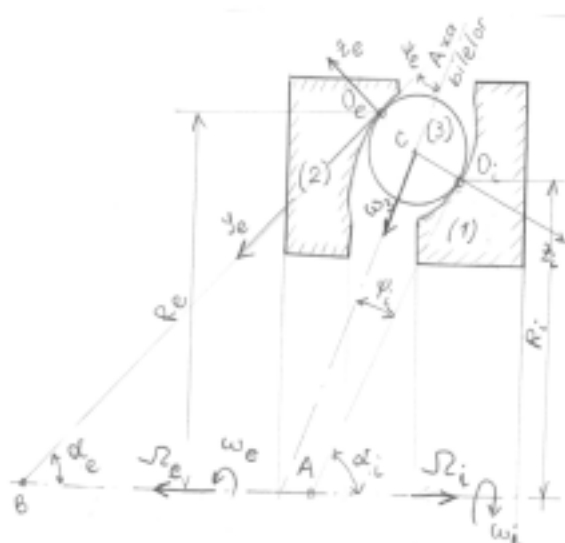
Viteza unghiulară de rostogolire în jurul axei y

$$\Delta\omega = -(\omega_1 + \omega_2) \quad (4.1.15)$$

Viteza de alunecare

$$\Delta v = v_1 - v_2 = v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2 = \omega_1(OT_1) - \omega_2(OT_2) = (\omega_1 + \omega_2)OC \quad (4.1.16)$$

2. Rulmenți axial - radial cu bile



Inelul interior, inelul exterior și colivia (bilele cu centrul C) se rotesc în jurul axei rulmentului cu vitezele unghiulare Ω_i , Ω_o și, respectiv, Ω_c .

Punctele de contact O_i , $O_o \Rightarrow$ axele

$$(z_i, x_i, y_i), (z_o, y_o, y_o)$$

Vitezele în punctele de contact

$$\omega_i = \Omega_i - \Omega_c, \quad \omega_o = \Omega_o - \Omega_c$$

Fără alunecare în $O_i \Rightarrow v_{z3} = v_{x1}$;

$$\omega_3 r \cos \psi_i = \omega_1 R_i; \quad r = \text{raza bilei.}$$

Similar în O_o .

$$\omega_3 r \cos \psi_o = \omega_2 R_o$$

Fig. 4.1.4.

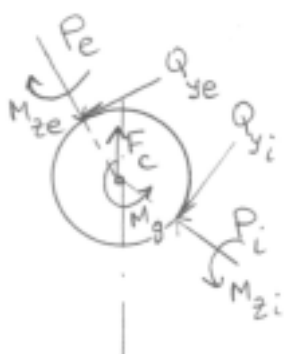
Eliminând $\omega_3 \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_i \cos \psi_o}{R_o \cos \psi_i} \quad (4.1.17)$

Dacă punctele de contact O_i și O_o sunt diametral opuse, unghiurile de contact α_i și α_o sunt egale, astfel că $\psi_i = \psi_o$.

Examinăm pivotarea (spinul) în O_i .

Viteza unghiulară de spin

$$(\Delta\omega_z)_i = \omega_{z1} - \omega_{z3} = \omega_1 \sin \alpha_i - \omega_3 \sin \psi_i = \omega_1 \frac{R_i}{r} \left(\frac{r}{AO_i} - \text{tg} \psi_i \right) \quad (4.1.18)$$



Pivotarea lipsește dacă axa bilelor (colivia) intersectează axa rulmenților în punctul A . Analog pentru punctul O_o .

Pentru absența spinului în ambele puncte de contact, cele două tangente $O_i y_i$ și $O_o y_o$ sunt paralele cu axa rulmentului (rulment radial simplu) sau punctele O_i și O_o sunt dispuse astfel încât $O_i y_i$ și $O_o y_o$ intersectează axa rulmentului într-un singur punct (punct comun) - cazul rulmentului cu role conice.

Fig. 4.1.5.

Sistemul de forțe - se consideră rulmentul încărcat cu o forță pur axială și, deci, fiecare bilă este identic încărcată.

Fiecare contact transmite forța normală $P_{i,o}$ și forța tangențială $(Q_y)_{i,o}$.

Presiunea și frecarea între bilă și colivie introduc forțe tangențiale mici și direcția x în punctele 0_i și 0_o și sunt neglijate în acest exemplu.

Momentul de frecare de rostogolire $(M_y)_{i,o}$ va fi neglijat, dar momentul de spin $(M_z)_{i,o}$ joacă un rol important în determinarea direcției axei de rotație a bilei. La turații mari ale bilei apar forțe centrifuge apreciabile și un moment giroscopic M_g .

Se consideră bilele în echilibru; făcând ecuația de momente în jurul liniei 0_i0_o , se deduce:

$$(M_z)_i = (M_z)_o \quad (4.1.19)$$

Dar pozițiile punctelor de contact 0_i și 0_o și direcția axei bilei ψ_i nu sunt determinate static. De aceea, este necesară și luarea în considerare a forțelor tangențiale $(Q_y)_{i,o}$ și momentului de spin $(M_z)_{i,o}$ din mișcarea de rostogolire și spin a punctelor 0_i și 0_o .

4.2. Contactul normal al solidelor elastice (teoria lui Hertz)

4.2.1. Geometria suprafețelor netede non-conforme

Se cer următoarele:

- geometria suprafeței de contact;
- mărimea și distribuția tracțiunilor normale, tangențiale transmise în lungul contactului;
- tensiunile și deformațiile în ambele corpuri și în apropierea regiunii de contact.

Se consideră corpurile atât la scară micro cât și macro, ca netede, profilele suprafețelor sunt continue - axele z sunt pozitive - către interiorul corpurilor.

Profilele în apropierea originii pot fi aproximate cu expresiile:

$$z_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 xy + \dots \quad (4.2.1)$$

neglijând termenii de ordin superior.

Alegerea orientării axelor x și y , x_1 și y_1 , se face astfel încât ca xy să se reducă (≈ 0), și (4.2.1) poate fi scrisă:

$$z_1 = \frac{1}{2R_1'} x_1^2 + \frac{1}{2R_1''} y_1^2 \quad (4.2.2.a)$$

unde R_1' și R_1'' sunt razele principale de curbură ale suprafeței în origine. Aceste raze se aleg astfel încât curbură să fie maximă și minimă pentru toate punctele posibile în secțiunea transversală a profilului.

Dacă secțiunea transversală este simetrică, atunci există o singură rază principală. Similar, se scrie pentru a doua suprafață:

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2R_2'} x_2^2 + \frac{1}{2R_2''} y_2^2 \right) \quad (4.2.2.b)$$

Separarea între două suprafețe este $h = z_1 - z_2$.

În același sistem de axe $x, y \Rightarrow h = Ax^2 + By^2 + Cxy$

La o alegerea a axelor astfel încât $C = 0$,

$$h = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'} x^2 + \frac{1}{2R''} y^2 \quad (4.2.3)$$

unde A și B sunt constante pozitive, R' și R'' sunt definite ca raze principale relative de curbură. Dacă axele principale de curbură ale fiecărei suprafețe x_1 și x_2 sunt înclinate cu unghiul α , \Rightarrow

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} \right) \quad (4.2.4)$$

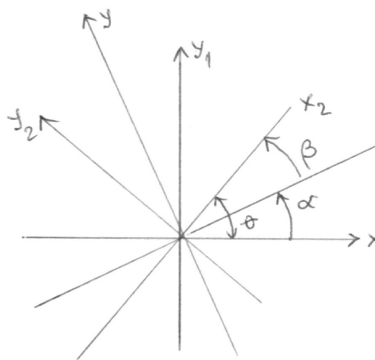
și

$$B - A = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right) \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right) \cos 2\alpha \right\}^{1/2} \quad (4.2.5)$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right) \sin 2\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right) \sin 2\alpha .$$

Legătura între α și β este astfel încât $C = 0$.

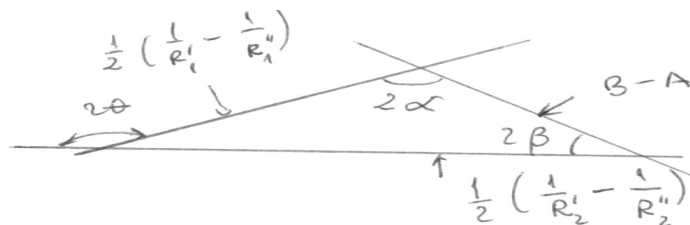
$$\Rightarrow B - A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right) \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right) \cos 2\beta$$



Se introduce raza echivalentă

$$R_e = (R'R'')^{1/2} = \frac{1}{2} (AB)^{-1/2} ;$$

$(B/A)^{1/2} = (R'/R'')^{1/2} = a/b =$ raportul semi-axelor elipsei de contact.

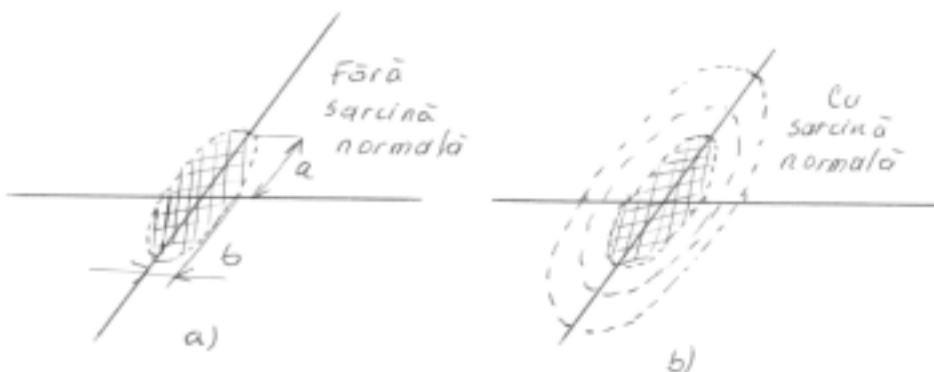


Exemple:

Pentru doi cilindri cu aceeași rază R ($R_1' = R = R_1''$, $R_1' = R_1'' = \infty$) și încrucișați cu unghiul $\alpha = 45^\circ \Rightarrow A + B = 1/R$ și $B - A = (1/\sqrt{2}R)$ și

$$A = (1 - 1/\sqrt{2})/(2R) \text{ și } B = (1 + 1/\sqrt{2})/(2R) ; R' = 1/(2A) = 3,42 R \text{ și } R'' = 1/(2B) = 0,585 R.$$

Raza echivalentă $R_e = (R'R'')^{1/2} = \sqrt{2}R$, $(B/A)^{1/2} = 2,41$. Acesta este raportul dintre semiaxa mare și semiaxa mică a elipsei, fig. 4.2.1(a).



Sub sarcină normală de compresiune "punctul" de contact se transformă în arie. Dacă cele două corpuri

sunt solide de revoluție și $R'_1 = R''_2 = R_1$, $R'_1 = R''_2 = R_1$,

$$R'_2 = R''_2 = R_2 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \text{contactul circular centrat în } 0.$$

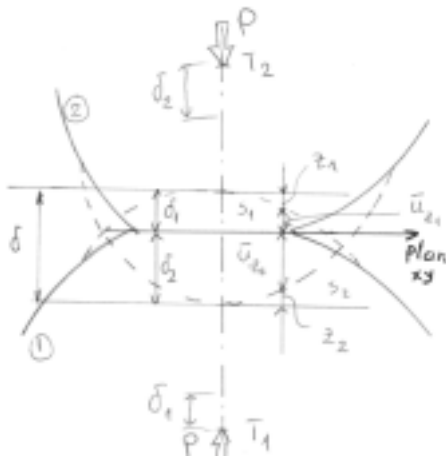
Doi cilindri cu razele R_1 și R_2 și cu axele paralele în lungul axei y , $R'_1 = R_1$, $R''_1 = \infty$, $R'_2 = R_2$, $R''_2 = \infty$ și $\alpha = 0$, $R''_2 = \infty$ și $\alpha = 0$, astfel că

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad B = 0.$$

Pentru doi cilindri cu axele perpendiculare $R'_1 = R_1$, $R''_1 = \infty$, $R'_2 = R_2$,

$R''_2 = \infty$, $\alpha = \pi/2 \Rightarrow A = B = (R/2)^{-1} \Rightarrow$ cerc de contact la fel ca la sfere de aceeași rază R în contact cu un plan ($R'_2 = R''_2 = \infty$).

Se consideră acum deformația sub forța normală P . Două solide cu curbura generală (alese convexe pentru conveniență) - fig. 4.2.2. Înainte de deformație, între două puncte ale suprafeței S_1 ($x_1 y_1 z_1$) și S_2 ($x_2 y_2 z_2$) există h dat de 4.2.3. După deformare, punctele S_1 și S_2 coincid, astfel că



$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} + h = \delta_1 + \delta_2$$

(4.2.6)

Deformațiile \bar{u}_{z1} și \bar{u}_{z2} se consideră pozitive în interiorul fiecărui corp.

Scriind $\delta = \delta_1 + \delta_2$ și utilizând (4.1.3) \Rightarrow

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - h = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (4.2.7)$$

unde x și y sunt coordonate comune punctelor S_1 și S_2 proiectate pe planul

$x - y$.

Dacă S_1 și S_2 sunt în afara contactului

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} > \delta - Ax^2 - By^2 \quad (4.2.8)$$

Pentru rezolvarea problemei, este necesar să se afle distribuția de presiuni între cele două corpuri pe suprafața de contact, astfel ca deplasările normale în zona de contact să satisfacă condițiile (4.2.7) și inecuația (4.2.8) pentru zona din afara contactului.

Hertz a propus ipotezele:

- suprafața de contact este eliptică - observație experimentală pentru interfranjurile de lumină;
- frecarea corp este un semispațiu elastic;
- zona de contact este mică și plană eliptică (elasticitate liniară);
- în zona de contact nu există frecare, ci numai presiuni normale.

Tracțiunea normală este paralelă cu axa Oz și tensiunile tangențiale ce apar ca urmare a celor normale acționează în planul $x - y$.

Notând cu a dimensiunea ariei de contact, raza de curbura relativă R , razele semnificative R_1 și R_2 pentru cele două corpuri și lungimea l , ipotezele lui Hertz sunt:

1. suprafețele sunt continue și non-conforme: $a \ll R$;
2. deformațiile sunt mici: $a \ll R$;
3. fiecare solid poate fi considerat semispațiu elastic: $a \ll R_{1,2}$ $a \ll l$;
4. suprafața fără frecare: $q_x = q_y = 0$.

Problema de elasticitate poate fi acum formulată: distribuția presiunii $p(x, y)$ acționează pe aria S a suprafeței celor două semispații elastice, care va produce deformații normale ale suprafețelor \bar{u}_{z1} și \bar{u}_{z2} , care satisfac ecuația (4.2.7) în interiorul S și (4.2.8) în afara lui S .

4.2.2. Teoria lui Hertz pentru contactul elastic

a) Solide de revoluție

Inițial, un caz simplu al solidului la revoluție: $R'_1 = R''_1 = R_1$ și $R'_2 = R''_2 = R_2$. Aria de contact va fi circulară, având raza a .

Din ecuația (4.2.4) și (4.2.5) este clar că $A = B = \frac{1}{2}(1/R_1 + 1/R_2)$.

Condițiile de frontieră pentru deplasările din interiorul contactului deduse din (4.2.7); se pot scrie:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - (1/2R)r^2 \quad (4.2.9)$$

O distribuție de presiuni care satisface această condiție a fost propusă de Hertz

$$p = p_0 \left\{ 1 - (r/a)^2 \right\}^{1/2}$$

cu deplasarea normală:

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a$$

Presiunea ce acționează pe cel de-al doilea corp este egală cu aceea ce acționează pe primul, scriind:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

și, substituind expresiile \bar{u}_{z1} și \bar{u}_{z2} în (4.2.9) \Rightarrow

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - (1/2R)r^2 \quad (4.2.10)$$

$$\text{Pentru } r=0 \Rightarrow \delta = \pi a p_0 / 2E^*$$

$$r = R \Rightarrow \frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - R^2) = \delta - \frac{1}{2R} \cdot R^2 \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$a = \pi p_0 R / 2E^* \quad \text{și} \quad \delta = \pi a p_0 / 2E^* \quad (4.2.11) \quad (4.2.12)$$

$$\text{Dar} \quad P = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 = p_m \pi a^2 \Rightarrow p_0 = \frac{2}{3} p_m \quad (4.2.13)$$

$$\text{Cunoscând: } P, R \text{ și } E^* \Rightarrow a = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (4.2.14)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} \quad (4.2.15)$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (4.2.16)$$

Înainte ca soluțiile (4.2.15) și (4.2.16) să fie acceptate ca unice, se verifică (4.2.7), dar trebuie să se verifice și (4.2.8).

Substituind soluția generală:

$$\bar{u}_z = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{P_0}{2a} \times \left\{ (2a^2 - r^2) \sin^{-1}(a/r) + R^2(a/r)(1 - a^2/r^2)^{1/2} \right\}, \quad r \geq a$$

și, utilizând (4.2.11), poate fi verificat că distribuția hertziană a presiunii nu este valabilă pentru exteriorul cercului $r = a$.

La o întrebare asupra unicității soluției distribuției de presiune se răspunde prin faptul că această distribuție produce o deplasare uniformă în interiorul cercului de contact.

$$p = p'_0 \left\{ 1 - (r/a)^2 \right\}^{-1/2}$$

Fiecare presiune poate fi adăugată sau scăzută presiunii hertziane, astfel că satisface condiția deplasării (4.2.9). Totuși, presiunea tinde către ∞ în imediata apropiere a zonei încărcate, în maniera penetratorului rigid.

Deci, cele două corpuri elastice, având profilele continui nu pot dezvolta presiuni în afara zonei cercului $r = a$. Pe de altă parte, dacă distribuția de presiuni

$p = p'_0 \left\{ 1 - (r/a)^2 \right\}^{-1/2}$ s-ar scade din presiunea hertziană, tracțiunea normală în interiorul zonei ar fi de întindere și de amplitudine ∞ . În absența adeziunii între cele două suprafețe, suprafețele nu pot susține tensiuni, astfel că ambele tracțiuni pozitive și negative sunt excluse.

Deci, singura distribuție care satisface (4.2.9) este distribuția Hertz și reprezintă soluția unică a problemei.

Tensiunile în interiorul celor două solide, determinate de distribuția de presiuni, au expresiile (4.2.17) și (4.2.18) și sunt prezentate în fig. 4.2.3.

-în interiorul suprafeței de contact

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r / p_0 &= \frac{1-2\nu}{3} (a^2/r^2) \left\{ 1 - (1-r^2/a^2)^{3/2} \right\} - (1-r^2/a^2)^{1/2} \\ \bar{\sigma}_\theta / p_0 &= \frac{1-2\nu}{3} (a^2/r^2) \left\{ 1 - (1-r^2/a^2)^{3/2} \right\} - 2\nu(1-r^2/a^2)^{1/2} \\ \bar{\sigma}_z / p_0 &= (1-r^2/a^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.17)$$

și în exteriorul suprafeței de contact

$$\bar{\sigma}_r / p_0 = -\bar{\sigma}_\theta / p_0 = (1-2\nu)a^2/3r^2 \quad (4.2.18)$$

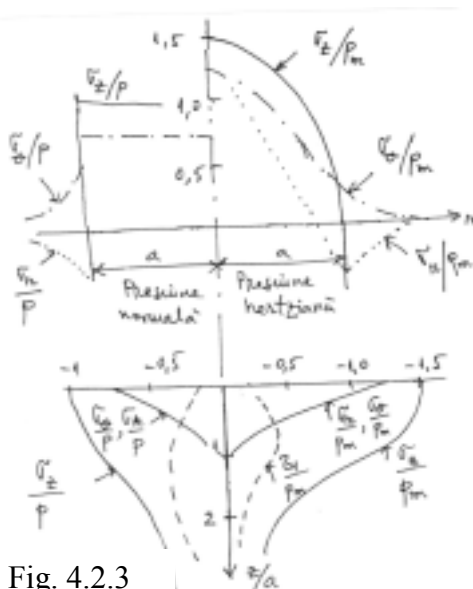


Fig. 4.2.3

Toate tensiunile sunt de compresiune, cu excepția celor de pe muchia de contact la care tensiunile radiale au valoarea maximă $(1 - 2\nu) p_0 / 3$. Aceasta este cea mai mare tensiune de întindere și este determinat pentru fisurarea materialelor casante, când sunt presate în interiorul contactului. În centru, tensiunea radială este de compresiune și are valoare $(1 + 2\nu) p_0 / 2$. Pentru materialele incompresibile ($\nu = 0,5$), tensiunea în centru este hidrostatică. În afara ariei de contact, tensiunile radiale și circumferențiale

sunt egale ca mărime și sunt de întindere și compresiune (ec. 4.2.4).

Expresiile pentru tensiunile de sub suprafață în lungul axei z sunt date de ecuația (4.2.19)

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{\sigma_\theta}{p_0} = -(1+\nu)\left[1 - (z/a)\tan^{-1}(a/z)\right] + \frac{1}{2}(1+z^2/a^2)^{-1} \quad (4.2.19.a)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = \frac{\sigma_\theta}{p_0} = \left[(1+z^2/a^2)^{-1}\right] \quad (4.2.19.b)$$

Ele sunt tensiuni principale și tensiunea tangențială principală $\left(\tau_1 = \frac{1}{2}|\sigma_r - \sigma_z|\right)$ are valoarea $0,31 p_0$ la adâncimea $0,48 a$ (pentru $\nu = 0,3$). Aceasta este tensiunea tangențială maximă și depășește tensiunea tangențială pe muchia de contact $\tau = \frac{1}{2}|\sigma_r - \sigma_\theta| = 0,13 p_0$.

Condițiile de plasticitate se inițiază de sub suprafață. Acest aspect se va analiza în paragraful următor.

b) Profile generale

În cazul general, când separarea este dată de (4.2.3), forma suprafeței de contact nu este cunoscută cu certitudine în avans.

Se consideră, prin urmare, că S are formă eliptică de semiaxe a și b .

Hertz a considerat problema elasticității prin analogie cu potențialul electrostatic. El a notat că o sarcină, a cărei intensitate este dispusă într-o regiune eliptică a suprafeței conductorului, variază cu ordonata unui semielipsoid, produce o variație a potențialului după o suprafață parabolică.

Prin analogie, distribuția de presiuni este data de ecuația

$$p = p_0 \left\{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2\right\}^{1/2}$$

și produce deplasări în interiorul elipsei date de ecuația:

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E} (L - Mx^2 - Ny^2)$$

Pentru ambele corpuri,

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = (L - Mx^2 - Ny^2) / \pi E^* \quad (4.2.25)$$

care satisfac condiția (4.2.7):

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 - By^2$$

$$\text{cu } A = M / \pi E^* = (p_0 / E^*) (b / e^2 a^2) \{K(e) - E(e)\} \quad (4.2.26.a)$$

$$B = N / \pi E^* = (p_0 / E^*) (b / e^2 a^2) \{(a^2 / b^2) E(e) - K(e)\} \quad (4.2.26.b)$$

$$\delta = L / \pi E^* = (p_0 / E^*) b K(e) \quad (4.2.26.c)$$

unde $E(e)$ și $K(e)$ sunt integrale eliptice de argument

$$e = (1 - b^2 / a^2)^{1/2}, \quad b > a$$

Distribuția de presiuni este semi-elipsoidală și de volum cunoscut al elipsoidei

$$P = (2/3) p_0 \pi ab = p_m \pi ab \quad (4.2.27)$$

cu $p_m = (2/3) p_0$ - presiune medie.

Pentru definirea formei și mărimea elipsei de contact, se poate scrie:

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{R'}{r''} \right) = \frac{(a/b)^2 E(e) - K(e)}{K(e) - E(e)} \quad (4.2.28)$$

$$\text{și } (AB)^{1/2} = \frac{1}{2} (1/R'R'')^{1/2} = R_e = \frac{p_0}{E^*} \cdot \frac{b}{a^2 e^2} \left[\left\{ (a/b)^2 E(e) - K(e) \right\} \left\{ K(e) - E(e) \right\} \right]^{1/2} \quad (4.2.29)$$

Se scrie $c = (ab)^{1/2}$ și, înlocuind pentru p_0 (4.2.27) în (4.2.29), rezultă:

$$c^3 = (ab)^{3/2} = \left(\frac{3PR_c}{4E^*} \right) \cdot \frac{4}{\pi e^2} (b/a)^{3/2} \times \left[\left\{ (a/b)^2 E(e) - K(e) \right\} \left\{ K(e) - E(e) \right\} \right]^{1/2}$$

$$\text{și } c = (ab)^{1/2} = \left(\frac{3PR_c}{4E^*} \right)^{1/3} F_1(e) \quad (4.2.30)$$

Din (4.2.26.c) și (4.2.27) rezultă:

$$\delta = \frac{3P}{2\pi ab E^*} b K(e) = \left(\frac{9P^2}{16E^{*2} R_e} \right)^{1/3} F_2(e) \quad (4.2.31)$$

$$\text{și } p_0 = \frac{3P}{2\pi ab} \left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R_e^2} \right)^{1/3} \left\{ F_1(e) \right\}^{-2/3} \quad (4.2.32)$$

Excentricitatea elipsei de contact este independentă de sarcină și depinde numai de raportul curburilor R'/R'' , dată de ecuația (4.2.28).

Se verifică inegalitatea $\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} > \delta - Ax^2 - By^2$.

Dacă a și b sunt semiaxele în direcția x și y cu $a > b$, în centrul suprafeței de contact.

$$\sigma_x = -p_0 \{ 2\nu + (1-2\nu)b(a+b) \} \quad (4.2.34.a)$$

$$\sigma_y = -p_0 \{ 2\nu + (1-2\nu)a(a+b) \} \quad (4.2.34.b)$$

Pe muchia de contact a semiaxelor, $x = \pm a$, $y = 0 \Rightarrow$

$$\sigma_x = -\sigma_y = p_0 (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ \frac{1}{e} \tanh^{-1} e - 1 \right\} \quad (4.2.35.a)$$

și la $x = 0$, $y = \pm b$.

$$\sigma_y = -\sigma_x = p_0 (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ 1 - \frac{b}{ae} \tan^{-1} \left(\frac{ea}{b} \right) \right\} \quad (4.2.35.b)$$

Tensiunea tangențială maximă

| | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| b/a | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| z/b | 0,785 | 0,745 | 0,665 | 0,590 | 0,530 | 0,480 |
| $(\tau_1)_{\max}/p_0$ | 0,300 | 0,322 | 0,325 | 0,323 | 0,317 | 0,310 |

c) Contactul bidimensional al corpurilor cilindrice

Două corpuri cilindrice au axele paralele cu axa y și sunt încărcate cu sarcina pe unitatea de lungime P .

Hertz a considerat acest caz ca limită a contactului eliptic, atunci când b este incomparabil mai mare decât a .

O alternativă este de a considera semispațiul elastic pentru încărcare liniară.

Ecuația (4.2.3) devine:

$$h = z_1 + z_2 = Ax^2 = \frac{1}{2}(1/R_1 + 1/R_2)x^2 = \frac{1}{2}(1/R)x^2 \quad (4.2.36)$$

cu $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Pentru punctele din interiorul contactului, ecuația (4.2.7):

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 = \delta - 1/2(1/R)x^2 \quad (4.2.37)$$

și pentru punctele exterioare:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} > \delta - 1/2(1/R)x^2 \quad (4.2.38)$$

Din (4.2.37), prin diferențiere \Rightarrow

$$\frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_{z2}}{\partial x} = -(1/R)x \quad (4.2.39)$$

Din teoria elasticității

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} q(x)$$

pentru $p(x)$ care acționează în zona $-a \leq x \leq a$.

Presiunea $p(x)$ este aceeași pentru fiecare suprafață, astfel că:

$$\frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_{z2}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds$$

Substituind în (4.2.39) \Rightarrow

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = \frac{\pi E^*}{2R} x \quad (4.2.40)$$

Această ecuație integrală, pentru o presiune $p(x)$ necunoscută, este de tipul

$$\int_{-b}^a \frac{F(s)}{x-s} ds = g(x), \quad \text{în care } g(x) \text{ este polinomială de ordinul } 1 \quad \left(\frac{\pi E^*}{2R} x \right).$$

Soluția este de forma

$$\int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} (n+1) Bx^n$$

pentru $n = 1 \Rightarrow \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} 2 \cdot Bx = \frac{\pi E^*}{2R}$; deci

$$I_n = I_1 = \pi(x^2/a^2 - 1/2)$$

Deci

$$p(x) = -\frac{\pi E^*}{2R} \cdot \frac{x^2 - a^2/2}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{P}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} \quad (4.2.41)$$

Expresia pentru presiune nu este unic definită până ce semilățimea a nu este cunoscută ca funcție de forța normală P . Inițial, se notează că presiunea trebuie să fie pozitivă de la un capăt la altul al contactului, pentru care:

$$P \geq \pi a^2 E^* / 4R$$

Dacă P depășește $\pi a^2 E^* / 4R$ înseamnă că presiunea crește la ∞ pentru $x = \pm a$. Semispațiul elastic poate fi considerat încărcat prin distribuția de forma

$$p_0 (1 - x^2/a^2)^{-1/2}.$$

Gradientul suprafeței în afara zonei încărcare este ∞ , deci nu este consistent cu problema pusă în discuție prin (4.2.38).

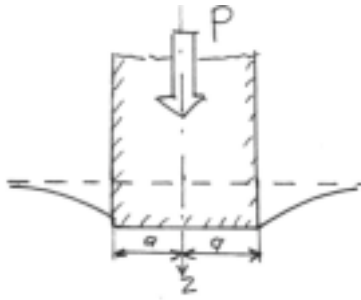


Fig. 4.2.4

unde $p_m = \frac{\pi}{4} p_0$ - presiune medie.

Tensiunile în interiorul celor două solide pot fi determinate substituind presiunea (4.244) în ecuațiile generale ale elasticității.

Pe interfața de contact, $\sigma_x = \sigma_y = -p(x)$ și în afara regiunii de contact toate tensiunile sunt nule.

Prin integrare în lungul axei $z \Rightarrow$

$$\sigma_x = -\frac{p_0}{a} \left\{ (a^2 + 2z^2)(a^2 + z^2)^{-1/2} - 2z \right\} \quad (4.2.46.a)$$

$$\sigma_z = -p_0 a (a^2 + z^2)^{-1/2} \quad (4.2.46.b)$$

Acestea sunt tensiuni principale, astfel că tensiunea tangențială principală este:

$$\tau_1 = p_0 a \left\{ z - z^2 (a^2 - z^2)^{-1/2} \right\}$$

$$\text{de la care } (\tau_1)_{\max} = 0,30 p_0 \quad \text{la } z = z_0 = 0,78 a \quad (4.2.47)$$

Aceste tensiuni sunt independente de coeficientul Poisson; pentru starea plană de deformație, cea de-a treia tensiune $\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$.

Variația tensiunilor σ_x , σ_z și τ_1 din (4.2.46) sunt prezentate în fig. 4.2.5.

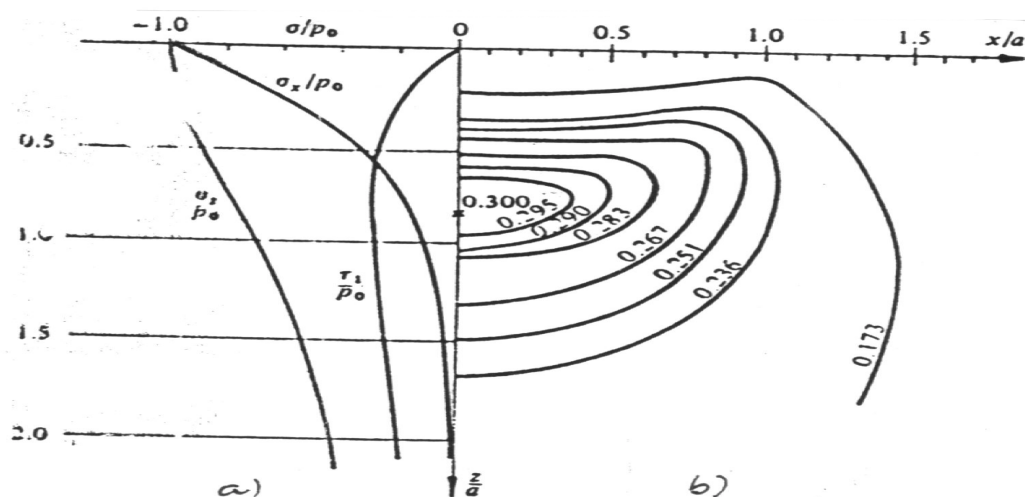


Fig. 4.2.5 (a) - Tensiunile de sub suprafață în lungul axei de simetrie

(b) tensiunile principale τ_1/p_0

Mc Ewen (1949) a obținut tensiunile într-un punct (x, z) în termenii m și n definiți prin:

$$m^2 = \frac{1}{2} \left[\left\{ (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right\}^{1/2} + (a^2 - x^2 + z^2) \right] \quad (4.2.48.a)$$

$$\text{și } n^2 = \frac{1}{2} \left[\left\{ (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right\}^{1/2} - (a^2 - x^2 + z^2) \right] \quad (4.2.48.b)$$

unde semnele lui m și n sunt aceleași cu cele ale lui x și y respectiv.

$$\text{Drept care } \sigma_x = -\frac{p_0}{a} \left\{ m \left(1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right\} \quad (4.2.49.a)$$

$$\sigma_z = -\frac{p_0}{a} m \left(1 - \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) \quad (4.2.49.b)$$

$$\tau_{xz} = \frac{p_0}{a} n \left(1 - \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) \quad (4.2.49.c)$$

4.2.3. Modelul cu fundație elastică (Winkler)

Dificultățile teoriei contactului elastic sunt determinate de faptul că deplasarea unui punct depinde de presiunea întregului contact ca fiind o funcție integrală.

Această dificultate este evitată dacă solidele pot fi modelate prin fundație elastică Winkler sau "saltea" decât prin modelul semispațiului elastic. Acest model este ilustrat în fig. 4.2.7.

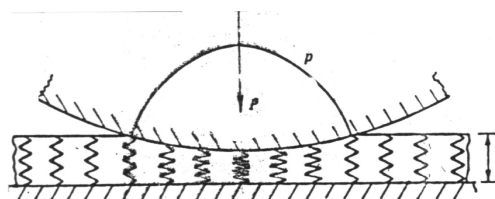


Fig.4.27

Fundația elastică, de grosime h , este rezemată pe o bază rigidă și este comprimată de un penetrator rigid.

Profilul penetratorului, $z(x, y)$, este considerat ca suma celor două profile ale corpului ce trebuie modelat,

$$z(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y) \quad (4.2.50)$$

Se neglijează tensiunea între elementele adiacente. Dacă penerația în origine este notată cu υ , deformațiile elastice normale ale fundației (saltelei) sunt:

$$\bar{u}_z(x, y) = \begin{cases} \delta - z(x, y), & \delta > z \\ 0 & \delta \leq z \end{cases} \quad (4.2.51)$$

Presiunea de contact într-un punct depinde numai de deplasarea în acel punct:

$$p(x, y) = (K/h)\bar{u}_z(x, y) \quad (4.2.52)$$

unde K este modulul elastic al fundației.

Pentru două corpuri cu profile curbe, având razele de curbură R' și R'' , $z(x, y)$ - (ec. 4.2.3.

$$n = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'}x^2 + \frac{1}{2R''}y^2$$

se poate scrie: $\bar{u}_z = \delta - (x^2/2R') - (y^2/2R'')$ (4.2.53)

în interiorul ariei de contact. deoarece $\bar{u}_z = 0$ în afara contactului, granița este elipsa de semiaxe $a = (2\delta R')^{1/2}$ și $b = (2\delta R'')^{1/2}$.

Presiunea de contact, dată de (4.52), este:

$$p(x, y) = (K\delta/h) \left\{ 1 - (x^2/a^2) - (y^2/b^2) \right\} \quad (4.2.54)$$

care este un paraboloid egal cu cel dat de Hertz.

Prin integrare se deduce sarcina totală

$$P = K\pi ab\delta/2h \quad (4.2.55)$$

În cazul axial simetric $a = b = (2\delta R)^{1/2}$ și

$$P = \frac{\pi}{4} \left(\frac{Ka}{h} \right) a^3 \quad (4.2.56)$$

Pentru cazul contactului bidimensional al cilindrilor coaxiali, din ec. (4.2.37),

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 = \delta - \frac{1}{2}(1/R)x^2,$$

$$\bar{u}_z = \delta - x^2/2R = (a^2 - x^2)/2R \quad (4.2.57)$$

astfel că, $p(x) = (K/2Rh)(a^2 - x^2)$ (4.2.58)

și sarcina $P = \frac{2}{3} \left(\frac{Ka}{h} \right) a^2$ (4.2.59)

Ecuțiile (4.2.56) și (4.2.59) stabilesc legătura între sarcină și lățimea de contact. Comparând lățimea cu cea dată de ecuațiile lui Hertz (4.2.22) și (4.2.43),

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{4PR}{\pi E^*} \right)^{1/2},$$

$$\Rightarrow \frac{K}{h} = 1,70 \frac{E^*}{a} \quad \text{și} \quad \frac{K}{h} = 1,18 \frac{E^*}{a}$$

Pentru a considera pe K a fi constantă de material, este necesar de a menține similaritate geometrică la creșterea grosimii fundației (saltelei) în proporție cu lățimea de contact a .

Alternativ, considerând că h este fixat, se cere ca valoarea lui K să se reducă proporțional cu inversul lui a . Este o consecință a naturii aproximative a soluției, în comparație cu soluția lui Hertz.

Dacă facem $\frac{K}{h} = 1,35 \frac{E^*}{a}$, valoarea lui a , dată de (4.2.56) sau (4.2.59) pentru o forță P , nu are erori mai mari de 7% față de soluția lui Hertz. Complianța unui punct de contact nu este bine modelată. Datorită neglijării deplasării suprafeței în afara zonei de contact, fundația model ("saltea") dă: $\delta = a^2 / 2R$, care este jumătate din cea dată de ecuația lui Hertz (ec. 4.2.23)

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE^*} \right)^{1/3}$$

Dacă este mai importantă în aplicația particulară complianța modelului, se poate lua $K/h = 0,6E^*/a$, lățimea de contact a poate fi mărită cu factorul $\sqrt{2}$.

Scopul modelului fundație ("saltea") este de a obține o aproximație simplă a soluției complexe a semispațiului elastic. De exemplu, contactul normal fără frecare a două corpuri de profile arbitrare ce nu pot fi reprezentate adecvat de razele lor de curbura, poate fi analizat ușor pe această cale. Aria de contact este determinată direct ca formă și mărime prin profilele (x, y) și penetrația δ . Distribuția de presiuni este dată de (4.2.52),

$$p(x, y) = (K/h) \bar{u}_z(x, y),$$

și corespondența cu sarcina se obține prin însumarea directă a presiunii. Pentru o arie de contact a unei forme arbitrare reprezentate prin valoarea a , trebuie determinat raportul (K/h) .

Modelul fundație ("saltea") este ușor de adaptat, pentru sarcina tangențială și pentru solidul viscoelastic.

4.2.4. Contactul normal non-hertzian al corpurilor elastice

4.2.4.1. Condițiile tensiunilor pe muchia de contact

S-a văzut în §.4.1, că atunci când două corpuri elastice non-conforme, având profilele continue, sunt presate în contact, distribuția de presiuni între ele este unic determinată în interiorul ariei de contact. Două condiții trebuie satisfăcute:

1. pe interfață nu vor apărea tensiuni;
2. suprafețele nu interferează în afara zonei de contact.

Aceste condiții elimină termenii din distribuția de presiuni de forma:

$$c(1 - x^2/a^2)^{-1/2}$$

care duc tensiunile de tracțiune sau compresive la ∞ pe muchia de contact $x = \pm a$ (vezi ecuația (4.2.41)),

$$p(x) = -\frac{\pi E^*}{2R} \cdot \frac{x^2 - a^2/2}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{P}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Se consideră $p = p_0(1 - x^2/a^2)^{1/2}$, distribuție semi-elipsoidală, care face ca $p = 0$ pentru $x = \pm a$.

Dacă presiunea este realizată de încărcare liniară și distribuție uniformă tensiunile sunt finite, dar gradientul suprafeței este infinit pe muchia de contact

$$\bar{u}_z = -\frac{1 - \nu^2}{\pi E} p \left\{ (a+x) \ln \left(\frac{a+x}{a} \right)^2 + (a-x) \ln \left(\frac{a-x}{a} \right)^2 \right\} + c$$

Acest gradient infinit al suprafeței este asociat cu saltul de presiune de la zero în exterior la valoarea p în interior. Este clar că cele două suprafețe, inițial netede și continue, nu se pot deforma pe această cale în afara zonei încărcate.

Aceste observații conduc la un principiu important: distribuția de presiuni între două corpuri elastice, ale căror profile sunt continue pe suprafața de margine a ariei de contact, scade continuu către zero la margine (principiu apreciat de Boussinesq).

Exemplele sunt valabile atât pentru suprafețele fără frecare dar și pentru frecarea de alunecare la muchia de contact, $q = \mu p$ și, de asemenea, dacă frecarea este suficientă pentru a preveni alunecarea.

Dacă unul sau ambele corpuri au profilul discontinuu pe muchia contactului, situația este destul de diferită și, în general, pe muchie apar concentrații puternice de tensiuni.

Pentru penetratorul fără frecare, distribuția de presiuni are forma:

$$p_0 \left(1 - x^2 / a^2\right)^{-1/2}$$

care, pentru distanțe mici ρ de unul din colțuri, poate fi scrisă:

$$p_0 (2\rho / a)^{-1/2}$$

Desigur, tensiuni infinite nu există în realitate. În primul rând, teoria elasticității liniare este valabilă numai pentru deformații mici și, în al doilea rând, materialele reale se deformează plastic la tensiuni finite.

Condițiile pe muchia de contact a penetratorului rigid cu semispațiul elastic sunt influențate de frecarea de pe fața penetratorului și de valorile coeficientului Poisson ale semispațiului.

Aproape de colț ($\rho = a - x \ll a$), presiunea poate fi scrisă:

$$p(\rho) = \frac{2(1-\nu)}{\pi(3-4\nu)} (2a\rho)^{-1/2} \cos\{\eta \ln(2a/\rho)\} \quad (4.2.60)$$

unde $\eta = (1/2\pi) \ln(3-4\nu)$.

Această singularitate remarcabilă manifestă oscilații ale presiunii la colțul penetratorului ($\rho \rightarrow 0$).

Pentru un semispațiu incompresibil, $\nu = 0,5$ și $\eta = 0$ și distribuția de presiuni revine la cazul fără frecare. Se poate arăta că în absența frecării suprafața trebuie să alunece. Forma distribuției de presiuni pe muchia penetratorului poate fi obținută din

$$p(x) = \frac{P \cos(\gamma\pi)}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} \cdot \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^\gamma, \quad \text{unde } \operatorname{ctg}\pi\gamma = \frac{2(1-\nu)}{\mu(1-\nu)},$$

$$p(\rho) = \frac{P \cos(\pi\gamma)}{\pi} (2a\rho)(2a/\rho)^{\pm\gamma} \quad (4.2.61)$$

Când $\mu = 0$ sau $\nu = 0,5$, $\gamma = 0$ și distribuția de presiuni revine la forma fără frecare.

Se analizează concentrarea de tensiuni produsă de penetratorul rigid cu colțuri drepte (fig. 4.2.8) (pană).

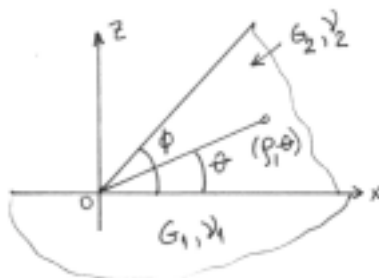


Fig. 4.2.8

Variația tensiunilor cu ρ închis în vârful muchiei poate avea una din următoarele forme:

1. ρ^{s-1} , dacă s este real și $0 < s < 1$;
2. $\rho^{\xi-1} \cos(\eta \ln \rho)$ sau $\rho^{\xi-1} \sin(\eta \ln \rho)$, dacă $s = \xi + i\eta$ este complex și $0 < \xi < 1$;
3. $\ln \rho$;
4. constant (inclusiv zero).

depinzând de constantele elastice ale penei și semispațiului, unghiul penei și condițiile de recare de pe interfață.

Se definesc două constante elastice determinate de numai două variabile independente:

$$\alpha \equiv \frac{\{(1-\nu_1)/G_1\} - \{(1-\nu_2)/G_2\}}{\{(1-\nu_1)/G_1\} + \{(1-\nu_1)/G_2\}} \quad (4.2.62 \text{ a})$$

$$\text{și } \beta \equiv \frac{1}{2} \frac{\{(1-2\nu_1)/G_1\} - \{(1-2\nu_2)/G_2\}}{\{(1-\nu_1)/G_1\} + \{(1-\nu_2)/G_2\}} \quad (4.2.63 \text{ b})$$

α - este o măsură a diferenței modului redus $\{(1-\nu^2)/E\}$, $\alpha \in [-1; 1]$

\swarrow semispațiu rigid \searrow pana este rigidă

β are valorile extreme $\pm 1/2$ când unul dintre corpuri este rigid și celălalt are $\nu = 0$.

Dacă ambele corpuri sunt incompresibile $\beta = 0$.

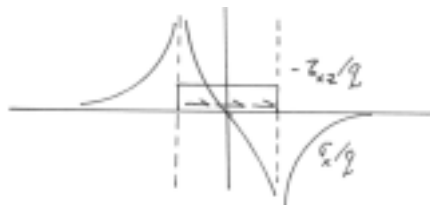
În tabelul alăturat sunt precizate câteva valori tipice ale constantelor elastice:

| Corp 1 | Corp 2 | G_1 GPa | ν_1 | G_2 GPa | ν_2 | α | β |
|--------------------|--------|--------------|---------|--------------|---------|----------|---------|
| Cauciuc | metal | $\ll G_2$ | 0,50 | $\gg G_1$ | - | 1,00 | 0 |
| Perspex | oțel | 0,97 | 0,38 | 80 | 0,30 | 0,97 | 0,19 |
| Sticlă | oțel | 22 | 0,50 | 80 | 0,30 | 0,57 | 0,21 |
| Duraluminu | oțel | 28 | 0,32 | 80 | 0,30 | 0,61 | 0,12 |
| Fontă | oțel | 45 | 0,25 | 80 | 0,30 | 0,31 | 0,12 |
| Carbură de wolfram | oțel | 300 | 0,22 | 80 | 0,30 | -0,54 | -0,24 |

Când există alunecare între pană și semispațiu, tensiunile pe vârf pot fi de forma (a), (c) sau (d) definite înainte, dar valori complexe ale lui s , care conduc la variații ale tensiunilor. Pentru ca presiunea să fie finită în 0 - cazul (d) - este necesar ca

$$\alpha \leq \frac{(\pi + \phi)\cos\phi - (\mu\pi - 1)\sin\phi}{(\pi - \phi)\cos\phi - (\mu\pi + 1)\sin\theta} \quad (4.2.64)$$

În afară de cazul că presiunea scade până la zero în 0 (fig. 4.2.8), tensiunea tangențială σ în semispații are singularitate logaritmică în 0 - cazul (c). Acesta este cazul presiunii uniforme:

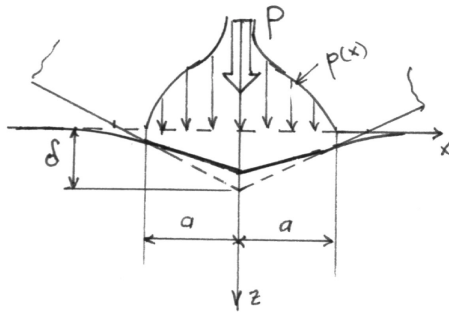


Dacă α excede partea dreaptă a relației (4.2.64), există legea puterii a singularității în punctul 0 cu s depinzând de α , β , ϕ și μ , pana deplasându-se în sensul pozitiv al axei x .

Pentru deplasarea în sensul opus al axei, valorile lui μ din (4.2.64) trebuie introduse cu semn negativ.

Concentrarea tensiunilor este redusă la deplasarea în sensul axei x și ridicată la deplasarea în sens negativ.

4.2.4.2. Pana teșită și conul



Pe muchiile penetratorului rigid cu colțuri drepte presiunea este infinită. Se consideră deformațiile suficient de mici și se poate aplica teoria elasticității liniare. Semiunghiul penei sau conului trebuie să fie mai mic de 90° .

Dacă se consideră pana bidimensională ca penetrator pentru suprafața plană și lățimea de contact ($2a$) mică, în comparație cu dimensiunile corpurilor, atunci se poate utiliza soluția elastică a semiplanului pentru ambele corpuri (pană și semispațiu).

Deplasările normale sunt definite de profilul penei:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \text{ctg}\alpha |x|, \quad -a < x < a \quad (4.2.65)$$

Și derivând:

$$\bar{u}'_{z1} + \bar{u}''_{z2} = -(\text{sign } x) \text{ctg}\alpha, \quad (4.2.65)$$

unde $(\text{sign } x) = +1$ sau -1 când x este pozitiv și $-$ când x este negativ.

Neglijând frecarea, presiunea normală acționează pe suprafață și se determină prin substituire în ecuația

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} q(x), \\ \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds &= (\text{sign } x) \text{ctg}\alpha \end{aligned} \quad (4.2.66)$$

Această ecuație integrală pentru $p(x)$ poate fi rezolvată ținând seama că

$$\begin{aligned} \int_{-b}^a \frac{(a^2 - s^2)^{1/2} (\text{sign } s) ds}{x-s} &= \int_0^a \frac{(a^2 - s^2)^{1/2} ds}{x-s} - \int_{-a}^0 \frac{(a^2 - s^2)^{1/2} ds}{x-s} = \\ &= 2a - (a^2 - x^2)^{1/2} \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - x^2)^{1/2}}{a - (a^2 - x^2)^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

Astfel, \Rightarrow

$$p(x) = \frac{E^* \text{ctg}\alpha}{2\pi} \left[\frac{2a}{(a^2 - x^2)^{1/2}} - \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - x^2)^{1/2}}{a - (a^2 - x^2)^{1/2}} \right\} + \frac{P}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} \right] \quad (4.2.68)$$

Dacă fețele netede ale penei se extind departe de muchia contactului, presiunea poate scădea până la zero pe muchie și evitarea tensiunilor sau interferența exterioară a contactului,

$$P = aE^* \text{ctg } \alpha \quad (4.2.69)$$

Distribuția de presiuni este

$$p(x) = \frac{E^* \operatorname{ctg}\alpha}{2\pi} \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - x^2)^{1/2}}{a - (a^2 - x^2)^{1/2}} \right\} = \frac{E^* \operatorname{ctg}\alpha}{\pi} \cos h^{-1}(a/x) \quad (4.2.70)$$

În lungul axei z , componentele σ_x și σ_y sunt tensiuni principale, astfel că

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \frac{E^* a}{\pi} \operatorname{ctg}\alpha (a^2 + z^2)^{-1/2} \quad (4.2.71)$$

care are valoarea maximă dedesubtul vârfului

$$\tau_{1\max} = (E^* / \pi) \operatorname{ctg}\alpha$$

Pătrunderea conului în suprafața plană este similară penei:

$$p(r) = \frac{1}{2} E^* \operatorname{ctg}\alpha \cos h^{-1}(a/r) = \frac{1}{2} E^* \operatorname{ctg}\alpha \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - r^2)^{1/2}}{a - (a^2 - r^2)^{1/2}} \right\} \quad (4.2.72)$$

și forța totală $P = \frac{1}{2} \pi a^2 E^* \operatorname{ctg}\alpha$.

Tensiunea tangențială de pe suprafață este:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{1}{2}(1 + 2\nu)p_0 \rightarrow \infty$$

Tensiunea tangențială principală:

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) = \frac{1}{2} E^* a^2 \operatorname{ctg}\alpha (a^2 + z^2)^{-1} \quad \text{și} \quad \tau_{r\max} = \frac{1}{2} E^* \operatorname{ctg}\alpha$$

4.2.4.3. Suprafețe conforme

Sub sarcină, aria de contact crește rapid și dimensiunile de contact devin comparabile cu cele ale corpurilor, astfel că relațiile lui Hertz nu mai sunt valabile.

Se consideră inițial contactul corpurilor ale căror profile în regiunea de contact nu pot fi adecvat reprezentate prin polinom de ordinul doi dar, totuși, pot fi considerate ca semispații pentru inițierea calculului deformațiilor elastice și tensiunilor.

Profilele sunt reprezentate prin polinom al cărui grad aproximativ este cerut.

Pentru contactul bidimensional

$$h = z_1 + z_2 = A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots + A_n x^{2n} + \dots \quad (4.2.73)$$

și pentru contactul axial simetric

$$h = A_1 r^2 + A_2 r^4 + \dots + A_n r^{2n} + \dots \quad (4.2.74)$$

Substituind (4.2.73) sau (4.2.74) în (4.2.6),

$$\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2} + h = \delta_1 + \delta_2,$$

se găsește condiția ce trebuie satisfăcută prin deplasările fiecărei suprafețe în zona de contact.

Steuermann (1939) a determinat distribuția de presiuni $p_n(x)$ și $p_n(r)$ pentru profile de forma $A_n x^{2n}$ și $A_n r^{2n}$

$$p_n(x) = \frac{P_n}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} - \frac{E^* A_n a^{2n}}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n-2} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right\} \quad (4.2.75)$$

Dacă profilele sunt netede și continue, presiunile nu pot fi infinite la $x = \pm a$, pentru care se consideră

$$p_n = n\pi E^* A_n a^{2n} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \text{ și} \quad (4.2.76)$$

$$p_n(x) = nE^* A_n a^{2n-2} \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n-4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \right\} (a^2 - x^2)^{1/2} \quad (4.2.77)$$

Observație

Pentru $n = 1 \Rightarrow$ distribuția după teoria lui Hertz

$n = \text{mare} \Rightarrow p(x) = \text{maximă în centru.}$

Pentru problema axial simetrică

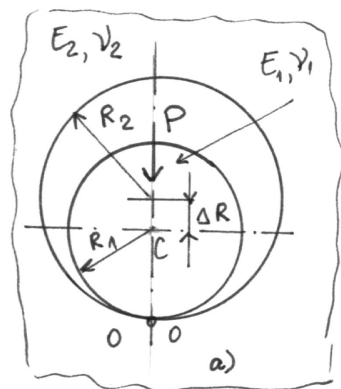
$$p_n(r) = \frac{nA_n E^* a^{2n-2}}{\pi} \left\{ \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \right\}^2 \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n-2} \right\} (a^2 - r^2) \quad (4.2.78)$$

Compresiunea

$$\delta = \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} A_n a^{2n}$$

Exemple

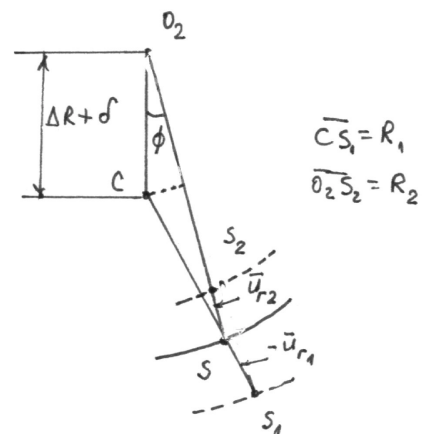
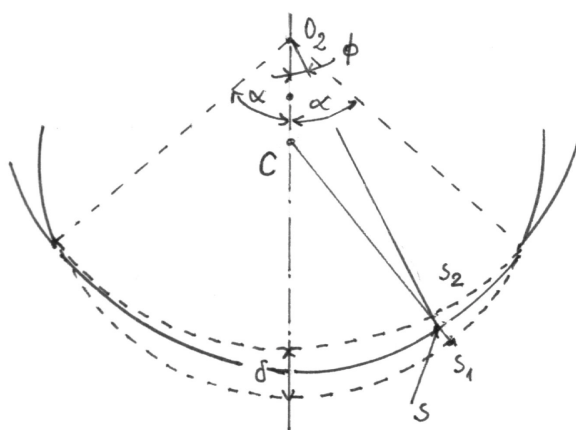
a) Contactul bidimensional al unui bolț într-un alezaj (fig. 4.2.9)



$\Delta R = R_2 - R_1$ este mic în comparație cu R_1 și R_2 .

Sarcina P se aplică efectiv în centrul C și deplasasează pe C cu δ ; reacțiunea lui P este o presiune uniformă pe lungime și pe distanță mare a alezajului.

Fig. 4.2.9



Punctele celor două suprafețe S_1 și S_2 , care vin în contact în S , se deplasează elastic atât radial \bar{u}_r cât și tangențial \bar{u}_θ .

Deoarece ΔR și δ sunt ambele mici în comparație cu R_1 și R_2 ,

$$\overline{O_2S} - \overline{CS} = CO_2 \cos \phi$$

$$(R_2 + \bar{u}_{r2}) - (R_1 + \bar{u}_{r1}) = (\Delta R + \delta) \cos \phi \quad (4.2.79)$$

$$\text{sau} \quad \bar{u}_{r2} - \bar{u}_{r1} = \delta \cos \phi - \Delta R (1 - \cos \phi) \quad (4.2.80)$$

Când contactul se subîntinde pe un unghi $\pm \alpha$ care nu este mic, expresia (4.2.80) diferă semnificativ de aproximația Hertz, dată de (4.2.37),

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 = \delta - \frac{1}{2} (1/R)x^2.$$

Acum se cere să se determine distribuția de presiuni normale (neglijând frecarea) care, acționând în zona $\pm \alpha$, produce deformații în suprafața bolțului și alezajului și care satisfac condiția (4.2.80) în intervalul $-\alpha < \phi < \alpha$.

Problema a fost studiată de Persson (1964) care a folosit funcțiile de tensiuni apropiate de discul circular și alezajul circular de lățimea ∞ (fig. 4.2.10).

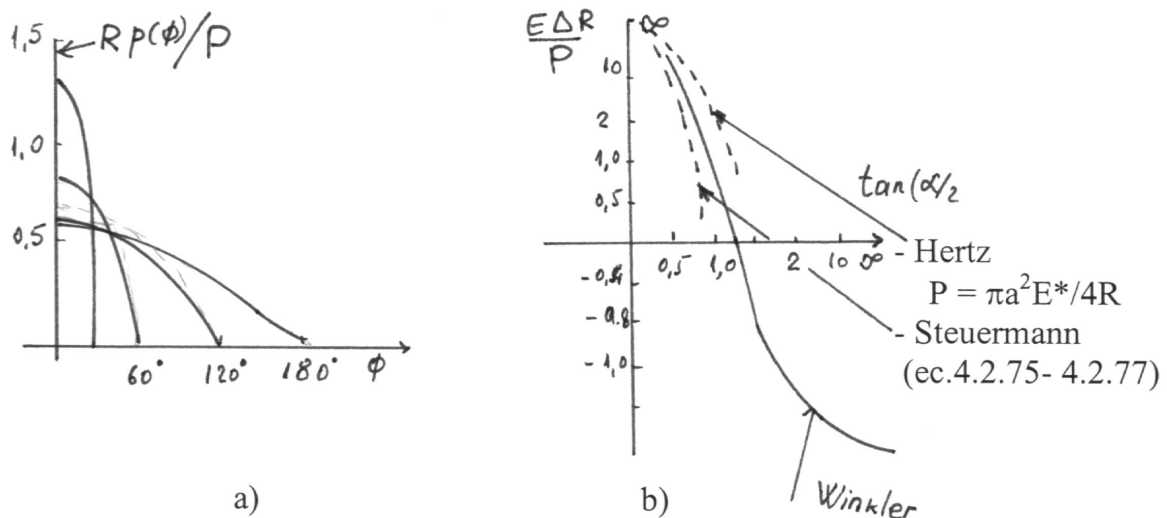


Fig. 4.2.10

Problema analogă - b) sfera fără frecare într-o cavitate (analizată de Goodman & Keer (1965) - utilizând metoda corespunzător corpurilor sferice)- Ei arată că contactul este mai mare cu până la 25% față de cel prezis cu teoria lui Hertz.

4.2.4.4. Influența frecării interfaciale

Frecarea de pe suprafața de contact a două corpuri neconforme are rol important, în special pentru materialele cu constante elastice diferite. În zona alunecării

$$|q| = \mu p \quad (4.2.81)$$

cu direcția opusă, direcției de alunecare. Pentru cazul bidimensional tracțiunea tangențială acționează paralel cu axa x . În contactul axial simetric alunecarea este radială și axial simetrică. Tensiunile și deformațiile introduse de tracțiunea tangențială conduc la creșterea proporțională a zonei de contact și la margini se stabilește o corelație între alunecare și aderență.

Dacă sarcina exterioară crește și mărimea zonei de contact crește; punctele de contact împerecheate ale celor două suprafețe, din afara zonei de adeziune, vor suferi deplasări tangențiale diferite. Când sunt aduse în zona de adeziune încetează deplasarea relativă.

Fiecare pereche de puncte menține deplasarea relativă tangențială $\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2}$ și deformația relativă $\partial \bar{u}_{x1} / \partial x - \partial \bar{u}_{x2} / \partial x$ care a căpătat-o de la început. În această nouă stare, mărimea deformației crește direct proporțional cu a , astfel că pentru două puncte de contact din zona de adeziune la distanța x de centru se poate scrie

$$\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x} = C|x| \quad (4.2.82)$$

unde C este o constantă ce se va determina.

1) - *Cazul contactului a doi cilindri cu axe paralele* (lățimea de contact $2a$) - frecarea elimină alunecare - într-o zonă centrată caracterizată prin lățimea $2c$:

- presiunea $p(x)$ are distribuție simetrică și $q(x)$ antisimetrică;
- deplasările normale pe suprafață $\frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{z2}}{\partial x} = -\frac{1}{R}x$ în afara contactului.

$$\text{Dar} \quad \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} q(x)$$

Ținând seama că tracțiunile sunt egale și opuse \Rightarrow

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds - \pi \beta q(x) = \pi E^* x / 2R, \quad -a \leq x \leq a \quad (4.2.83)$$

unde $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ și β este o măsură a diferenței constantelor elastice

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\{(1-2\nu_1)/G_1\} - \{(1-2\nu_2)/G_2\}}{\{(1-2\nu_1)/G_1\} + \{(1-2\nu_2)/G_2\}} \right]$$

În regiunea de adeziune,

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{q(s)}{x-s} ds,$$

și introducând în condiția non-slip (fără alunecare) (4.2.82), rezultă

$$\pi \beta p(x) + \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds = -\frac{1}{2} \pi E^* \epsilon |x|, \quad |x| \leq c \quad (4.2.84)$$

$$\text{și} \quad |q| \leq \mu p \quad (4.2.85)$$

$$\text{Pentru regiunea de alunecare} \quad q = \pm \mu p, \quad c < |x| < a \quad (4.2.86)$$

semnul lui q fiind determinat de sensul alunecării.

Dacă (4.2.83) - (4.2.85) se împart la $a \Rightarrow (p/a), (x/a)$ - mărimi adimensionale.

Pentru distribuție hertziană de presiuni,

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} = \left(\frac{PE^*}{\pi R} \right)^{1/2} \Rightarrow C = 2\beta p_0 / E^* a$$

și
$$q(x) = \frac{\beta p_0}{\pi a} \left[(a^2 - x^2)^{1/2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + x \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - x^2)^{1/2}}{a - (a^2 - x^2)^{1/2}} \right\} \right] \quad (4.2.87)$$

Dacă se analizează raportul $q(x) / p(x)$ se observă pe muchia de contact raportul $\rightarrow \infty$ și alunecarea este inevitabilă.

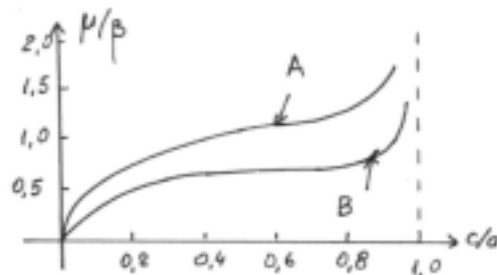
Zona centrală fără lunecare, $-c \leq x \leq c$, pentru materiale identice

$$K'(c/a) / K(c/a) = (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu)\mu$$

unde $K(c/a)$ - integrala eliptică completă; $K'(c/a) = K(1 - c^2/a^2)^{1/2}$

Pentru materiale diferite

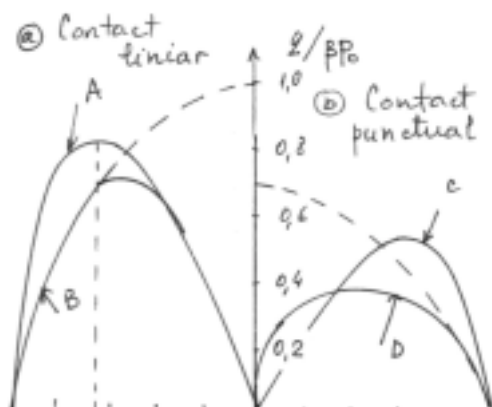
$$K'(c/a) / K(c/a) = \frac{(1 - 2\nu)2\beta}{2(1 - \nu)\mu} \quad (\text{curba A}) \quad (4.2.88)$$



Pentru zone de contact axial simetrice \Rightarrow

$$q(r) = \frac{\beta p_0}{\pi} \left[-\frac{1}{r} (a^2 - r^2)^{1/2} + \frac{r}{a} \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - r^2)^{1/2}}{r} \right\} + \frac{2}{ra} \int_r^a \frac{t^2}{(t^2 - r^2)^{1/2}} \ln \left| \frac{t+r}{t-r} \right| dt \right] \quad (4.2.89)$$

și
$$\frac{a}{2c} \ln \left(\frac{a+c}{a-c} \right) = \frac{\beta}{\mu} K'(c/a) \quad (4.2.90)$$



- A) - fără lunecare (ec. 4.2.87)
- B) - alunecare parțială $\mu/\beta = 0,99$
 $c = 0,7 a$
- C) - fără lunecare (ec. 4.2.88)
- D) - alunecare parțială $\mu/p = 0,6$ $c = 0,7 a$
Linia punctată $\mu p / \beta p_0$.

Mossakovski (1963) și Spence (1968, 1979) au arătat că frecarea poate crește încărcarea de contact cu cel mult 5% în comparație cu încărcarea hertziană, în funcție de β (β are valoarea maximă de 0,5 și, practic, $\beta \leq 0,2$).

În cazul contactului liniar, fără alunecare, tracțiunea $q(x)$ (4.2.81) duce la creșterea tensiunilor pe muchia de contact la

$$\bar{\sigma}_x(-a) = \bar{\sigma}_x(a) = -2\beta p_0, \quad (4.2.91)$$

compresiuni pentru suprafața deformabilă și tracțiune pentru cea rigidă. Alunecarea duce la reducerea tensiunilor. Dacă alunecarea este completă $|q| = \mu p$,

$$\bar{\sigma}_x(-a) = \bar{\sigma}_x(a) = -(4/\pi)\mu p_0 \quad (4.2.92)$$

În realitate, alunecarea există numai pentru $x > |c|$, astfel că (4.2.92) se consideră valabilă pentru $c/a < 0,7$ când $\mu/\beta < 1,0$.

Pentru cazul axial-simetric, tensiunea radială (σ_r) crește, astfel că pentru $r = a$ și fără alunecare

$$\bar{\sigma}_r(a) = -1,515(1 - 0,16\nu)\beta p_0 \quad (4.2.93)$$

Dacă alunecarea este completă

$$\bar{\sigma}_r(a) = -1,185(1 - 0,23\nu)\mu p_0 \quad (4.2.94)$$

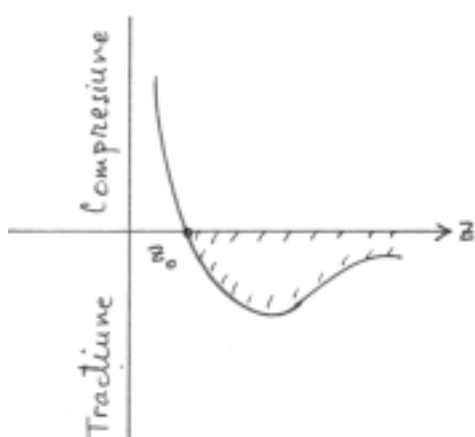
Relația (4.2.95) este o aproximație bună dacă $c/a < 0,7$ când $\mu/\beta < 0,66$.

În cazul axial-simetric, dacă presiunea normală este aceeași, tensiunea radială la marginea contactului are o valoare ce atinge maximumul $\frac{1}{3}(1 - 2\nu)p_0$ la $r = a$ și descrește cu r^2

$$\bar{\sigma}_r/p_0 = -\bar{\sigma}_\theta/p_0 = (1 - 2\nu)a^2/3r^2 \quad .$$

4.2.5. Adeziunea între corpurile elastice

La nivel atomic sau molecular, între cele două suprafețe ideale au loc forțe de atracție și repulsie, echilibrul având loc la o distanță z_0 .



Pentru $z < z_0$ atomii se resping și pentru $z > z_0$ se atrag.

Variația forței pe unitatea de arie în funcție de z poate fi scrisă sub forma $p(z) = -Az^{-n} + Bz^{-m}$, $m > n$ (4.2.95)

În zona $z > z_0$ apar deci forțe de adeziune. Este dificilă măsurarea acestor forțe. Se apreciază ca o măsură a lucrului mecanic (2γ) de a separa suprafețele de la $z = z_0$ la $z = \infty$ și descrie energia de suprafață de a se crea suprafețe libere. Dacă cele două solide sunt diferite, energia de separare va fi :

$$\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_{12}$$

unde γ_1 și γ_2 sunt energiile intrinseci ale celor două solide și γ_{12} energia interfeței.

Pentru suprafețe contaminate cu film, adeziunea solidelor nu se observă în mod uzual.

Înălțimea rugozităților este mare în comparație cu raza de acțiune a forțelor de adeziune. Dar, în zona reală de contact se dezvoltă adeziuni și care progresiv se desfac. Excepție de la această stare o constituie "mica" care are o suprafață atomică netedă și solidele cu modul de elasticitate redus

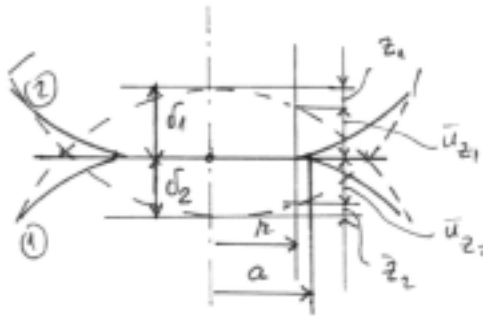
(gelatina sau cauciucul) care se pot adapta la rugozitățile suprafeței. În aceste circumstanțe, aria reală a contactului este egală cu aria aparentă.

Se analizează efectul forței de adeziune în absența rugozităților pentru două solide neconforme axial-simetrice și care fac contactul pe aria circulară de rază a .

Deplasările normale elastice satisfac ecuația:

$$\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2} = \delta - r^2 / 2R$$

$$\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2} = \delta - (z_1 + z_2) = \delta - (r^2 / 2R) \quad (5.38)$$



$$z_1 = \frac{1}{2R'_1} x_1^2 + \frac{1}{2R''_1} y_1^2 \quad (4.2.96)$$

analog z_2

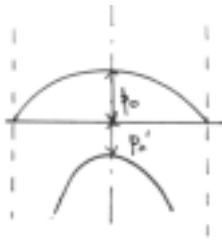
$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$h = z_1 - z_2$$

de presiuni de forma

$$p(r) = p_0 (1 - r^2 / a^2)^{1/2} + p'_0 (1 - r^2 / a^2)^{1/2} \quad (4.2.97)$$

$$\text{unde } p_0 = 2aE^* / \pi R.$$



O valoare pozitivă a lui p_0 se respinge deoarece pentru $r = a$ conduce la o valoare infinită a presiunii p , ceea ce ar face ca suprafețele să interfere în afara zonei de contact; o valoare negativă a lui p'_0 se respinge deoarece zona de contact preia numai compresiuni (corpurile sunt în contact).

În prezența forțelor de adeziune (atracție), nu se poate exclude posibilitatea ca p'_0 să fie negativă. Prin considerarea lucrului mecanic de compresiune, dat de presiunea $p(r)$, energia elastică de deformare

stocată în corpurile elastice va fi :

$$U_E = \int_0^a 2\pi r (\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2}) p dr = \frac{\pi^2 a^3}{E^*} \left[\frac{2}{15} p_0^2 + \frac{2}{3} p_0 p'_0 + p_0'^2 \right] \quad (4.2.98)$$

Compresiunea totală

$$\delta = (\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2})|_{p'_0} + (\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2})|_{p_0} = \left[\frac{\pi(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{\pi(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right] p'_0 a + \frac{\pi a p_0}{2E^*} = \frac{\pi a}{2E^*} (p_0 + 2p'_0) \quad (4.2.99)$$

Se consideră variația energiei deformației cu raza de contact menționând deplasarea relativă totală a celor două corpuri δ , constantă. Cu $p_0 = \frac{aE^*}{2R}$, rezultă:

$$U_E = \frac{\pi^2 a^3}{E^*} \left[\frac{2}{15} \frac{a^2 E^{*2}}{4R^2} + \frac{2}{3} \frac{aE^*}{2R} p'_0 + p_0'^2 \right]$$

$$\text{rezultă } \left[\frac{\partial U_E}{\partial a} \right]_{\delta} = \frac{\pi^2 a^2}{E^*} p_0'^2.$$

Deoarece δ este menținut constant și nu se produce lucru mecanic, la echilibru $\frac{\partial U_E}{\partial a} = 0$, rezultă $p'_o = 0$, identic ca în teoria lui Hertz.

Dar forțele adezive introduc o energie de suprafață U_s care descrește când suprafețele intră în contact și crește când se separă. Se poate scrie

$$U_s = -2\gamma\pi a^2$$

unde γ este energia pe unitatea de arie a fiecărei suprafețe. Energia totală liberă a sistemului este

La echilibru $\left[\frac{\partial U_T}{\partial a} \right]_\delta$ se neglijează, astfel că:

$$\frac{\pi^2 a^2}{E^*} p_o'^2 = -\frac{\partial U_s}{\partial a} = 4\pi\gamma a$$

$$\text{și } p_o' = -\left(\frac{4\gamma E^*}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (4.2.100)$$

unde semnul minus arată că este tensiune de compresie.

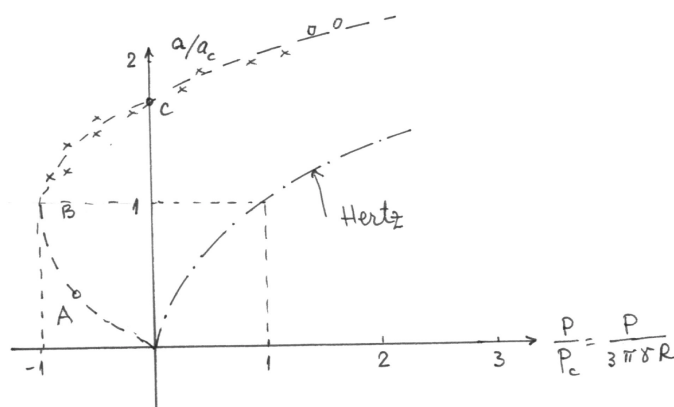
Pentru $r=a$ se exclude această presiune.

Condiția de echilibru mecanic

$$P = \int_0^a 2\pi r p(r) dr = \left(\frac{2}{3} p_o + 2p_o' \right) \pi a^2.$$

Substituind pentru p_o , $\left(p_o = \frac{aE^*}{2R} \right)$ și p_o' , $\left(p_o' = -\left(\frac{4\gamma E^*}{\pi a} \right)^{1/2} \right)$, rezultă

$$\left(P - \frac{4E^* a^3}{3R} \right)^2 = 16\pi\gamma E^* a^3 \quad (4.2.101)$$



Relația (4.2.101) se prezintă în fig. 4.2.11 în comparație cu rezultatele experimentale utilizând sfere din gelatină în contact cu "perspex".

Când corpurile sunt încărcate prin compresie (încărcare pozitivă) forța de adeziune atrage corpurile în contact astfel că aria de contact depășește pe cea dată de teoria lui Hertz.

Reducând sarcina la zero, suprafețele aderă cu o rază dată de punctul C (fig.4.2.11). Aplicarea unei tracțiuni (negativă) determină reducerea din nou a razei de contact. În punctul B, când

$$P = -P_c = -3\pi\gamma R \quad (4.2.102)$$

$$\text{și } a = a_c = \left(\frac{9\gamma R^2}{4E^*} \right)^{1/3}, \quad (4.2.103)$$

situația devine instabilă și suprafețele se separă.

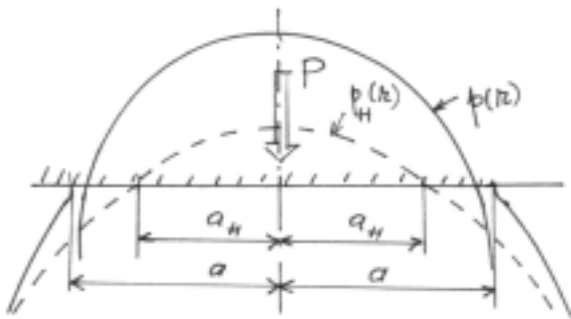
Forța P_c (4.2.102) se numește "forța de adeziune". Contactul adeziv este stabil în punctul A, în celelalte puncte joncțiunile adezive se rup.

$$P = -\frac{5P_c}{9}, \quad a = \frac{a_c}{3^{3/2}}$$

Tracțiunea dată de (4.2.97), $p = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} + \frac{p_0'}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$, și curbura suprafeței deformate,

$$\bar{U}_z(r) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} p_0' a \arcsin \frac{r}{a},$$

$$\bar{U}_z(r) = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{p_0}{2a} \left\{ (2a^2 - r^2) \arcsin \frac{a}{r} + r^2 \frac{a}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} \right\},$$



sunt prezentate în fig.4.2.12 pentru o sferă elastică în contact cu o suprafață plană rigidă. Aceasta este o tensiune de tracțiune înfinită și profilul deformat are loc pe suprafața plană la $r = a$. În realitate tensiunile nu pot fi infinite, nici colțurile nu sunt perfecte, dar există tensiunile de tracțiune pe suprafața care separă corpurile.

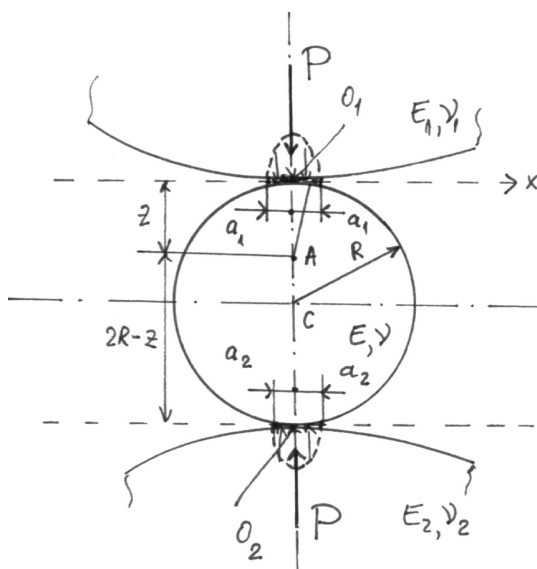
Deplasările elastice sunt mari, astfel că se poate compara cu teoria lineară elastică a ruperii prin fisuri ale lui Griffith. Într-adevăr, chiar discontinuitatea în zona de colț poate fi

sursa de deschidere a fisurii.

Maugis, Greenwood și Johnson au utilizat conceptul de "factor de intensitate a tensiunilor" pentru analiza ruperii solidelor elastice și vâscoelastice.

4.2.6. Contactul corpurilor cilindrice

Compresiunea elastică a corpurilor bidimensionale nu poate fi calculată numai pe baza tensiunilor de contact date de teoria lui Hertz.



Sarcina de compresiune pe unitatea de lungime P dă o distribuție hertziană de presiuni în punctul O_1

$$p = \frac{2P}{\pi a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} \right)^{1/2} \quad (4.2.105)$$

și semilățimea de contact

$$a_1^2 = \frac{4PR}{\pi E_1^*}, \quad (4.2.106)$$

unde E_1^* este modulul de elasticitate redus al rolei și corpului 1.

Distribuția de tensiuni într-un cilindru acționat diametral opus de sarcini concentrate a fost dedusă de Timoshenko și Goodier (1981). Se suprapun

efectele câmpurilor de tensiuni a două forțe concentrate P ce acționează în planele tangente la două semispații în punctele O_1 și O_2 , împreună cu tensiunea biaxială uniformă:

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{P}{\pi R} \quad (4.2.106)$$

Deoarece $a \ll R$, se consideră cilindrul încărcat diametral opus de (4.2.104).

Se cere componenta radială a deformațiilor ε_z în punctul A pe axa simetrie între O_1 și C .

Starea de tensiuni din A se compun din 3 componente:

i) tensiunile date de distribuția hertziană din O_1 - $p = \frac{2P}{\pi a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}$;

ii) tensiunile date de presiunea din O_2 , care este situată la distanță mare față de A și care poate fi considerată ca dată de o forță concentrată P :

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}; \quad \sigma_z = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}; \quad \tau_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

iii) tensiuni biaxiale date de (4.2.106).

Adunând, rezultă în A :

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{2(a_1^2 + 2z^2)}{a_1^2(a_1^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{4z}{a_1^2} \right\} \quad (4.2.107a)$$

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{2}{2R - z} - \frac{2}{(a_1^2 + z^2)^{1/2}} \right\} \quad (4.2.107b)$$

În starea plană de deformații

$$\varepsilon_z = \frac{(1 - \nu^2)}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x / (1 - \nu))$$

Compresiunea semispațiului superior al cilindrului O_1C se obține prin integrare ε_z de la $z=0$ la $z=R$ ($a \ll R$) și rezultă

$$\delta_1 = P \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left\{ 2 \ln \frac{4R}{a_1} - 1 \right\} \quad (4.2.108)$$

Similar pentru compresiunea semispațiului inferior rezultă compresiunea totală:

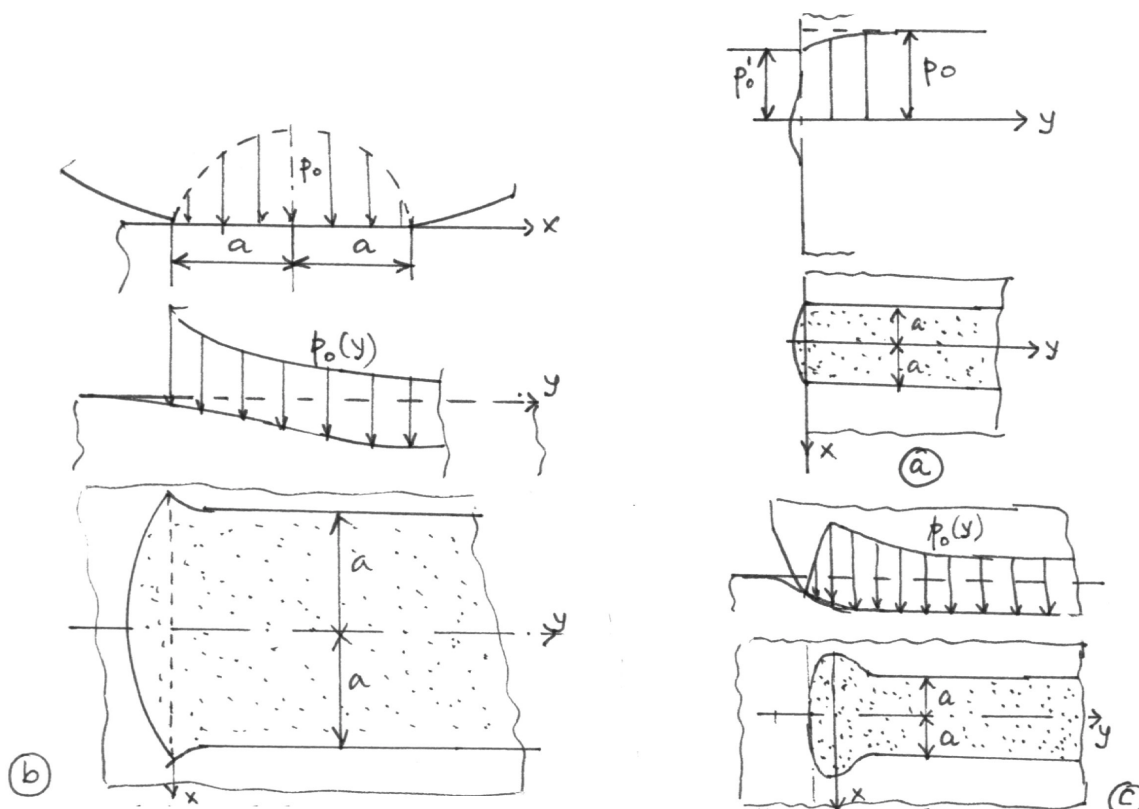
$$\delta = 2P \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left\{ \ln \frac{4R}{a_1} + \ln \frac{4R}{a_2} - 1 \right\} \quad (4.2.109)$$

Pentru comparație, se calculează compresiunea semispațiului relativ la o distanță d de centrul distribuției hertziane și rezultă

$$\delta = P \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left\{ 2 \ln \frac{2d}{a} - \frac{\nu}{1 - \nu} \right\} \quad (4.2.110)$$

Dacă în (4.2.108) se pune $d = R$, compresiunea adevărată dată (4.2.108) este mai mare cu 10% decât cea dată de (4.2.110). Când unul dintre corpuri este rugos cu grosimea t , se obține o aproximație rezonabilă cu relația (4.2.110) punând $d=t$ ($t \gg a$). O altă trăsătură importantă a corpurilor cilindrice dedusă în afara teoriei lui Hertz se referă la faptul că cilindrii reali au lungime finită și că la margini există concentratori puternici de tensiuni. Pentru proiectarea lagărelor cu rostogolire, de exemplu, profilul axial al rozelor se modifică pentru eliminarea concentrării de tensiuni de la capete.

Rezultă următoarele posibilități:



Cazul a) - ambele corpuri au aceeași secțiune plană transversală.

Pe secțiunile transversale acționează tensiunile axiale de compresiune $\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$ și mențin condițiile deformației plane.

La capetele libere aceste tensiuni de compresiune sunt relaxate, permițând solidului să se extindă în direcție axială și reducând presiunea pe capăt. O estimare a reducerii de presiuni la capăt poate fi obținută, asumând că la capătul cilindrului este starea plană de tensiuni.

Ecuția (4.2.108), $\delta = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ 2 \ln \frac{4R}{a_1} - 1 \right\}$, pentru compresiunea radială a cilindrului

poate fi scrisă

$$\delta = \frac{a^2}{2R} \left\{ 2 \ln \frac{4R}{a} - 1 \right\} \quad (4.2.111)$$

care poate fi aplicată pentru ambele stări plane de tensiuni și deformații. Dacă cilindrul nu este întors (fără modificarea generatoarei), compresiunea este uniformă în lungul liniei, așa încât lățimea a este de asemenea uniformă de la un capăt la celălalt.

Acum în starea plană de deformații $a = 2p_0 R \frac{1-\nu^2}{E}$ rezultă $p_0' \approx (1-\nu^2)p_0$.

În starea plană de tensiuni $a = \frac{2p_0' R}{t}$.

Cazul b) rola are capătul pătrat dar suprafața se extinde dincolo de cap.

În acest caz, tensiunile se concentrează la capul rolei, astfel că apare o singularitate. De exemplu, la materiale cu același modul de elasticitate și fără frecare, presiunea de contact la distanță mică de capăt ($y \ll a$) variază cu $y^{-0,23}$.

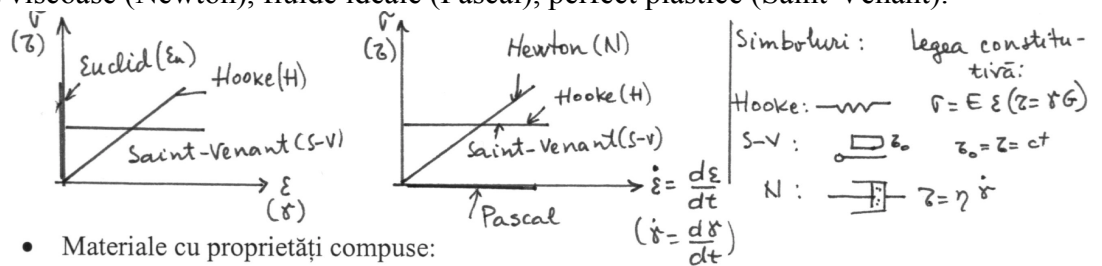
Cazul c) este tipic roleurul rulmenților cilindrici.

Urma suprafeței se extinde în afara capătului rolei și rola are profilul cu raza r se leagă de corpul cilindric neted. Raza r este mult mai mare decât lățimea hertziană 2a.

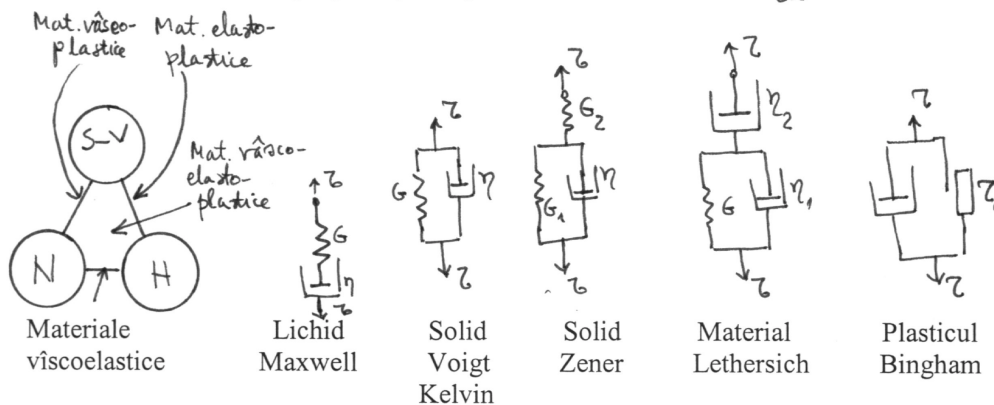
4.3. Contactul normal al solidelor neelastice

4.3.1. Tipuri de materiale

- Ecuația constitutivă a unui material = corelația tensiuni - deformații - timp
- Proprietățile de bază ale materialelor : elasticitatea și vâscozitatea
- Materiale cu proprietăți unitare: perfect rigide (solide Euclid), perfect elastice (Hooke), perfect vâscoase (Newton), fluide ideale (Pascal), perfect plastice (Saint-Venant).



- Materiale cu proprietăți compuse:



Comportarea materialelor în timp (t):

- funcția de fluaj, $F(t) = \gamma(t) / \tau_k$, variația deformațiilor în timp, $\gamma(t)$, la tensiuni constante τ_k ;
- funcția de relaxare, $R(t) = \tau(t) / \gamma_k$, variația tensiunilor în timp, $\tau(t)$, la deformații constante, γ_k .

4.3.2. Criterii de plasticitate

A) Caz general

Tensiunile în jurul unui punct: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Tensiunile principale: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3$.

(1) $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$, unde I_1, I_2, I_3 sunt invariții tensiunilor:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{yx}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Rezolvarea ecuației (1) (cu 3 soluții reale) \Rightarrow tensiuni normale principale

$$(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3),$$

tensiuni tangențiale principale

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

și direcțiile principale, din sistemul

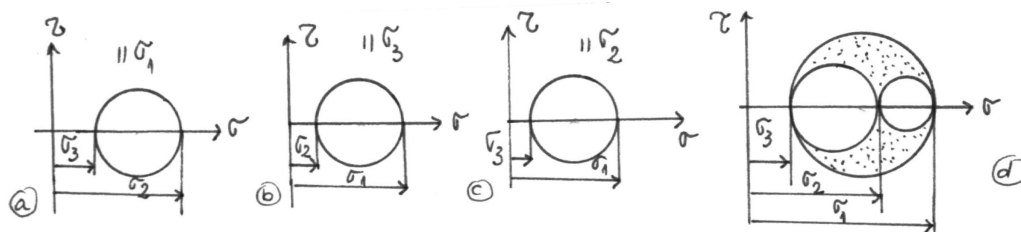
$$\begin{cases} \ell(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = 0 \\ \ell\tau_{yx} + m(\sigma_y - \sigma) + n\tau_{yz} = 0 \\ \ell\tau_{zx} + m\tau_{xy} + n(\sigma_z - \sigma) = 0 \end{cases}$$

ℓ, m, n - cosinusurile directoare ale suprafeței cu tensiuni normale principale.

Tensiunile tangențiale principale sunt maxime în plane la 45° față de triedrul format de cele 3 direcții principale.

Cercul lui Mohr

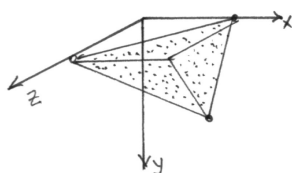
Se consideră plane paralele cu una sau alta dintre direcțiile principale



Plan paralel cu direcția principală a tensiunilor σ_1 și σ_3 .

Pe o suprafață înclinată oarecum față de direcțiile principale, tensiunile sunt date de coordonatele unui punct din zona hașurată.

Tensiuni octaedrice (diagonalele pătratelor)



pentru cub \Rightarrow 8 plane octaedrice

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} =$$

$$= \frac{2}{3} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{1/2}$$

1. Criteriul de plasticitate Saint-Venant-Tresca

$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_T = \text{constant}$. Admițând această condiție și pentru sollicitarea de întindere simplă

$(\sigma_1 = \sigma_c, \sigma_3 = 0) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\sigma_c}{2} = k_T \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c$ - criteriul de plasticitate; σ_c - tensiunea de curgere la tracțiune simplă.

2. Criteriul de plasticitate Huber-Hencky-Mises - energia de deformație pentru modificarea formei atinge o anumită valoare:

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k_M = \text{ct} \quad \text{sau} \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \dots = 2\sigma_c^2$$

Valoarea constantei se obține aplicând criteriul pentru sollicitarea de compresiune simplă :

$$(\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c) \Rightarrow k_M = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_c^2$$

$$\text{sau:} \quad \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{2} = \sigma_c$$

|
intensitatea tensiunilor

Consecințe:

- a) în timpul deformației plastice, intensitatea tensiunilor rămâne constantă;
- b) deformația volumică $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ este numai elastică, chiar și în timpul deformației plastice (deformația plastică se face la volum constant).

- c) $\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \Rightarrow$ în timpul deformației plastice tensiunea

octaedrică are valoarea constantă $\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_c = 0,471 \sigma_c$.

3. Criteriul tensiunilor maxime reduse:

$$\max\{(\sigma_1 - \sigma), (\sigma_2 - \sigma), (\sigma_3 - \sigma)\} = k_r = \frac{2}{3} \sigma_c; \quad \text{unde } \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

B) Aplicarea criteriilor de plasticitate pentru cuple de frecare

a) Contactul bidimensional al cilindrilor

Starea plană de deformații: componenta axială a tensiunilor σ_y este tensiunea principală intermediară σ_2 .

1. După criteriul Saint-Venant-Tresca: $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k_T = \sigma_c$ sau $2\tau_{\max} = \sigma_c$

Dar $\tau_{\max} = 0,3p_0$ în punctul situat pe axa z la $z_0 = 0,78 a \Rightarrow 0,6p_0 = 2k_T = \sigma_c$

$$(k_T = \sigma_c/2)$$

Deci $(p_0)_c = \frac{\sigma_c}{0,6} = 1,67 \sigma_c$ - presiunea maximă la care începe curgerea materialului din

zona $z_0 = 0,78 a$.

2. După criteriul Huber-Hencky-Mises

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \frac{6E}{1+\nu} k_M = 2\sigma_c^2, \quad k_M = \frac{\sigma_c^2(1+\nu)}{3E}$$

Pentru $\nu = 0,3 \Rightarrow$ maximul pentru $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$ este $0,624 p_0^2$ și apare la $0,70 a \Rightarrow (p_0)_c = 3k_M = 1,79 \sigma_c$.

3. După criteriul tensiunilor reduse

$$\max\{(\sigma_1 - \sigma), (\sigma_2 - \sigma), (\sigma_3 - \sigma)\} = k_r = \frac{2}{3} \sigma_c, \text{ unde } \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

Dar $\max\{(\sigma_1 - \sigma), (\sigma_2 - \sigma), (\sigma_3 - \sigma)\} = 0,7p_0$ și apare la $0,67 a$.

Deci $(p_0)_c = 2,7k_r = 1,80\sigma_c$.

Sarcina minimă la care începe curgerea se determină din ecuația Hertz:

$$p_0 = \left(\frac{PE^*}{\pi R} \right)^{1/2} \quad \text{și} \quad P = \frac{p_0^2 \pi R}{E^*}; \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

Deci

$$(P_y)_c = \frac{\pi R}{E^*} (p_0)_c^2 = \begin{cases} \frac{\pi R}{E^*} (1,67)^2 \sigma_c^2 \rightarrow \text{criteriul Tresca} \\ \frac{\pi R}{E^*} (1,79)^2 \sigma_c^2 \rightarrow \text{criteriul Mises} \\ \frac{\pi R}{E^*} (1,80)^2 \sigma_c^2 \rightarrow \text{criteriul tensiunilor reduse} \end{cases}$$

b) Contactul axial-simetric al solidelor de revoluție

În lungul axelor, $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ sunt tensiuni principale și $\sigma_r = \sigma_\theta$

$$\sigma_r / p_0 = \sigma_\theta / p = -(1+\nu) \left\{ 1 - (z/a) \operatorname{arctg}(a/z) \right\} + \frac{1}{2} (1 + z^2/a^2)^{-1};$$

$$\sigma_z / p_0 = -(1 + z^2/a^2)^{-1}$$

Valoarea maximă $(\sigma_z - \sigma_r)$, pentru $\nu = 0,3$, este $0,62 p_0$ la adâncimea $z_0 = 0,48 a$.

1. După criteriul Tresca: $(p_0)_c = 3,2k_M = 1,60 \sigma_c$.

2. După criteriul Mises: $(p_0)_c = 2,8k_M = 1,6 \sigma_c$.

Sarcina minimă pentru inițierea presiunii maxime p_0 ce declanșează curgerea se determină din ecuația Hertz $p_0 = (6PRE^* / \pi^3 R^2)^{1/3}$

Deci $P_c = \frac{\pi^3 R^2}{6E^{*2}} (1,6)^3 \sigma_c^3$; σ_c pentru materialul cu modulul de elasticitate cel mai redus dintre cele două.

Ținând seama și de deformație, $\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}$, se deduce raportul critic $\frac{\delta}{R}$ de la care încep deformațiile plastice:

$$\delta = \left(\frac{9 \cdot \pi^6 \cdot R^4 \cdot 1,6^6 \cdot \sigma_c^6}{16 R E^{*2} \cdot 6^2 \cdot E^{*4}} \right) = R \left(\frac{\sigma_c}{E^*} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1,6^2}{8} \approx 3,1 R \left(\frac{\sigma_c}{E^*} \right)^2$$

sau $\frac{\delta}{R} \approx 3,1 \left(\frac{\sigma_c}{E^*} \right)^2$.

c) Profile generale netede

Pentru cazul general, aria de contact este o elipsă și tensiunile sunt date de ecuațiile prezentate anterior. Tensiunile în lungul axei z determină diferența tensiunilor maxime ($\sigma_2 - \sigma_3$), care sunt în planul ce conține semiaxa mică a elipsei

($a > b$). Această diferență a tensiunilor și tensiunea tangențială maximă τ_1 se mențin constante la modificarea excentricității de la zero la unu: $\tau_{1\max} \approx 0,3p_0$.

| | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| b/a | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| z/b | 0,785 | 0,745 | 0,665 | 0,590 | 0,530 | 0,480 |
| $\tau_{1\max}/p_0$ | 0,300 | 0,322 | 0,325 | 0,323 | 0,317 | 0,310 |

La contactul punctual (b/a), curgerea începe de la adâncimea 0,48 a și la cel liniar (b/a = 0), curgerea începe la 0,78 b.

d) Pană și con

În timpul penetrării unei pene bidimensionale fără frecare, tensiunea tangențială pe interfață este egală cu presiunea $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_z = -p(x)$.

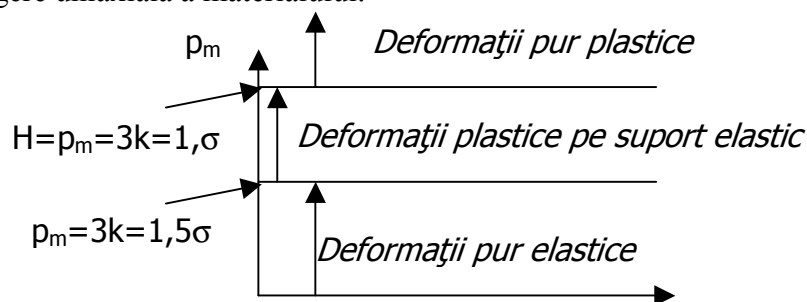
Diferența ($\sigma_1 - \sigma_2$) = ($\sigma_x - \sigma_z$), în lungul axei z , are valoarea maximă

$$\frac{2E^*}{\pi} \text{ctg}\alpha.$$

Prin criteriul Tresca sau Mises (identice pentru $\nu = 0,5$), curgerea pe pană sau pe con are loc când $\text{ctg}\alpha \geq \frac{P_c}{E^*}$.

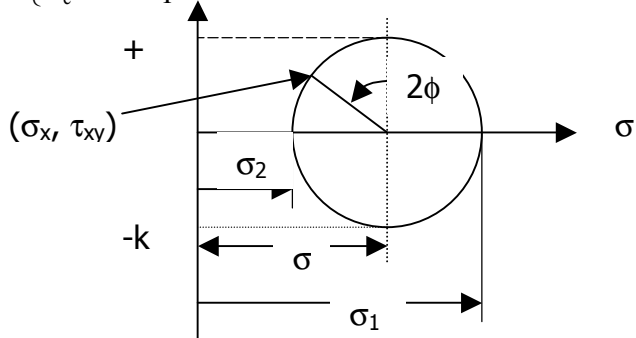
Corelația aproximativă - duritate - curgere

Curgerea începe când presiunea medie are valoarea aproximativă $6k$, $p_m \approx 6k$, și corespunde durității materialului. Pentru metale $H \approx 6k \approx 3\sigma_c$, unde σ_c este tensiunea de curgere uniaxială a materialului.



4.3.3. Contactul unui rigid cu un solid perfect plastic

În starea plană de deformații - criteriul de plasticitate $(\sigma_1 - \sigma_2) = 2k$, unde

$$k = \begin{cases} \sigma_c / 2 & \text{pentru criteriul Tresca} \\ \sigma_c / \sqrt{3} & \text{pentru criteriul Mises} \end{cases}$$


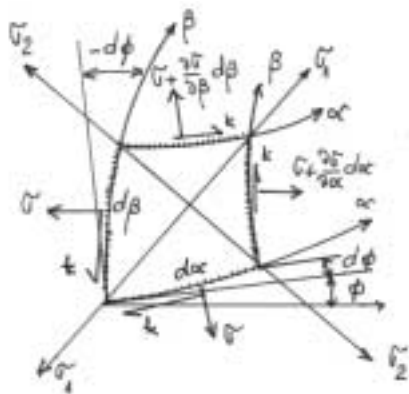
$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Ecuția cercului Mohr

$$(\sigma_x - \sigma)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad \text{sau}$$

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2$$

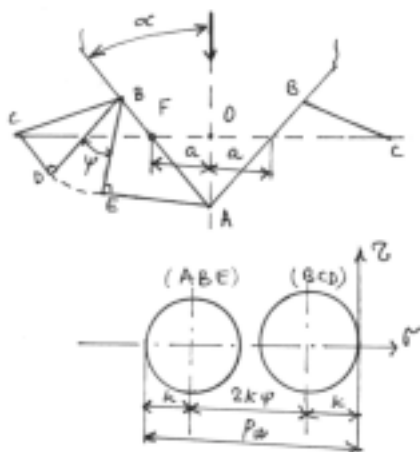
Direcțiile tensiunilor principale relative la o axă fixată în corp definesc direcțiile liniilor de alunecare α și β .



$\sigma_1 = \max$; $\sigma_3 = \min$ - tensiuni principale
 Condiția de echilibru:
 - în direcția α
 $\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} - 2k \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \sigma - 2k \phi = ct$ în direcția α
 - în direcția β
 $\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \sigma + 2k \phi = ct$ în direcția β
 α, β - direcțiile de alunecare.

a) Pană rigidă cu suprafață plană

a₁) Fără frecare



Materialul planului curge plastic în două regiuni simetrice laterale ABCDE. Pana este rigidă, deci nu se deformează.

Se consideră volumul \Rightarrow aria triunghiului AOF = aria FBC.

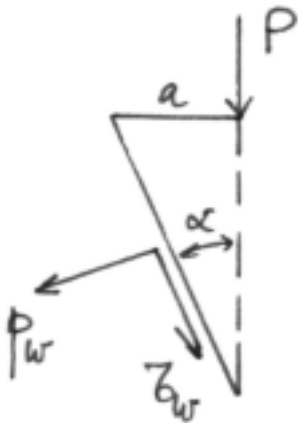
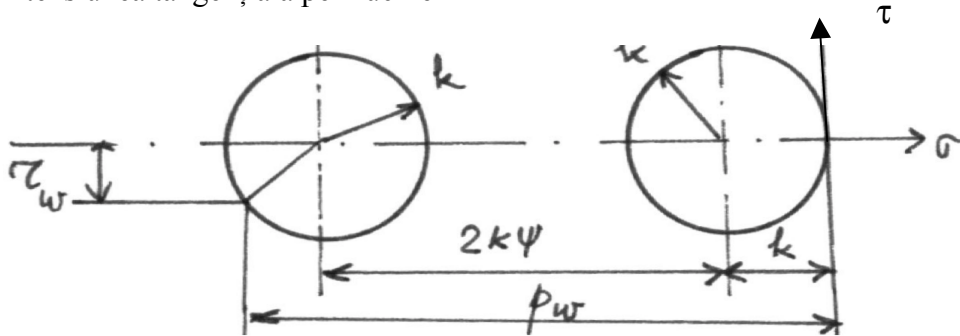
Liniile de alunecare:

Pe fața AB nefiind frecare \Rightarrow că nu apar tensiuni tangențiale. Presiunea normală p_w pe fața penei este tensiune principală și linia de alunecare face cu AB unghiul de 45° . Similar cu suprafața liberă BC. Starea tensiunilor în regiunea triunghiulară BCD este de compresiune uniformă $2k$ ce acționează paralel cu suprafața BC.

$$\Rightarrow \begin{cases} p_m = \frac{P}{2a} = p_w = 2k(1 + \psi) \\ \cos(2\alpha - \psi) = \frac{\cos 2\psi}{1 + \sin \psi} \end{cases} \quad \Rightarrow a \text{ și } p_m \text{ pentru } P, k, \alpha \text{ date.}$$

a₂) Cu frecare $\tau_w = \mu p_w$ ($\mu =$ coeficient de frecare constant)

τ_w - tensiunea tangențială pe muchie



$$\Rightarrow p_w = k(1 + 2\psi + \sin 2\lambda)$$

$$\tau_w = k \cos 2\lambda = \mu p_w$$

Condiția de echilibru mecanic:

$$p_m = \frac{P}{2a} = p_w (1 + \mu \cot \alpha);$$

Condiția de volum constant (deformare fără ecrusare)

$$\cos(2\alpha - \psi) = \frac{\cos 2\psi}{1 + \sin \psi} \quad (1)$$

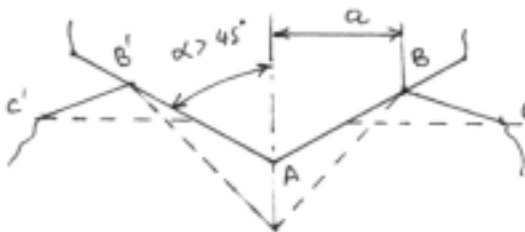
Pentru calculul elementelor de contact - se consideră cunoscute: P, k, α, μ și rezultă a, p_w, τ_w

Observații

1. Lunecarea este posibilă numai dacă $\alpha < 45^\circ$ și apare pe muchia penei.

2. Valoarea critică a coeficientului de frecare μ , corespunde pentru $\lambda = 0$ și rezultă

$$k \cos 0 = \mu k(1 + 2\psi) \Rightarrow \mu = \frac{1}{1 + 2\psi}, \text{ cu } \psi \text{ determinabil din ecuația (1).}$$



3. Dacă $\alpha > 45^\circ$, rezultă că materialul aderă pe suprafața AB, lunecarea având loc pe suprafața BE.

$$p_w = k + 2k\psi + k \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= k(1 + 2\psi - \cos 2\alpha)$$

$$\tau_w = k \sin 2\alpha$$

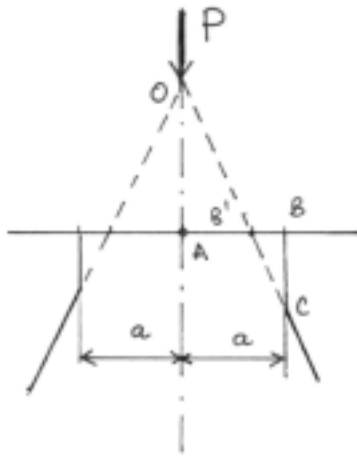
Deci, pentru aderarea materialului pe vârful muchiei penei, trebuie să existe inegalitatea:

$$\mu \geq \frac{\sin \alpha}{1 + 2\psi - \cos 2\alpha} \quad \text{cu } \psi \text{ determinabil din ecuația (1).}$$

Parametrii de contact: $p_m = \frac{P}{2a} = 2k(1 + \alpha) \Rightarrow a = \frac{P}{4k(1 + \psi)}$ și p_w, τ_w (fără alunecare).

b) Pană perfect plastică cu plan rigid

b₁) Forță concentrată în vârf



- Presiunea la care începe curgerea (fără frecare):

$$p = 2k(1 + \alpha) \quad \text{cu } 0 < \alpha < \pi/2 \quad \text{și}$$

$$a_0 = P/2p = P/4k(1 + \alpha), \quad \alpha \text{ în radiani}$$

- Presiunea pe interfață:

$$p_m = \frac{P}{2a} = 2k(1 + \psi), \quad \text{în care unghiul } \psi \text{ se determină din}$$

condiția de volum constant:

(aria $\sigma_{OAB'} = \sigma_{B'BC}$) și $AB = BC$ în funcție de unghiul α .

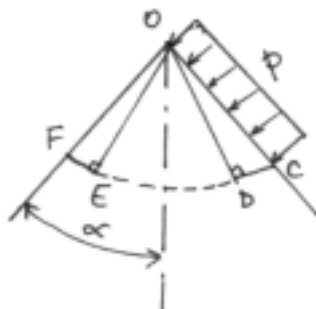
$$\cos^2 \alpha + \sin(\alpha - \psi)[\sin(\alpha - \psi) - 2 \cos \alpha + \sin \alpha \sin \psi] = 0$$

și

$$a = \frac{P}{4k(1 + \psi)}$$

b₂) Forța uniformă distribuită pe muchie (p)

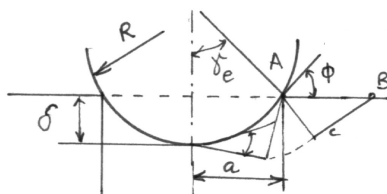
- Presiunea la care începe curgerea pentru $0 < \alpha < \pi/2$



Regiunile OCD și OEF sunt triunghiuri dreptunghice isoscele și regiunea AGF este sector circular, deci

$$\Rightarrow p = 2k(1 + 2\alpha - \pi/2)$$

c) Cilindru rigid pe semiplan plastic - fără frecare



- Presiunea la care începe curgerea

$$p = 2k \left(\phi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \phi_0 \right) + \sqrt{k^2 - \tau}$$

unde ϕ este unghiul dintre tangenta la contur și axa AB

$$\phi_0 = \arcsin \frac{\tau}{k}, \quad \tau \text{ este tracțiunea de forfecare.}$$

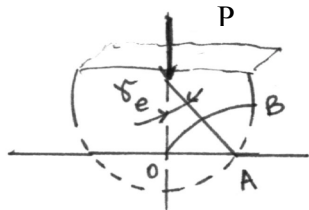
Pentru cilindrul circular

$$p = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} - \phi \right)$$

Pentru o forță dată pe unitatea de lungime a cilindrului \Rightarrow

$$P = 2kR [(\pi + 2)\sin \gamma_e + 2(1 - \cos \gamma_e) - \gamma_e \sin \gamma_e] \Rightarrow \gamma_e \text{ și apoi } \Rightarrow \delta \Rightarrow a$$

d) Cilindru plastic cu plan rigid fără frecare



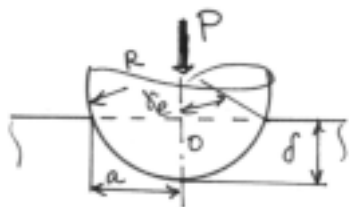
Domeniul cu deformații plastice OAB. Presiunea nu este uniformă.

Pentru cazul particular,

$$\gamma_e = 15^\circ.$$

$$\text{rezultă } p = \begin{cases} 3,92k & \text{în punctul O} \\ 4,62k & \text{în punctul A} \end{cases}$$

e) Sferă rigidă cu semispațiu plastic fără frecare



Domeniul liniilor de alunecare se determină cu diferențe finite.

Presiunea pe suprafață este neuniformă.

De exemplu, pentru $R = 1063 \text{ mm}$ și $\delta = 78 \text{ mm}$.

$$\Rightarrow p = \begin{cases} 7,92k & \text{în punctul A} \\ 4,38k & \text{în punctul B} \end{cases}$$

Pentru o forță dată P cu aproximație, se poate determina γ_e

și ν :

$$P = 2kR^2 [(\pi + 2)\sin \gamma_e + 2(1 - \cos \gamma_e) - \gamma_e \sin \gamma_e] \Rightarrow \gamma_e \text{ și apoi } \Rightarrow \delta \Rightarrow a$$

f) Trunchi de con rigid cu semispații plastic fără frecare

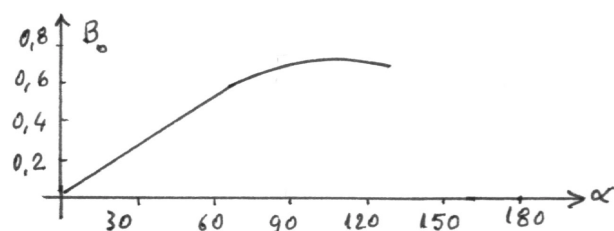
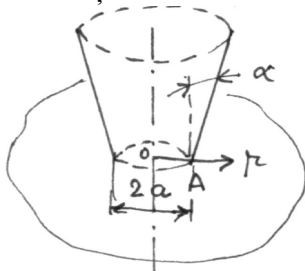
Pentru deformații incipiente, unde suprafața rămâne plană \Rightarrow

$$p = 2k(1 + \alpha + B)$$

$$\text{unde: } 2B = \left[1 - \operatorname{tg}(\pi/4 - \alpha) \ln \left[1 + \frac{\theta - \cos(\pi/4 - \alpha)}{1 - \theta \cos(\pi/4 + \alpha)} \right] + \ln \frac{1 - \theta \cos(\pi/4 + \alpha)}{1 - \theta \cos \pi/4} + \right.$$

$$\left. + \alpha - 2(1 - \theta^2)^{-1/2} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right)^{1/2} \right] \right\} \right\}, \text{ unde}$$

θ este direcția tensiunilor normale principale.



Pentru $\theta = 0$, care corespunde $r = a \Rightarrow p = 2k(1 + \alpha)$ similar cu pana bidimensională.

Pentru $\theta = \sqrt{2}/2$, care corespunde la $r = 0 \Rightarrow p = 2k(1 + \alpha + B_0)$.

4.4. Aria de contact a suprafețelor rugoase

4.4.1. Modelarea rugozităților

În vederea determinării analitice a principalilor parametri de contact ai suprafețelor reale cu rugozități (aria și presiunea reală, deformație, rigiditatea de contact), necesare evaluării frecării și uzării, rugozitățile se modelează sub forme relativ simple (sferă, con, prismă, piramidă, elipsoid etc.).

Aceste forme simple permit deducerea unor relații analitice pentru parametrii de contact și compararea rezultatelor acestor relații cu rezultatele experimentale posibil de evaluat.

Principiul corect de modelare este ca rugozitatea reală să aibă același volum de material cu rugozitatea model.

Pentru aceasta, este necesar ca, pe baza profilogramei rugozităților, să se determine volumul acestora (V_r), pentru o lungime de referință, aleasă ca reprezentativă pentru model sferă.



Se recomandă determinarea adâncimii de nivelare, R_p , adâncimea pentru care $\Sigma_{i+} = \Sigma_{i-}$. Cunoscând această adâncime R_p se consideră că volumul de material al rugozităților de pe lungimea L este $V_r = L R_p \cdot B$, B fiind lățimea caracteristică a rugozităților și se poate aprecia ca fiind lățimea suprafeței de contact (pentru rugozități prismatice) sau altă dimensiune specifică.

a) Calote sferice cu aceeași rază a sferelor (model Greenwood)

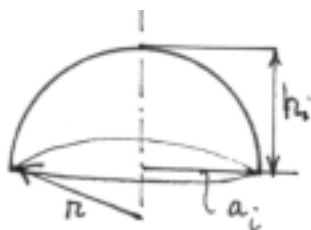
De exemplu, dacă se modelează rugozitățile sub forma unor calote sferice provenind din sfere de aceeași rază r , dar de înălțimi diferite (h_i) și raze diferite (a_i), atunci se consideră că numărul sferelor (n_0) este egal cu numărul tuturor rugozităților de pe lungimea de referință L și că

baza calotelor (raza a_i) se găsește pe baza rugozităților, $\sum_{i=1}^n 2a_i = L$.

Înălțimile calotelor, h_i , se apreciază ca având aceeași lege de variație ca și înălțimile reale ale rugozităților. Dacă notăm prin R_y înălțimea cea mai mare și corespunde rugozității n , R_1 - înălțimea rugozității celei mai mici ($R_1 = k_1 R_y$). dacă se alege planul de referință la baza rugozităților $R_1 = 0$, R_2 - înălțimea rugozității a doua, ca înălțime și $R_2 = k_2 R_y$, $R_3 = k_3 R_y \dots$, $R_i = k_i R_y \dots R_y = R_y$, cu $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_{n_0} - 1, k_{n_0} = 1$ cunoscute, atunci între înălțimile calotelor h_i există aceleași relații:

$$h_1 = k_1 h_y, \quad h_2 = k_2 h_y, \dots, h_{n_0} = k_{n_0} h_y$$

Ținând seama că între înălțimea calotei h_i , raza bazei calotei a_i , raza sferei r și volumul calotei V_i există relații geometrice:



$$V_i = \frac{1}{3} \pi h_i^2 (3r - h_i), \quad a_i = \sqrt{h_i (2r - h_i)},$$

rezultă volumul total

$$V = \sum_{i=1}^{n_i} V_i = \frac{1}{3} \pi h_y^2 \left[3r \sum_{i=1}^{n_i} k_i^2 - h_y \sum_{i=1}^{n_i} k_i^3 \right] = V_r \quad (4.4.1)$$

Din $2 \sum_{i=1}^{n_i} a_i = L \Rightarrow 2 \sqrt{h_y} \left[\sum_{i=1}^{n_i} \sqrt{k_i (2r - k_i h_y)} \right] = L \quad (4.4.2)$

Din aceste două ecuații rezultă înălțimea maximă a caltelor sferice model h_y și raza sferelor r .

b) Calote sferice cu raze diferite ale sferelor

Un alt model este acela prin care se consideră că razele de contact ale calotelor sunt identice pe lungimea de referință de la baza rugozităților :

($a_1 = a_2 = \dots a_{n_0} = a = L/2n_0$, n_0 fiind numărul total al rugozităților), însă înălțimile calotelor (h_i) și razele sferelor din care provin (R_i) sunt variabile.

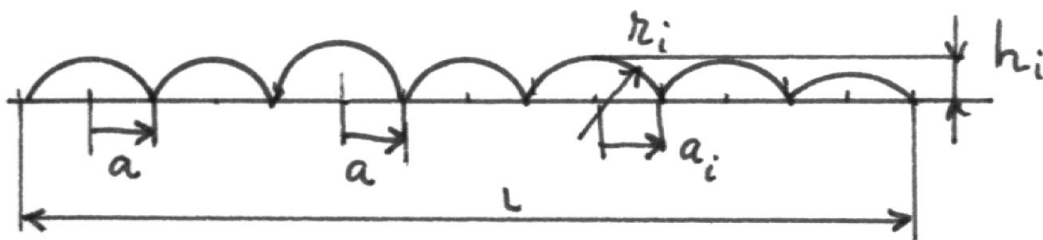
Se acceptă că înălțimile calotelor h_i au aceeași lege de variație ca și aceea a înălțimii rugozităților reale, $h_i = k_i h_y$, k_i - cunoscut ($R_1 = k_1 R_y, \dots R_i = k_i R_y$).

Din condiția de modelare (volum identic, $V_r = V$) rezultă :

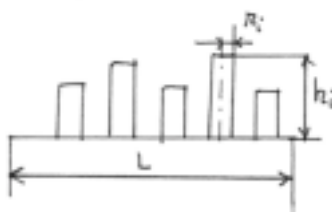
$$V_r = V = \frac{\pi}{6} h_y \left[3a^2 \sum_{i=1}^{n_i} k_i + h_y^2 \sum_{i=1}^{n_i} k_i^3 \right] \quad (4.4.3)$$

Din (4.4.3) $\Rightarrow h_y$ și cunoscând și $a = L/2n_0 \Rightarrow$ razele sferelor

$$R_i = \frac{a^2}{2h_i} + \frac{h_i}{2} = \frac{a^2}{2k_i h_y} + \frac{k_i^2 h_y^2}{2} \quad (4.4.4)$$



c) Tijele cilindrice cu rază constantă (model Kraghelski)



Se consideră tijele cilindrice cu secțiunea frontală ca fiind secțiunea portantă și uniform distribuite pe suprafață. Numărul total al tijelor este egal cu numărul rugozităților de pe suprafața respectivă n_0 . Înălțimea tijelor se apreciază că are aceeași lege ca și aceea a rugozităților reale $h_i = k_i h_y$, h_y - înălțimea maximă a tijelor model.

Se impune ca pe aria nominală, A_n , numărul rugozităților, n_o , este foarte mare și că suprafața frontală a cilindrului este foarte mică, A_i , astfel că

$$\lim_{\substack{A_0 \rightarrow 0 \\ n_o \rightarrow \infty}} A_0 n_o = A_n = \text{constant} \Rightarrow A_0 = \frac{A_n}{n_o} \Rightarrow d_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}}$$

Dacă se adaugă condiția de volum constant, rezultă că la înălțimea Rp_{n_o} (adâncime de nivelare) se poate scrie:

$$V_r = V = n_{op} \sum_{i=1}^{n_y} h_i = n_{op} A_{op} h_y \sum_{i=1}^{n_o} k_i \quad (4.4.5)$$

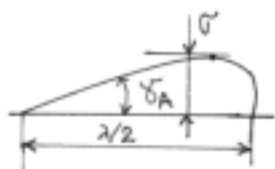
cu numărul n_{op} de rugozități la adâncimea de nivelare, detremabil din profilogramă.

Acceptăm că tijele cilindrice au secțiunea constantă

$$A_{op} = A_0 \left(d_0 = 2r_i = \sqrt{4A_0 / \pi} \right), \text{ din (5)} \Rightarrow h_y = V_r / \left(n_{op} A_0 \sum_{i=1}^{n_o} k_i \right)$$

d) Rugozități prismatice (modelul Archard)

Elemente geometrice caracteristice:



- pasul mediu λ , determinabil din profilogramă;
- abaterea medie pătratică a înălțimii rugozității, determinabilă din profilogramă.

4.4.2. Deformația critică a rugozității

a) Indicele de plasticitate Greenwood-Willamson ψ_G

Ținând seama că starea de deformație a suprafețelor, se apreciază prin duritate (HB), Greenwood și Willamson consideră că atunci când rugozitățile se modelează sub formă de sfere de rază constantă r , deformația δ este elastică atâta timp cât presiunea maximă de contact este mai mică decât 0,4 HB (HB - duritatea Brinell minimă a celor două suprafețe).

Pe baza acestei observații, din relațiile lui Hertz:

$$a = \left(\frac{3Pr}{4E^*} \right)^{1/3}, \quad \delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16rE^*} \right)^{1/3}, \quad p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} \left(\frac{6PE^*}{\pi_3 r^2} \right)^{1/3},$$

se deduce $\frac{\delta}{r} = \left(\frac{rp_0}{E^*} \right).$

Considerând că deformația critică δ este egală cu abaterea medie pătratică a înălțimii rugozității (σ) $\Rightarrow \frac{\sigma}{r} = \left(\frac{\pi \cdot 0,4 \cdot HB}{2E^*} \right)^2$ și definind indicele de plasticitate ψ_G ,

$$\psi_G = \frac{E^*}{HB} \sqrt{\frac{E}{r}} \quad (4.4.7)$$

se poate deduce: σ = abaterea medie pătratică.

- Deformația este elastică dacă $\psi_G < 0,7$;
- Deformația este plastică $\psi_G > 1$;
- Deformația este elastoplastică $0,7 < \psi_G < 1$.

b) Indicele de plasticitate Archard

Pentru rugozități prismatice, Archard propune indicele

$$\psi_A = \frac{E^*}{H_B} \cdot \frac{2\sigma}{\lambda} \quad (4.4.8)$$

cu σ abaterea medie pătratică a înălțimii rugozității și λ pasul mediu.

Pentru $\psi_A > 1$ - deformațiile sunt plastice

$\psi_A < 1$ - deformațiile sunt elastice.

Justificarea teoretică a indicelui ψ_A are la bază presiunea maximă de contact din vârful prismei ($p_0 \approx HB$) și că deformația maximă este egală cu σ .

c) Indicele de plasticitate generalizat

Dacă se consideră ca deformație critică (δ_{cr}), acea deformație care conduce la o energie critică corespunzătoare criteriului de plasticitate, de exemplu, Huber-Hencky-Mises, atunci se definește

$$\psi_p = \sqrt{\delta_{cr} / \sigma} \quad (4.4.9)$$

ca deformația raportată la abatere medie pătratică a înălțimii rugozității.

Deformația critică δ_{cr} se poate determina pe baza geometriei rugozităților model și a caracteristicilor de material.

Pentru cazuri concrete, cu unele ipoteze simplificatoare, se deduc condițiile ca deformațiile să fie elastice.

De exemplu, pentru suprafețe de frecare cu rugozitatea evaluată prin înălțimea medie R_a și pasul mediu λ , deformațiile sunt elastice dacă

$$\frac{(HB)(1 - \nu_p^2)}{E} \cdot \frac{\lambda}{R_a} > 6,$$

HB - duritatea Binell, ν_p - coeficientul lui Poisson, E - modulul de elasticitate.

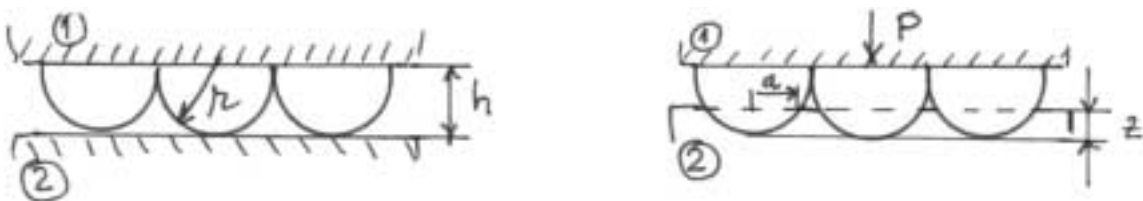
Pentru oțel cu $HB = 2 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$, rezultă raportul λ/R_a pentru a obține deformații elastice.

În ceea ce privește direcția rugozităților relative ale celor două suprafețe de frecare se deduce că pentru rugozitățile cu direcțiile perpendiculare, indicele de plasticitate are valoarea cea mai mare, suportând deci în regim elastic sarcini mai ridicate, sau, la aceeași sarcină, deformațiile sunt mai mici decât în cazul în care direcțiile rugozităților sunt paralele.

4.4.3. Calculul ariei reale

a) Modelul rugozităților sferice

a) Rugozități calote sferice cu aceeași rază a sferelor și aceeași înălțime a calotelor.



Fie suprafața 1 cu rugozități de rază r și înălțime h în contact cu o suprafață ideală 2 perfect plană.

Se consideră cunoscut numărul rugozităților suprafețelor de referință, n_0 .

Pentru calculul ariei reale $A_r = n_0 \pi a^2$, este necesară cunoașterea razei de contact a calotei sferice. La o forță exterioară dată, P , se face inițial ipoteza că deformațiile sunt elastice și se aplică relațiile lui Hertz.

$$a = \left[\frac{3(P/n_0)r}{4E^*} \right]^{1/3}, \quad \delta = \frac{a^2}{r}, \quad p_0 = \frac{3P/n_0}{2\pi a^2}.$$

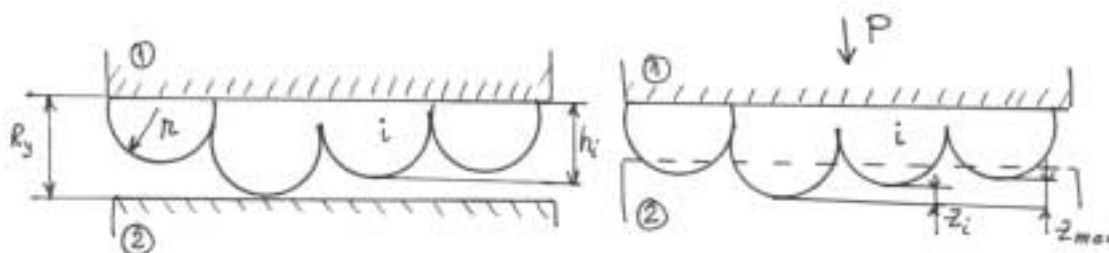
Dacă raportul $\frac{\delta}{r} \leq \left(\frac{\delta}{r} \right)_{cr} = 3,1 \left(\frac{\sigma_c}{E^*} \right)^2$, $\left(\frac{\delta}{r} \right)_{cr}$ fiind raportul critic ce conduce la deformații plastice (criteriul de plasticitate), atunci deformațiile sunt elastice; dacă nu este respectată această restricție, atunci se determină mărimea cu relațiile de la contactul plastic.

Deoarece sferile sunt identice \Rightarrow

$$\delta = z \quad \text{și aria reală } A_r = n_0 \pi \left[\frac{3(P/n_0)r}{4E^*} \right]^{2/3} \quad \text{și presiunea maximă } p_0 = \left(\frac{6(P/n_0)E^{*2}}{\pi^3 r^2} \right)^{1/3};$$

$$\tau_{\max} = 0,31 p_0 \quad (\nu = 0,3) \quad \text{la } z_0 = 0,48 a.$$

a) *Rugozități calote sferice de aceeași rază și înălțimi variabile*



Se acceptă că rugozitățile unei suprafețe au formă de calote sferice de aceeași rază, dar înălțimi variabile. Cealaltă suprafață este plană și ideală (fără rugozități).

Se consideră că sarcina exterioară P este preluată de un număr mai mic sau mai mare de asperități (rugozități), după cum deformația este mai mică sau mai mare.

Fie n - numărul asperităților care se găsesc la nivelul superior lui z , și n_0 - numărul total al asperităților de pe suprafața de contact, cunoscând repartiția înălțimii rugozității $f(z)$, se determină numărul de rugozități ce se găsesc în stratul elementar dz

$$f(z) = n/n_0, \quad dn = n_0 f(z) dz$$

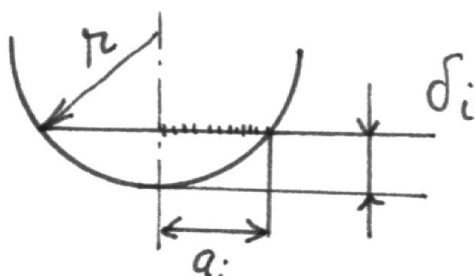
$$A_i = \pi a_i^2 = \pi [r^2 - (r - \delta_i)^2] \approx 2\pi r \delta_i = 2\pi R_y \varepsilon_i \quad (4.4.10)$$

unde $\varepsilon_i = \delta_i / R_y$ este deformația relativă.

Prin secționarea profilului rugozității la un anumit nivel ε , fiecare suprafață de contact, pentru care $z \leq \varepsilon$, crește cu

$$\Delta A_i = 2\pi r R_y (\varepsilon - z) \quad (4.4.11)$$

Prin însumarea tuturor segmentelor sferice se obține



$$A_r = 2\pi r R_y \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z) dz = 2\pi r R_y n_0 \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z) f'(z) dz \quad (4.4.12)$$

Ținând seama că sarcina exterioară este preluată de cele n asperități ce se găsesc în contact, rezultă:

$$P = n_0 \int_0^\varepsilon P(\varepsilon - z) f'(z) dz = 2\pi r R_y n_0 \int_0^\varepsilon p_r (\varepsilon - z) f'(z) dz \quad (4.4.13)$$

cu $p_r(\varepsilon - z)$ - presiunea reală la nivelul $\varepsilon - z$.

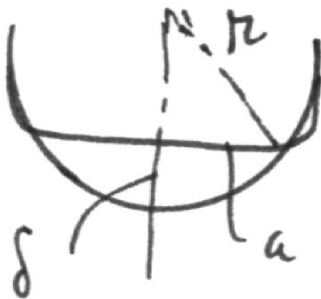
Din ecuația deformației elastice, $\delta = a^2 / R = \left(\frac{9P^2}{16rE^*} \right)^{1/3}$, pentru

$$\delta = R_y (\varepsilon - z) \Rightarrow P(\varepsilon - z) = \frac{4}{3} E^* r^{1/2} (\varepsilon - z)^{3/2} \cdot R_y^{3/2} \quad (4.4.14)$$

Deci
$$P = n_0 \cdot \frac{4}{3} E^* r^{1/2} R_y^{3/2} \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z)^{3/2} f'(z) dz.$$

Pentru deformații plastice, corelația forță-deformație este de forma (4.4.13), cu $p_r = c\sigma_c \approx 3\sigma_c$, c - coeficient dependent de forma rugozităților (pentru rugozități sferice $c \approx 3$).

$$P = 2\pi r R_y n_0 c \sigma_c \int_0^\varepsilon f'(z) dz = 2\pi r R_y n_0 c [f(\varepsilon) - f(0)] \quad (4.4.15)$$



$$a^2 = r^2 - (r - \delta)^2 = 2r\delta$$

$$P = \pi a^2 p_r = \pi a^2 c \sigma_c \approx \pi a^2 3\sigma_c \Rightarrow$$

$$P(\varepsilon - z) = \pi \cdot 2r\delta c \sigma_c = \pi \cdot 2r R_y (\varepsilon - z)$$

Cunoașterea funcției $f(z)$ permite calculul deformației ε a rugozităților sub sarcina exterioară P .

Câteva cazuri particulare:

1. *Repartiția liniară a înălțimii*

$$f(z) = kz, \quad k \text{ fiind constantă} \Rightarrow f'(z) = k$$

Înlocuind în (12) \Rightarrow

$$A_r = 2\pi r R_y n_0 \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z) k dz = 2\pi r R_y n_0 k \left(\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) = \pi r R_y n_0 k \varepsilon^2 \quad (4.4.16)$$

Din (14) \Rightarrow

$$P = n_0 \frac{4}{3} E^* r^{1/2} R_y^{3/2} k \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z)^{3/2} dz = n_0 \frac{4}{3} E^* r^{1/2} k \cdot \frac{2}{5} \varepsilon^{5/2} = \frac{8}{15} n_0 k E^* r^{1/2} \varepsilon^{5/2} \cdot R_y^{3/2} \quad (4.4.17)$$

Determinând pe ε din (4.4.17) și înlocuind în (4.4.16) \Rightarrow

$$A_{re} = \pi \left(\frac{15}{8} \right)^{4/5} \cdot (n_0 k)^{1/5} \cdot \left(\frac{R_y}{r} \right)^{3/5} \left(\frac{P}{E^* r R_y} \right)^{4/5} \cdot r^2 \quad (4.4.18)$$

În condițiile în care determinarea razei de curbură a rugozității r și a numărului de asperități n_0 se face pe baza unei lungimi de referință L din profilograma suprafeței, se poate calcula aria nominală A_n ,

$$A_n \approx 2\pi r n_0 k L, \quad (A_n = n\pi a^2 \approx n\pi \cdot 2\pi\delta = 2\pi r n_0 k L)$$

și, deci, aria reală adimensională

$$\eta_{re} = \frac{A_{re}}{A_n} = \frac{0,82}{(n_0 k)^{4/5}} \left(\frac{F}{E^* R_y r} \right)^{4/5} \cdot \left(\frac{R_y}{r} \right)^{3/5} \cdot \left(\frac{r}{L} \right) \quad (4.4.19)$$

Pentru contactul plastic, din ecuația (4.4.15),

$$P = 2\pi r R_y n_0 c \sigma_c [f(\varepsilon) - f(0)] = 2\pi r R_y n_0 c \sigma_c k \varepsilon \quad (4.4.20)$$

se deduce deformația relativă ε .

Prin înlocuirea deformației ε din (4.4.20) în (4.4.16) rezultă:

$$\eta_{rp} = \frac{A_{rp}}{A_n} = \frac{0,05}{2(n_0 k)^2} \cdot \left(\frac{F}{r R_y c \sigma_c} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_y}{r} \right) \left(\frac{r}{L} \right) \quad (21)$$

2. Repartiția polinomială a înălțimii

Se consideră că înălțimea este dispusă după o lege polinomială, dedusă pe baza curbei de portanță Abbot-Firstone

$$f(z) = n / n_0 = tz^s \rightarrow n = n_0 tz^s, \quad f'(z) = tsz^{s-1} \quad (4.4.22)$$

Rezultă $dn = n_0 stz^{s-1} dz$, în care t și s se vor determina pe baza curbei de portanță.

Înlocuind în (4.4.12), rezultă:

$$A_r = 2\pi r R_y n_0 \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z) tsz^{s-1} dz = 2\pi r R_y n_0 t s \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z) z^{s-1} dz = 2\pi r R_y n_0 t \varepsilon^{s+1} / (s+1) \quad (4.4.23)$$

Pentru contactul elastic, corelația forță - deformație se determină din (4.4.14) și, schimbând variabila $z = \varepsilon\gamma$, va rezulta:

$$\begin{aligned} F &= \frac{4}{3} E^* n_0 r^{1/2} R_b^{3/2} \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z)^{3/2} tsz^{s-1} dz = \frac{4}{3} E^* n_0 t s r^{1/2} R_y^{3/2} \int_0^\varepsilon (\varepsilon - z)^{3/2} z^{s-1} dz = \\ &= A \int_0^1 \varepsilon^{3/2} (1-\gamma)^{3/2} \varepsilon^{s-1} \gamma^{s-1} \varepsilon \cdot d\gamma = A \cdot \varepsilon^{s+3/2} \int_0^1 (1-\gamma)^{3/2} \gamma^{s-1} d\gamma = A \varepsilon^{s+3/2} B(5/2; s) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} E^* n_0 t r^{1/2} R_y^{3/2} \cdot \epsilon^{s+3/2} B(5/2; s) \quad (4.4.24)$$

Unde $B(5/2; s) = \int_0^1 (1-\gamma)^{s-1} \cdot \gamma^{5/2-1} d\gamma$ este funcția Beta (integrala Euler de prima speță) și se poate determina pe baza funcției Gamma $\Gamma(x)$

$$B(5/2; s) = \frac{\Gamma(5/2) \cdot \Gamma(s)}{\Gamma(5/2 + s)}$$

Dacă se ține seama că $\eta_r = \frac{A_2}{A_n} = b\epsilon^\nu$, (curba de portanță Abbott - Firstone)

din (4.4.23)

$$\eta_{re} = \frac{2\pi r R_y n_0 t \epsilon^{s+1}}{(s+1)A_n} = b\epsilon^\nu \Rightarrow \quad (4.4.25)$$

$$\Rightarrow s = \nu - 1 \quad \text{și} \quad n_0 t = b\nu A_n / (2\pi r R_y) \quad (4.4.25')$$

Deci, forța $F = \frac{4}{3} E^* \frac{b\nu A_n}{2\pi r R_y} \cdot (\nu - 1) r^{1/2} \cdot R_y^{3/2} \cdot \epsilon^{\nu+1/2} B(5/2; \nu - 1) \quad (4.4.26)$

Eliminând ϵ între (4.4.25) și (4.4.26) \Rightarrow

$$\eta_{re} = k_\nu \left[\left(\frac{F}{E^* A_n} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta_r}} \right]^{2\nu/(2\nu+1)} \quad (4.4.27)$$

în care $k_\nu = \left[\frac{3}{2} \pi \Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu\right) / 4\nu(\nu - 1) \Gamma(5/2) \Gamma(\nu - 1) \right]^{2\nu/(2\nu+1)}$

și $\Delta_r = R_y / (rb^{1/\nu})$ parametrul complex al microgeometriei.

Analog, se analizează aria reală și pentru alte modele de rugozități și legi de repartiție a înălțimii.