METODE NUMERICE

Aplicatia 1

Un corp cade liber de la o anumita inaltime. Se cunosc: masa corpului m = 50 kg, coeficientul de frecare cu aerul c = 12,5 kg/s si acceleratia gravitationala g = 9,81 m/s
Se cere sa se gaseasca legea de variatie a vitezei in functie de timp si sa se puna in evidenta erorile introduse de metodele numerice comparativ cu solutia analitica.

Rezolvare:

Problema se va rezolva in doua moduri: analitic si numeric.

Datele de intrare necesare rezolvarii sunt:

$m := 50$	(kg)	- masa corpului
$c := 12.5$	(kg/s)	- coeficientul de frecare cu aerul
$g := 9.81$	(m/s^2)	- acceleratia gravitationala
$G := m \cdot g$	(N)	- forta de greutate
$t_f := 30$	(s)	- timpul final al miscarii

Solutia analitica:

Miscarea corpului se realizeaza sub actiunea a doua forte: forta de greutate si forta de frecare cu aerul. Cele doua forte nu se anuleaza reciproc si, prin urmare forta rezultant duce la miscarea accelerata a corpului.
Din ecuatia fortelor rezulta acceleratia corpului:
R = G - Ff
sau
ma = mg - cv => a = g - cv/m <=> dv/dt = g - cv/m (1)
Prin integrarea acestei ecuatii se obtine ecuatia vitezei:

$$v_{a1}(t) := \frac{g \cdot m}{c} \cdot \left(1 - e^{\frac{-c}{m} \cdot t}\right)$$

Viteza corpului dupa un timp t = 30 s este: $v_{a1}(30) = 39.218$ (m/s)

Rezolvarea ecuatiei (1) - ecuatie diferentiala de ordinul I - se poate face si cu ajutorul functiei ODESOLVE punand conditia la limita v(t=0) = 0 :

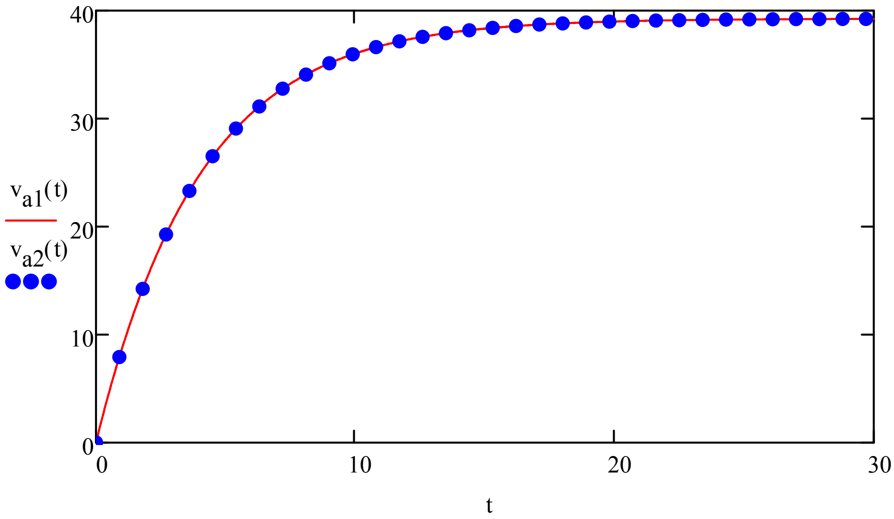
Given

$$v_{a2}'(t) = g - \frac{c}{m} \cdot v_{a2}(t)$$

$v_{a2}(0) = 0$

$v_{a2} := \text{Odesolve}(t, t_f)$

In graficul urmator sunt redate solutiile analitice de mai sus. Se observa suprapunerea perfecta a celor doua functii.



Solutia numerica:

Pentru rezolvarea numerica a problemei se va diviza timpul in n secvente Δt, in fieca secventa viteza fiind constanta. Viteza la o anumita secventa de timp sa va calcula in functie de viteza secventei anterioare, tinand cont de faptul ca acceleratia este constanta:

$v_i = v_{i-1} + a\ \Delta t = v_{i-1} + (g - cv_{i-1}/m)\ \Delta t$

Pentru derularea calculului pas cu pas, sunt necesare cunoasterea valorii vitezei la momentul zero (conditia initiala), precum si pasul de timp. Se considera un pas initia Δt si un numar de iteratii n. Se va rezolva problema pentru mai multi pasi Δt punandu-se in evidenta importanta pasului de timp asupra erorilor.

Cazul 1:

$\Delta t_1 := 4$ (s)

$n_1 := \dfrac{t_f}{\Delta t_1}$ - numarul de iteratii

Se considera un sir i: $i := 1 .. n_1 + 1$

$t_{1_i} := \Delta t_1 \cdot (i - 1)$

Viteza initiala: $v_{1_1} := 0$ $v_{1_{i+1}} := v_{1_i} + \left(g - \dfrac{c}{m} \cdot v_{1_i}\right) \cdot \Delta t_1$

Cazul 2:

$\Delta t_2 := 2$ (s) $\qquad n_2 := \dfrac{t_f}{\Delta t_2} \qquad i := 1 .. n_2 + 1 \qquad t_{2_i} := \Delta t_2 \cdot (i - 1)$

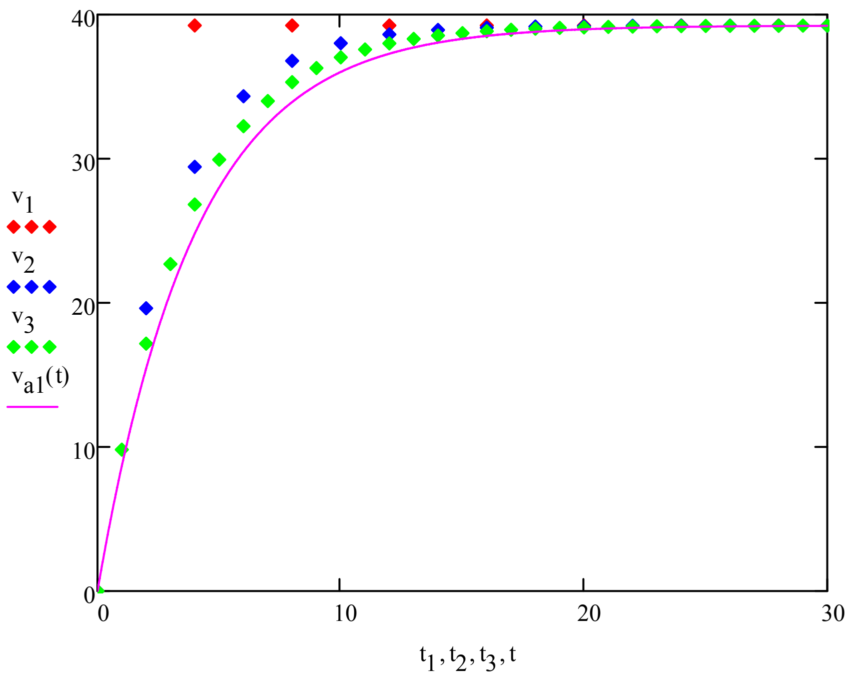
Viteza initiala: $\qquad v_{2_1} := 0 \qquad v_{2_{i+1}} := v_{2_i} + \left(g - \dfrac{c}{m} \cdot v_{2_i}\right) \cdot \Delta t_2$

Cazul 3:

$\Delta t_3 := 1$ (s) $\qquad n_3 := \dfrac{t_f}{\Delta t_3} \qquad i := 1 .. n_3 + 1 \qquad t_{3_i} := \Delta t_3 \cdot (i - 1)$

Viteza initiala: $\qquad v_{3_1} := 0 \qquad v_{3_{i+1}} := v_{3_i} + \left(g - \dfrac{c}{m} \cdot v_{3_i}\right) \cdot \Delta t_3$

In graficul urmator sunt reprezentate solutiile numerice pentru cele 3 cazuri si solutia analitica. Se observa ca pentru pasi de timp mici erorile se micsoreaza.



Comparatia rezultatelor:

- solutia analitica: $\qquad v_{a1}(30) = 39.2183$

- solutia numerica (cazul 1): $\qquad \max(v_1) = 39.24$

- solutia numerica (cazul 2): $\qquad \max(v_2) = 39.2394$

- solutia numerica (cazul 3): $\qquad \max(v_3) = 39.23474$

Eroarea relativa:

- cazul 1: $\varepsilon_1 := \left|\frac{v_{a1}(30) - \max(v_1)}{v_{a1}(30)}\right|$ $\varepsilon_1 = 0.000553$

- cazul 2: $\varepsilon_2 := \left|\frac{v_{a1}(30) - \max(v_2)}{v_{a1}(30)}\right|$ $\varepsilon_2 = 0.000538$

- cazul 3: $\varepsilon_3 := \left|\frac{v_{a1}(30) - \max(v_3)}{v_{a1}(30)}\right|$ $\varepsilon_3 = 0.000419$