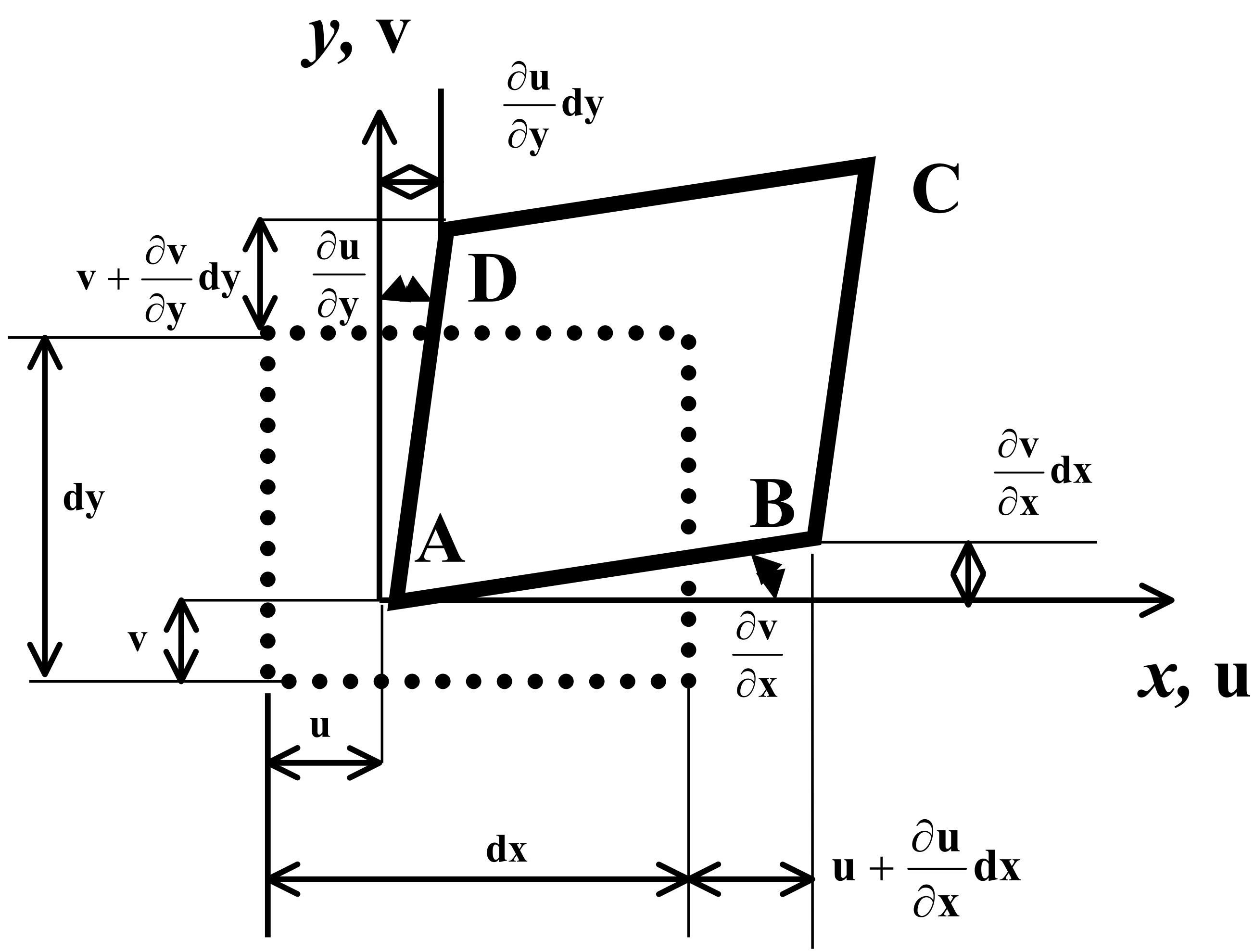
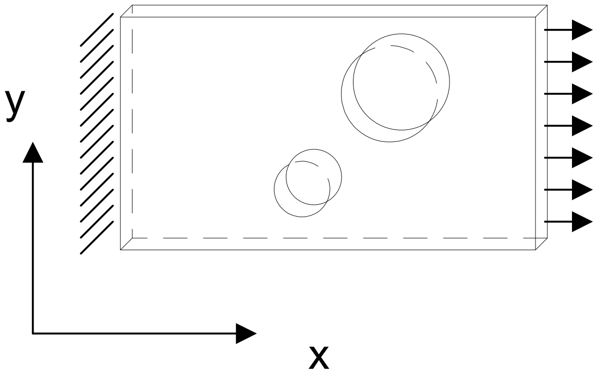
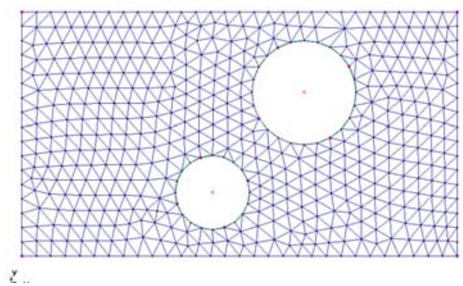
Elemente pentru starea plană de tensiuni / deformaţii



Deplasările şi rotirile liniilor unui element în planul x-y

Starea plană de tensiuni:





Pasul 1: Abstractizarea

$$\sigma_z = 0 \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) - \text{se neglijează}$$

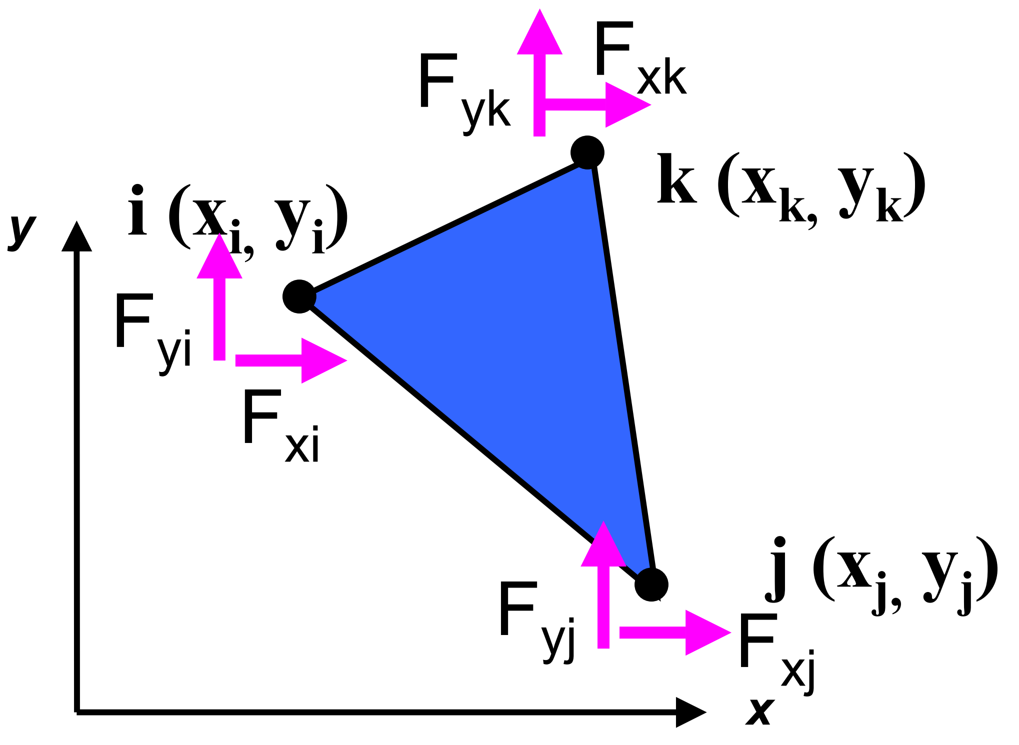
Relaţia tensiuni- deformaţii specifice se scrie:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Elementul triunghiular -Triang

Element de tip arie, utilizabil pentru starea plană de tensiuni, de deformaţii sau pentru probleme axial-simetrice



Stabilirea deplasărilor pentru nodurile elementului

Pentru un nod:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

Pentru întregul element

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

Relaţia care trebuie stabilită este de forma:

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} u_i \\ \mathrm{v}_i \\ u_j \\ \mathrm{v}_j \\ u_k \\ \mathrm{v}_k \end{Bmatrix}$$

unde [K] este matricea de rigiditate a elementului

Pasul 2: se alege funcţia pentru deplasări

Se alege o funcţie liniară:

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$
$$v(x,y) = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix}$$

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

La nivelul nodurilor rezultă:

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i$$

$$u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j$$

$$u_k = a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k$$

$$\mathrm{v}_i = a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i$$

$$\mathrm{v}_j = a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j$$

$$\mathrm{v}_k = a_4 + a_5 x_k + a_6 y_k$$

Sistemul se poate scrie decuplat, respectiv:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

de unde rezultă:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

respectiv:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_j y_k - y_j x_k & x_k y_i - y_k x_i & x_i y_j - y_i x_j \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

cu:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = x_i\left(y_j - y_k\right) + x_j\left(y_k - y_i\right) + x_k\left(y_i - y_j\right)$$

similar :

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_j y_k - y_j x_k & x_k y_i - y_k x_i & x_i y_j - y_i x_j \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{v}_i \\ \mathrm{v}_j \\ \mathrm{v}_k \end{Bmatrix}$$

Funcţiile de deplasare rezultă:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ \mathrm{v}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \mathrm{v}_i \\ u_j \\ \mathrm{v}_j \\ u_k \\ \mathrm{v}_k \end{Bmatrix}$$

scris condensat: $$\{\psi\} = [N]\{\delta\}$$

cu :

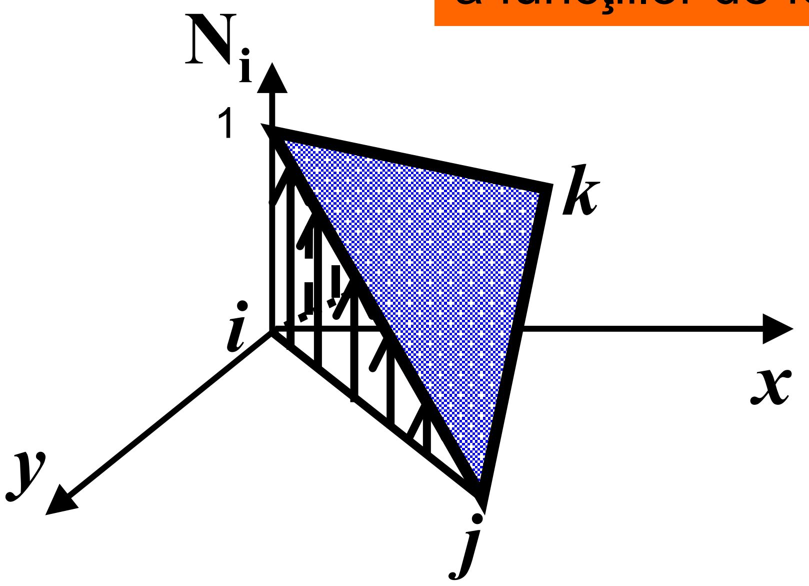
$$N_i = \frac{1}{2A}\left(x_j y_k - y_j x_k + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y\right)$$

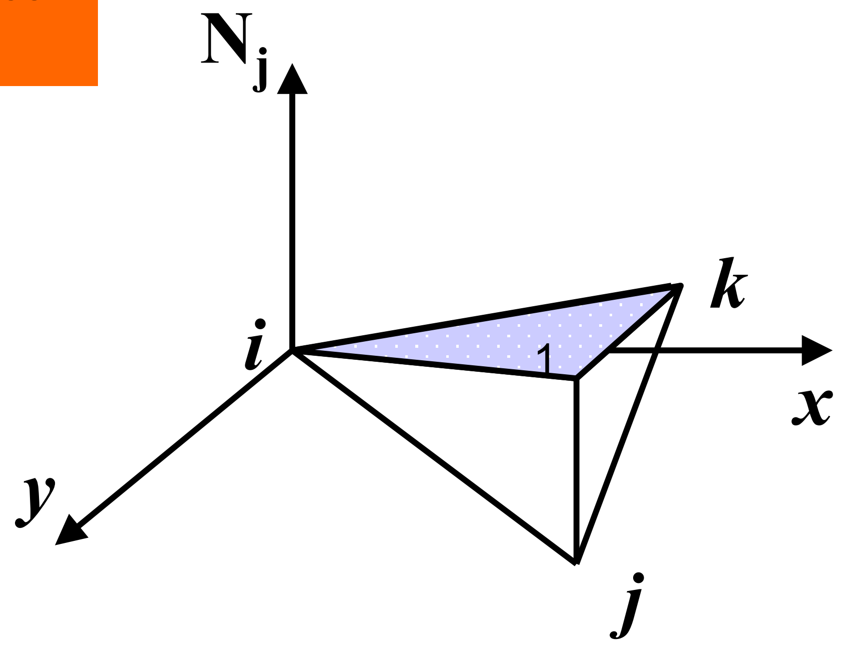
$$N_j = \frac{1}{2A}\left(x_k y_i - y_k x_i + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y\right)$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left(x_i y_j - y_i x_j + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y\right)$$

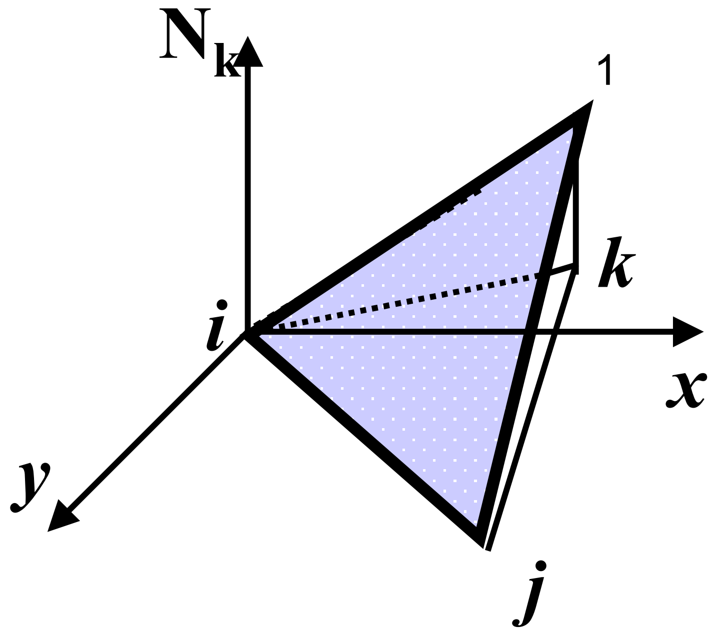
(funcţiile de formă)

Reprezentarea grafică a funcţiilor de formă





$$N_i + N_j + N_k = 1$$



Pasul 3: definirea relaţiilor pentru deformaţiile specifice

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left((y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left((x_k - x_j)\mathrm{v}_i + (x_i - x_k)\mathrm{v}_j + (x_j - x_i)\mathrm{v}_k\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2A}\begin{pmatrix}(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_m + \\ (y_j - y_k)\mathrm{v}_i + (y_k - y_i)\mathrm{v}_j + (y_i - y_j)\mathrm{v}_k\end{pmatrix}$$

scris condensat:

$$\{\varepsilon\} = [B]\cdot\{\delta\}$$

cu:

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_j-y_k & 0 & y_k-y_i & 0 & y_i-y_j & 0 \\ 0 & x_k-x_j & 0 & x_i-x_k & 0 & x_j-x_i \\ x_k-x_j & y_j-y_k & x_i-x_k & y_k-y_i & x_j-x_i & y_i-y_j \end{bmatrix}$$

Pasul 4: Calculul matricei de rigiditate

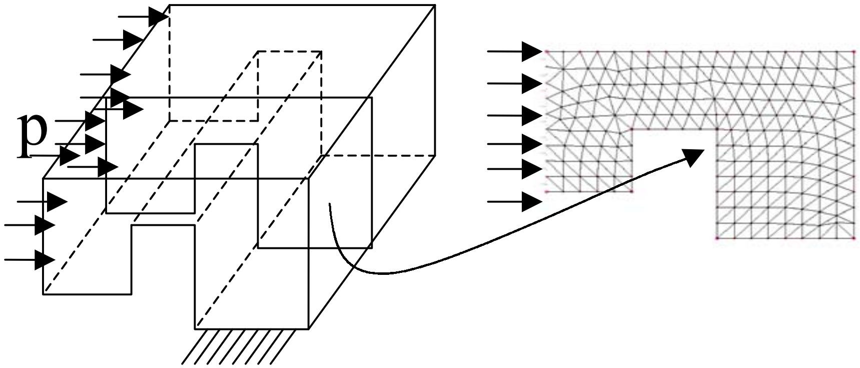
$$[\mathrm{K}]=\iiint_V [B]^T\,[D]\,[B]\,dV$$

$$[\mathrm{K}] = t \iint_A [B]^T [D]\,[B]\,dx\,dy$$

$$[\mathrm{K}] = t\,A[B]^T [D]\,[B]$$

unde t - este grosimea elementului

Starea plană de deformaţii



Structură cu lăţime mare, pentru care se poate considera că deformaţia şi solicitarea este identică în toate secţiunile transversale

Un calcul similar se face şi pentru starea plană de deformaţii (plane strain), caz în care în relaţia $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ matricea [***D***] are expresia:

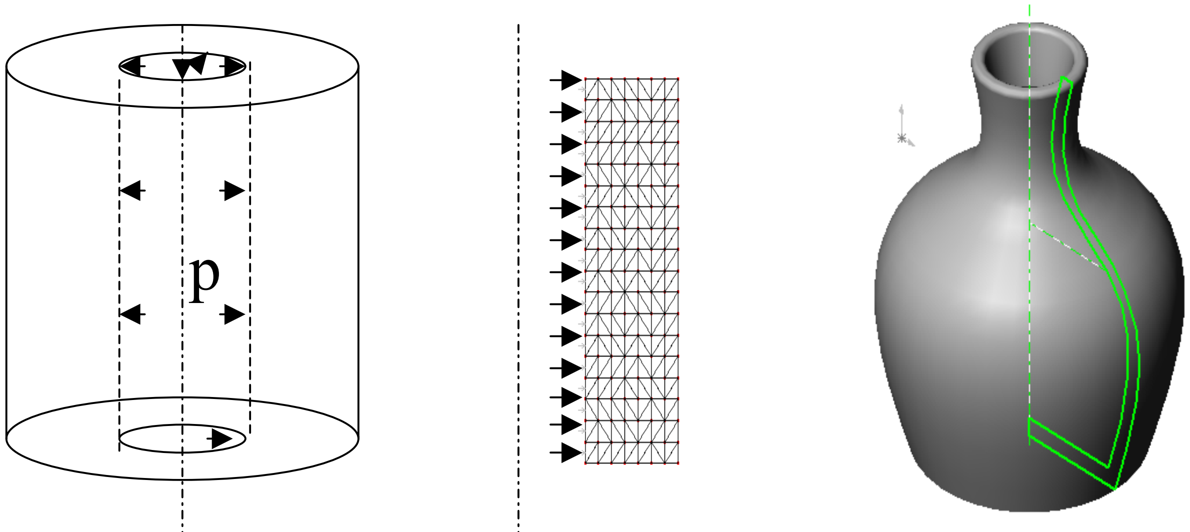
$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

iar grosimea t este egală cu 1

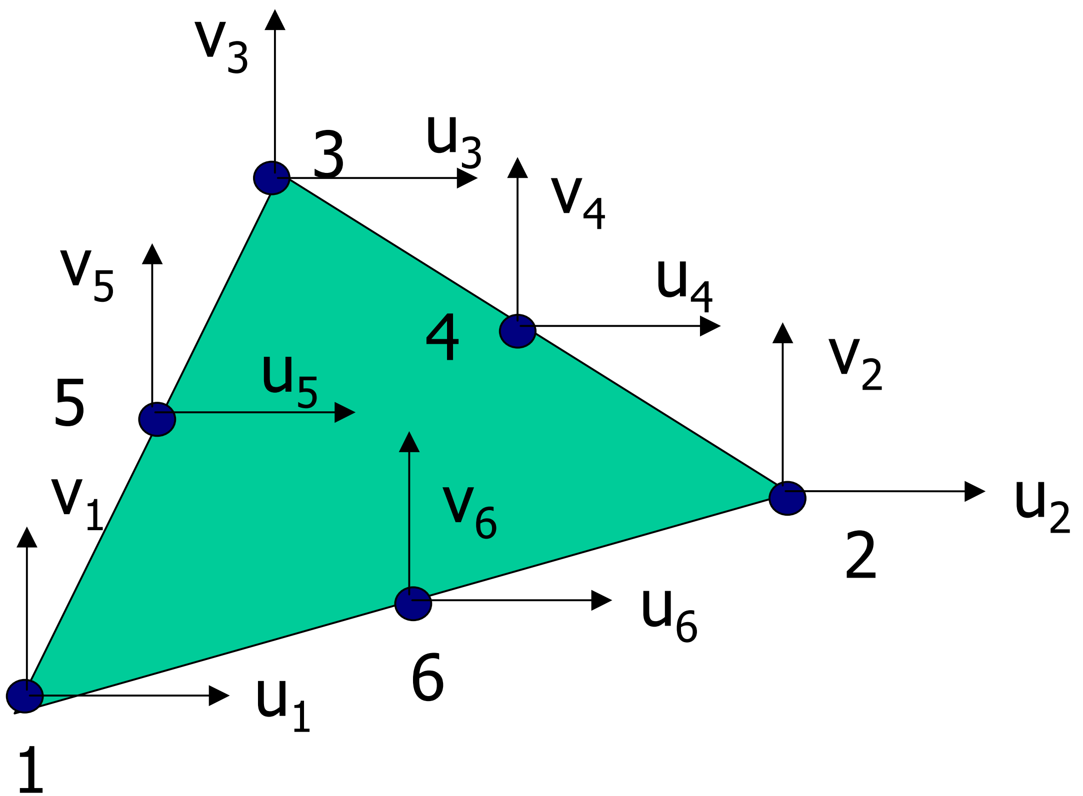
Matricea de rigiditate a elementului se calculează similar ca în cazul precedent, cu particularizările corespunzătoare pentru [D] şi t :

$$[K] = \iiint_V [B]^T [D]\, [B]\, dV$$

O formulare similară există şi pentru cazul unei configuraţii axial simetrice (care îşi păstrează această caractristică şi sub încărcare şi care poate fi tratată ca o problemă 2D



Elemente de ordin superior



$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

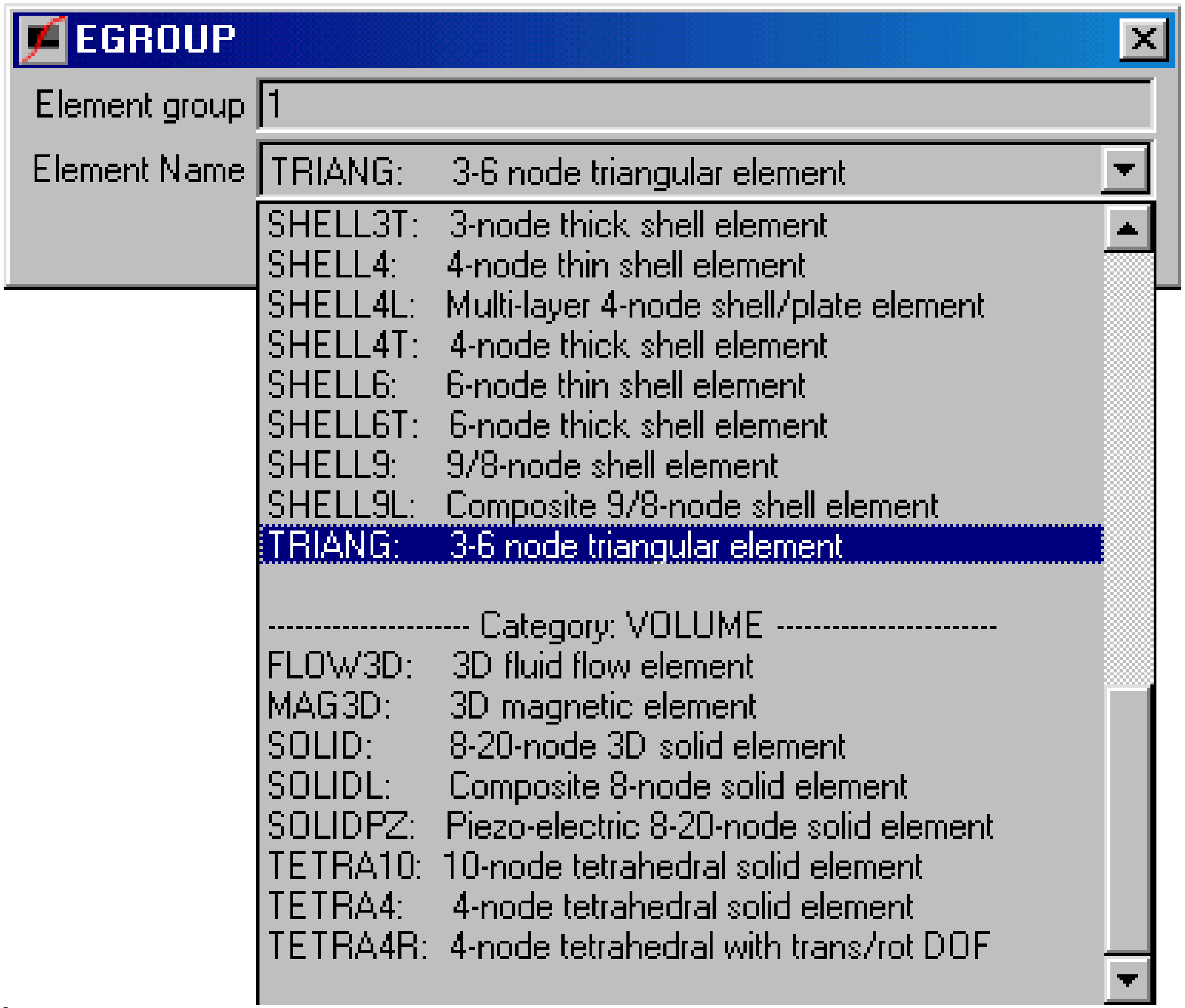
$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2$$

$$\mathrm{v}(x,y)=a_7+a_8x+a_9y+a_{10}x^2+a_{11}xy+a_{12}y^2$$

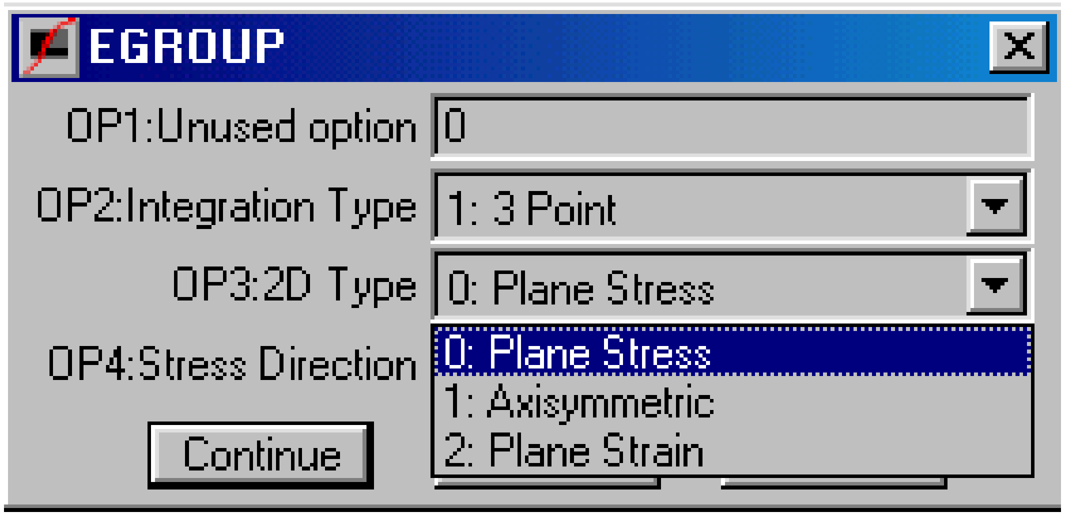
$$\{\boldsymbol{\psi}\}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{x}^2 & \mathbf{xy} & \mathbf{y}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{x}^2 & \mathbf{xy} & \mathbf{y}^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\\ \mathbf{a}_4\\ \mathbf{a}_5\\ \mathbf{a}_6\\ \mathbf{a}_7\\ \mathbf{a}_8\\ \mathbf{a}_9\\ \mathbf{a}_{10}\\ \mathbf{a}_{11}\\ \mathbf{a}_{12}\end{Bmatrix}$$

Pentru deplasări se alege o funcţie polinomială de gradul 2

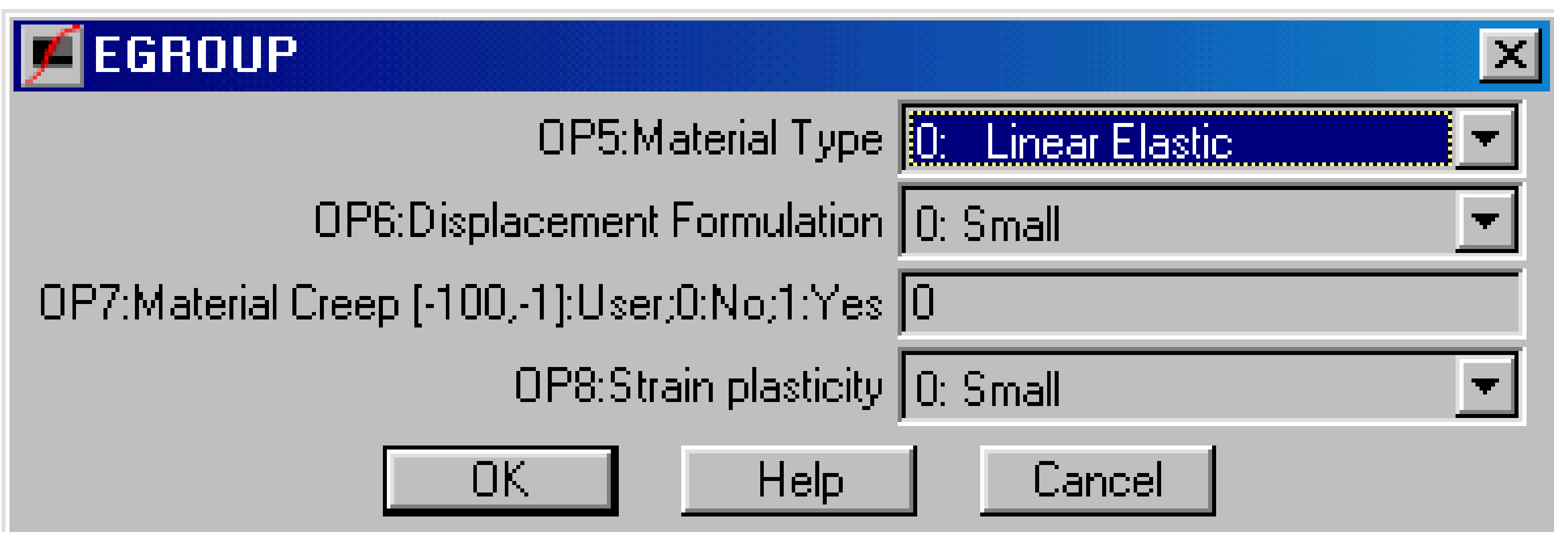
În biblioteca de elemente a programului Cosmos, elementul este denumit TRIANG



Este un element din categoria ARIE

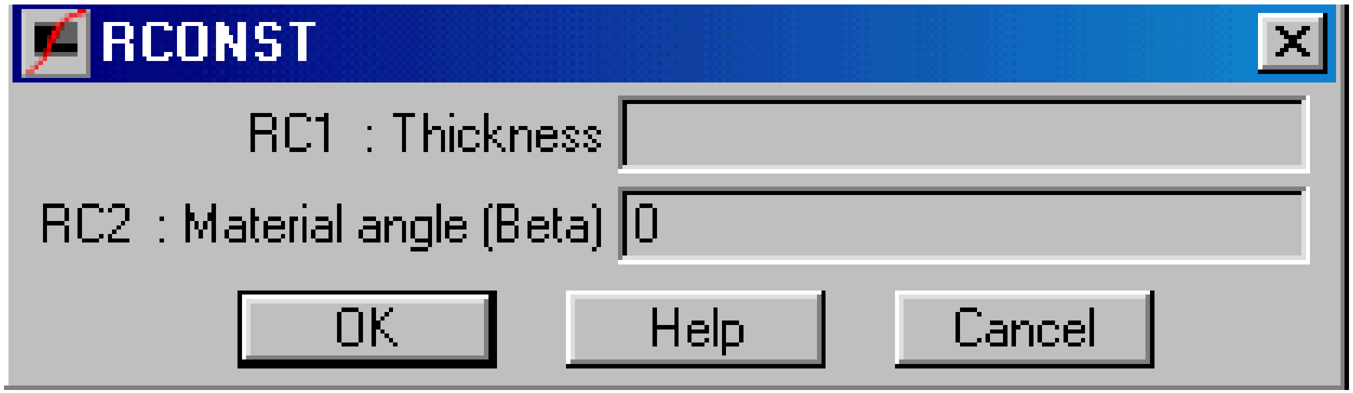


Opţiunea 4 (OP4) permite definirea tipului de abstractizare folosit la trecerea de la 3D la 2D

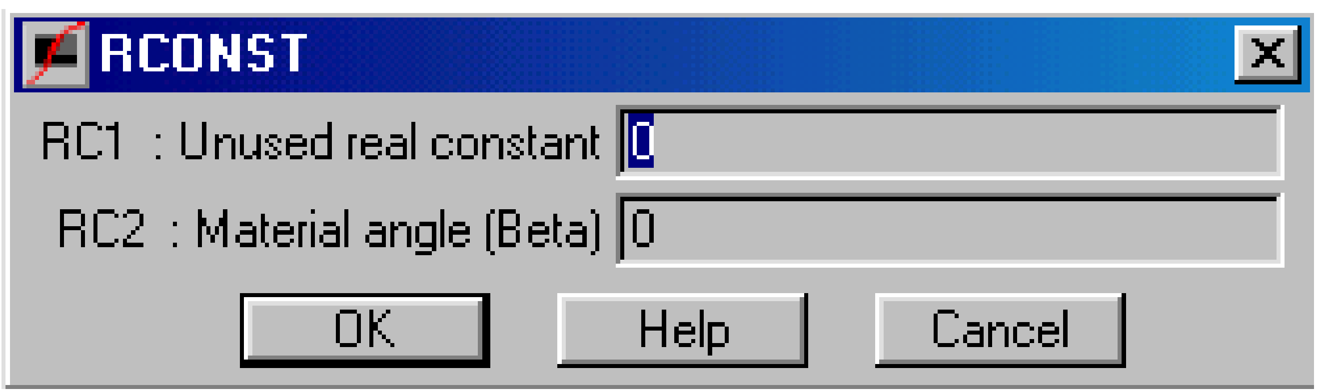


Proprietăţile de material ce trebuie precizate în cazul unei analize structurale sunt E şi υ

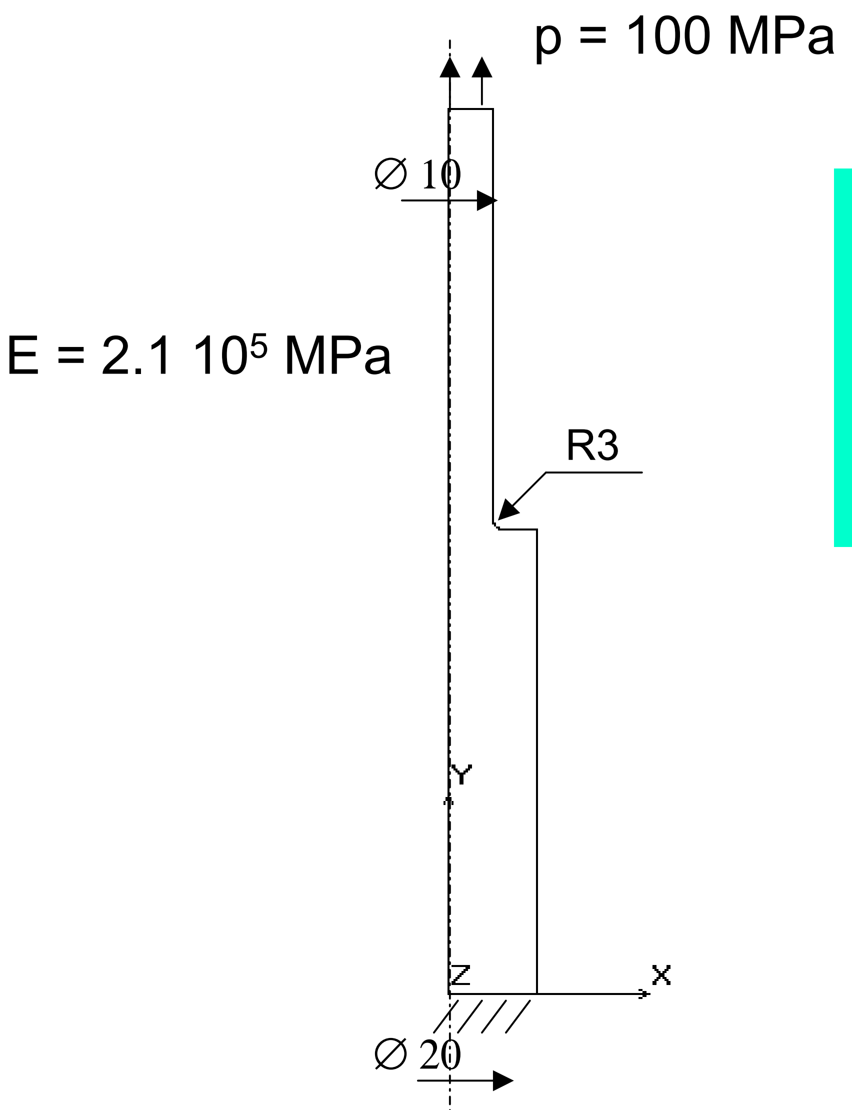
Pentru analiza Stare plană de tensiuni (Plane stress)



Pentru analiza Stare plană de deformaţii (Plane strain) sau Axial-simetric (Axisymmetric)

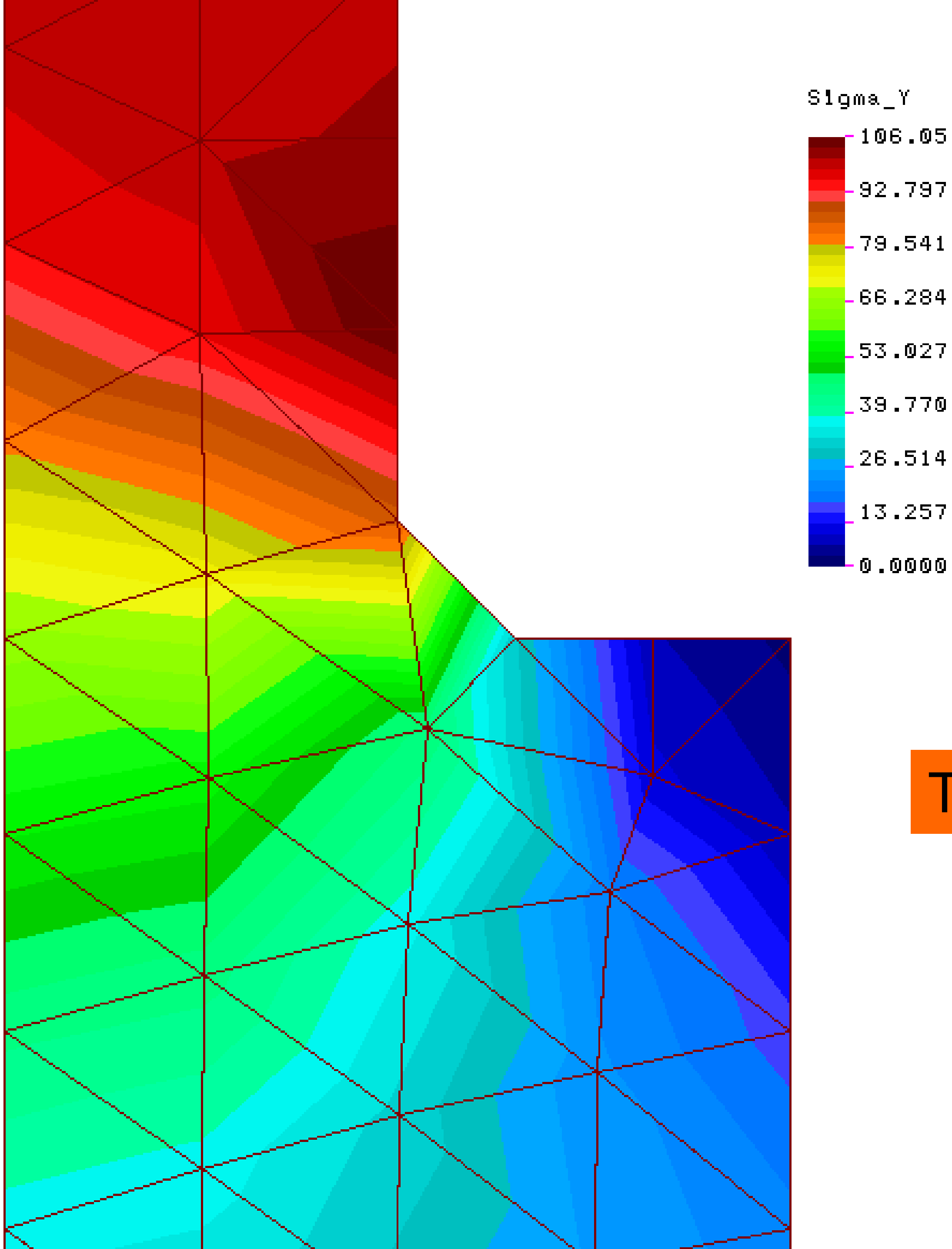


Exemplu : epruvetă cilindrică solicitată la tracţiune - analiza convergenţei soluţiei

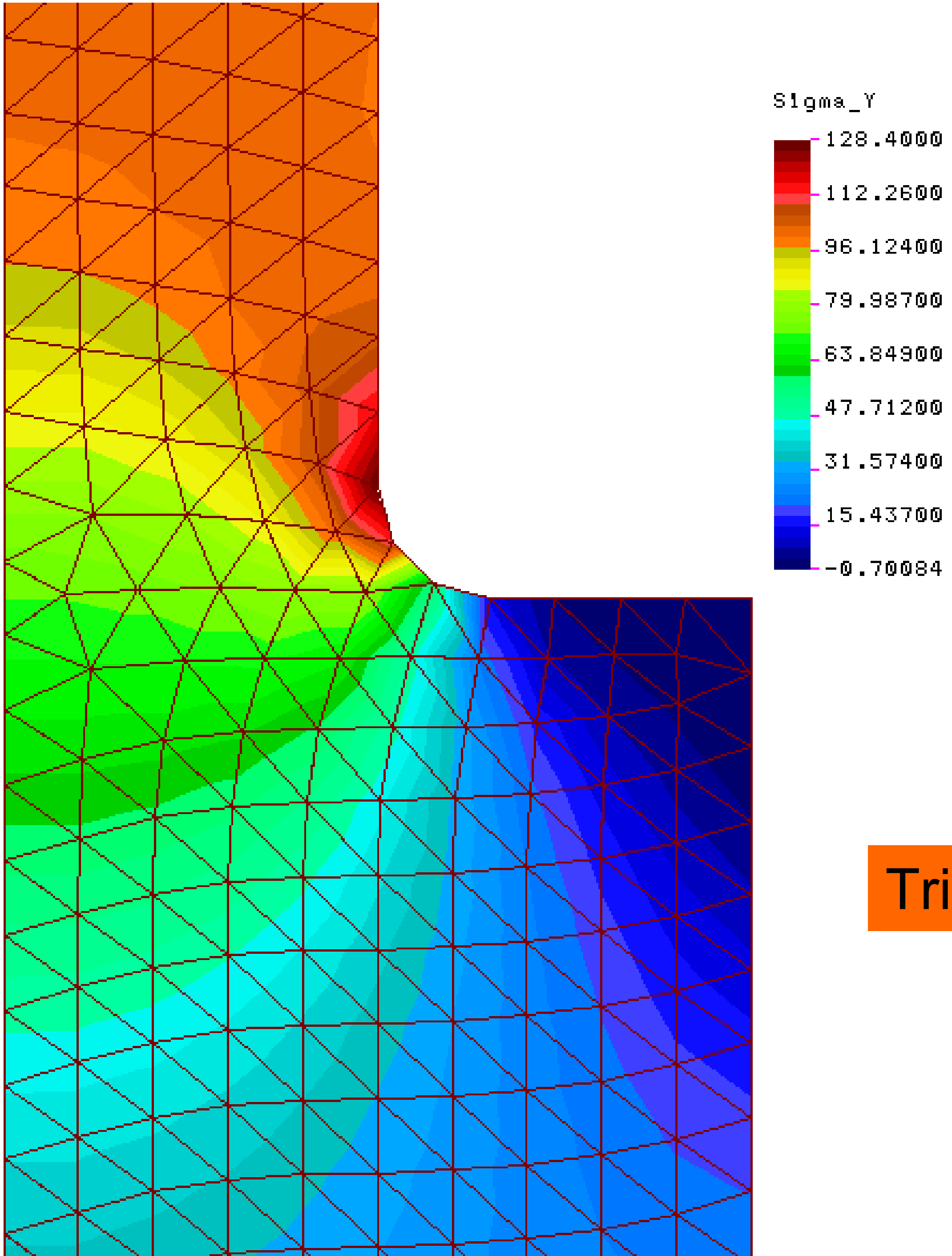


Structură axial simetrică

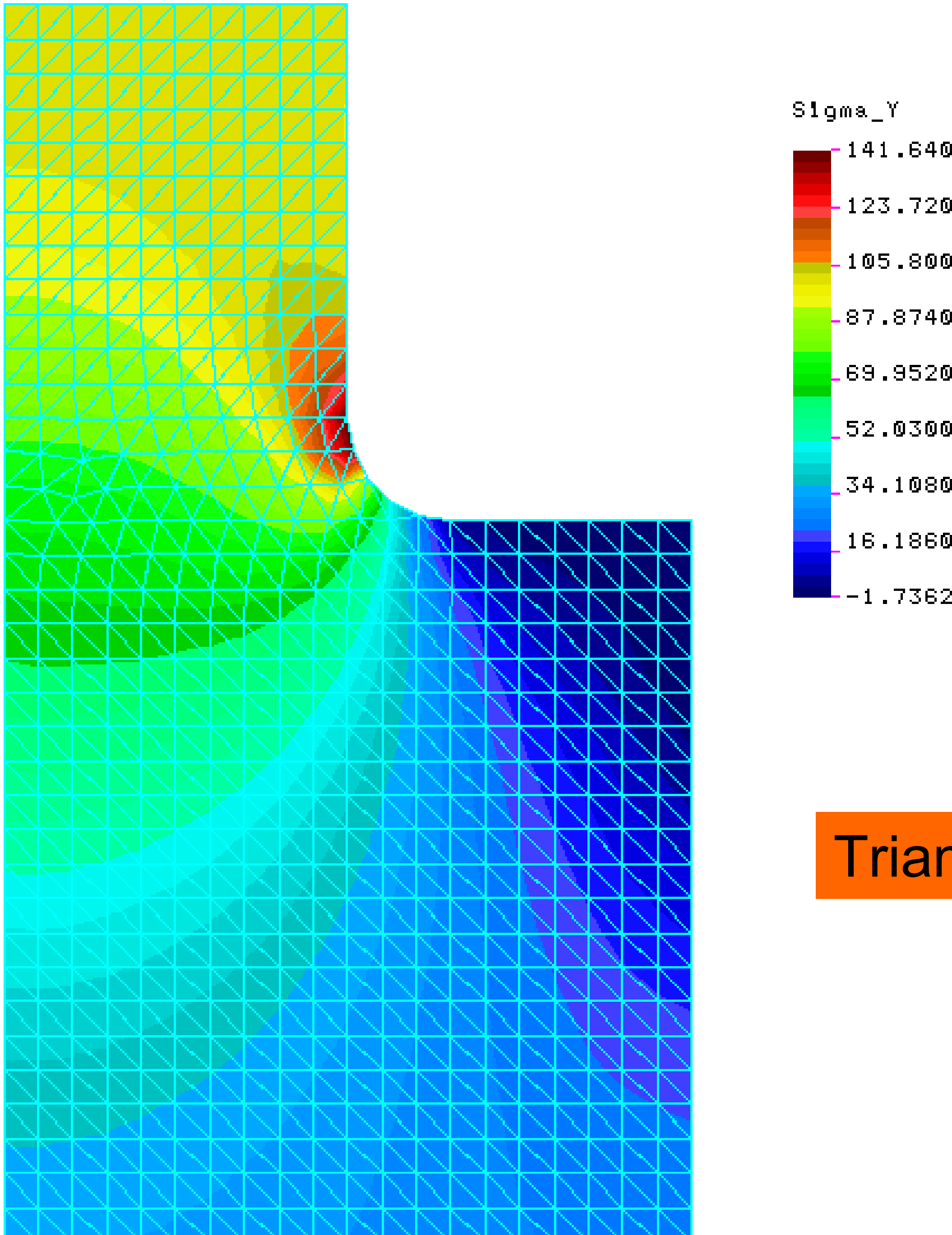
Analiza cu elemente Triang



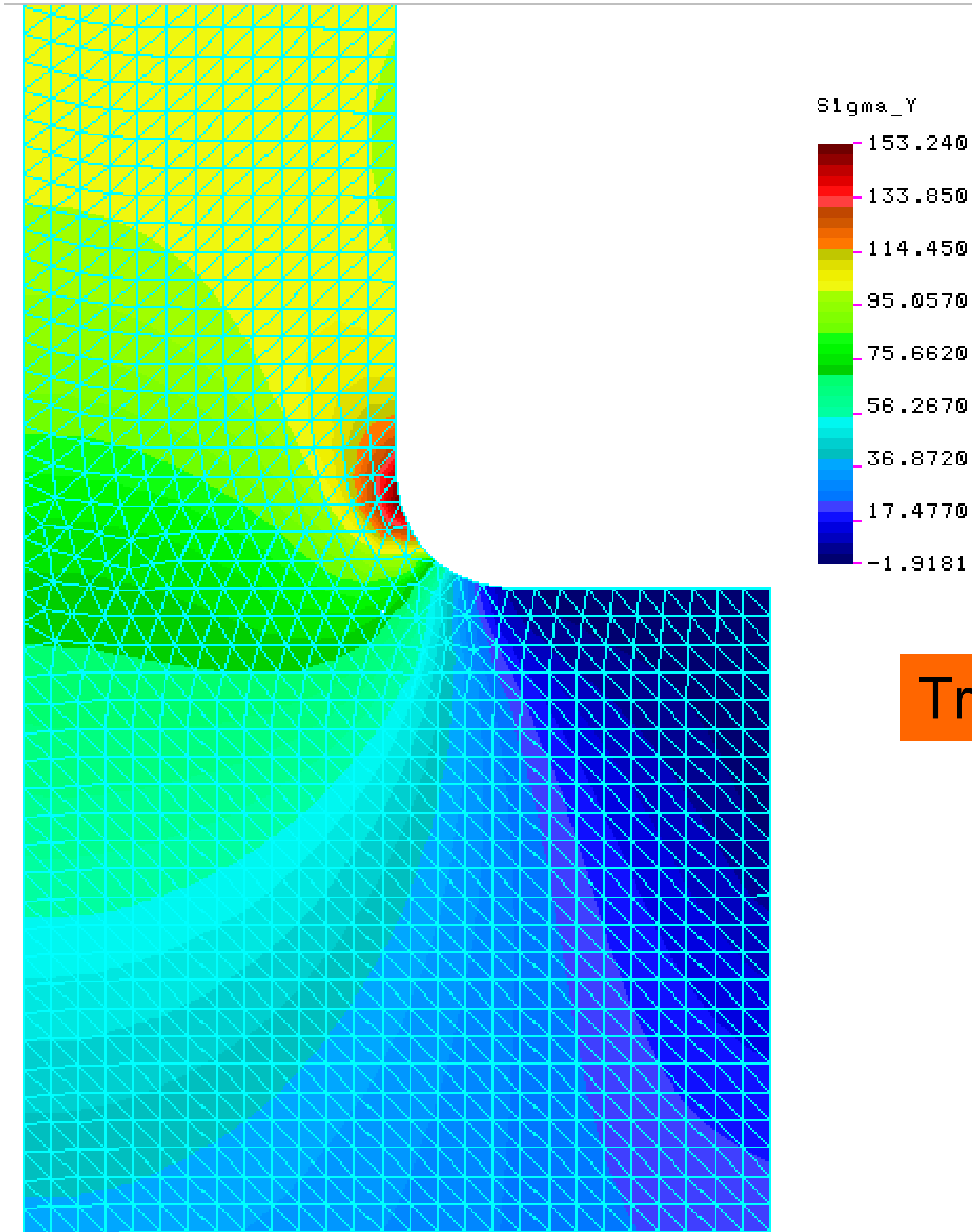
Triang cu latura 5 mm



Triang cu latura 2 mm

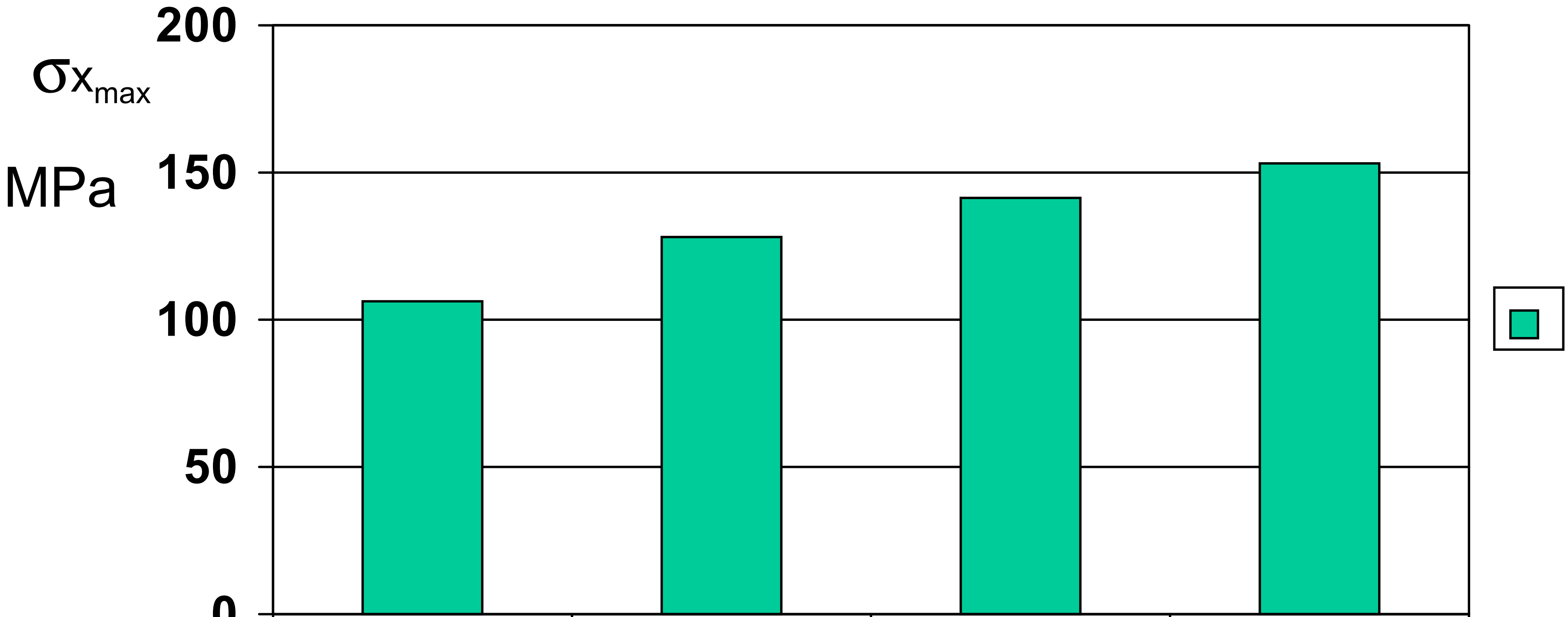


Triang cu latura 1 mm



Triang cu latura   0,75 mm

Convergenţa soluţiei funcţie de mărimea geometrică a elementului



	e size 5	e size 2	e size 1	e size 0.75
	106	128.4	141.6	153