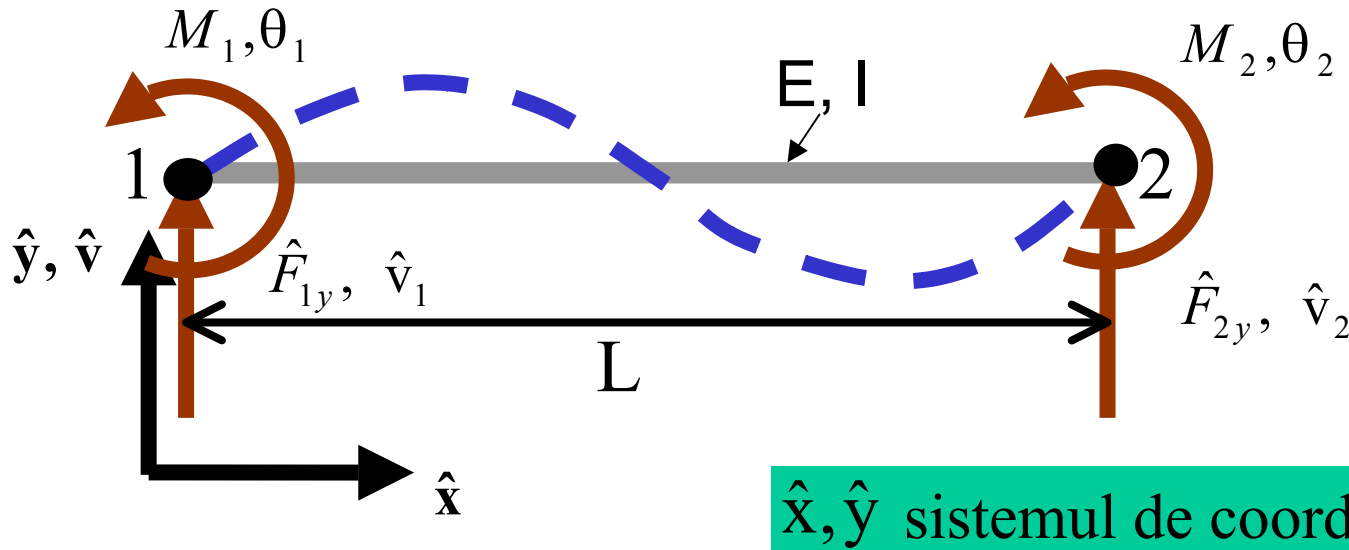


# Elementul de bară 2D supus numai la încovoiere (grinda)



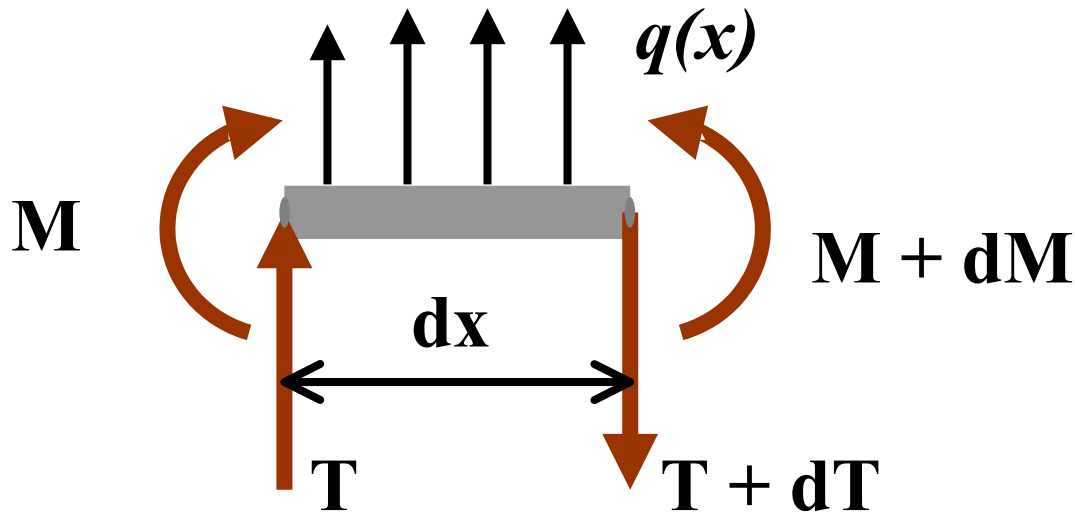
## Pasul 1: Abstractizarea

### Ipoteze:

- deplasări mici
- material omogen, izotrop, comportare elastică liniară
- rigiditate axială infinită.

2 grade de libertate la nivelul unui nod:

- deplasarea transversală  $v$  și
- rotația în jurul axei Z- rz, notată  $\theta$



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 \hat{v}}{d\hat{x}^2}$$

$$\theta = \frac{d\hat{v}}{d\hat{x}} \quad \frac{d^2 \hat{v}}{d\hat{x}^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3 \hat{v}}{d\hat{x}^3} = T = \frac{\partial M}{\partial \hat{x}}$$

$$\frac{d^2}{d\hat{x}^2} \left( EI \frac{d^2 \hat{v}}{d\hat{x}^2} \right) = -q(\hat{x})$$

În acest caz particular se consideră  $EI = \text{constant}$  și  $q = 0$

$$\left( EI \frac{d^4 \hat{v}}{d\hat{x}^4} \right) = 0$$

Pasul 2: Se alege funcția pentru deplasări

$$\hat{v} = a_1 \hat{x}^3 + a_2 \hat{x}^2 + a_3 \hat{x} + a_4$$

Din condițiile la limită se identifică:

$$\hat{v}(0) = \hat{v}_1 = a_4$$

$$\frac{d \hat{v}(0)}{d \hat{x}} = \hat{\theta}_1 = a_3$$

$$\hat{v}(L) = \hat{v}_2 = a_1 L^3 + a_2 L^2 + a_3 L + a_4$$

$$\frac{d \hat{v}(L)}{d \hat{x}} = \theta_2 = 3a_1 L^2 + 2a_2 L + a_3$$

și rezultă:

$$\hat{v} = \left[ \frac{2}{L^3} (\hat{v}_1 - \hat{v}_2) + \frac{1}{L^2} (\theta_1 + \theta_2) \right] \hat{x}^3 + \left[ -\frac{3}{L^2} (\hat{v}_1 - \hat{v}_2) - \frac{1}{L} (2\theta_1 + \theta_2) \right] \hat{x}^2 + \theta_1 \hat{x} + \hat{v}_1$$

Sub formă matricială:

$$\hat{\mathbf{v}} = [N] \{\hat{\delta}\} \quad \text{cu} \quad \{\hat{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \theta_1 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

1 bis

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$N_1 = \frac{2}{L^3} \hat{x}^3 - \frac{3}{L^2} \hat{x}^2 + 1 \quad N_2 = \frac{1}{L^2} \hat{x}^3 - \frac{2}{L} \hat{x}^2 + 1\hat{x}$$

$$N_3 = -\frac{2}{L^3} \hat{x}^3 + \frac{3}{L^2} \hat{x}^2 \quad N_4 = \frac{1}{L^2} \hat{x}^3 - \frac{1}{L} \hat{x}^2$$

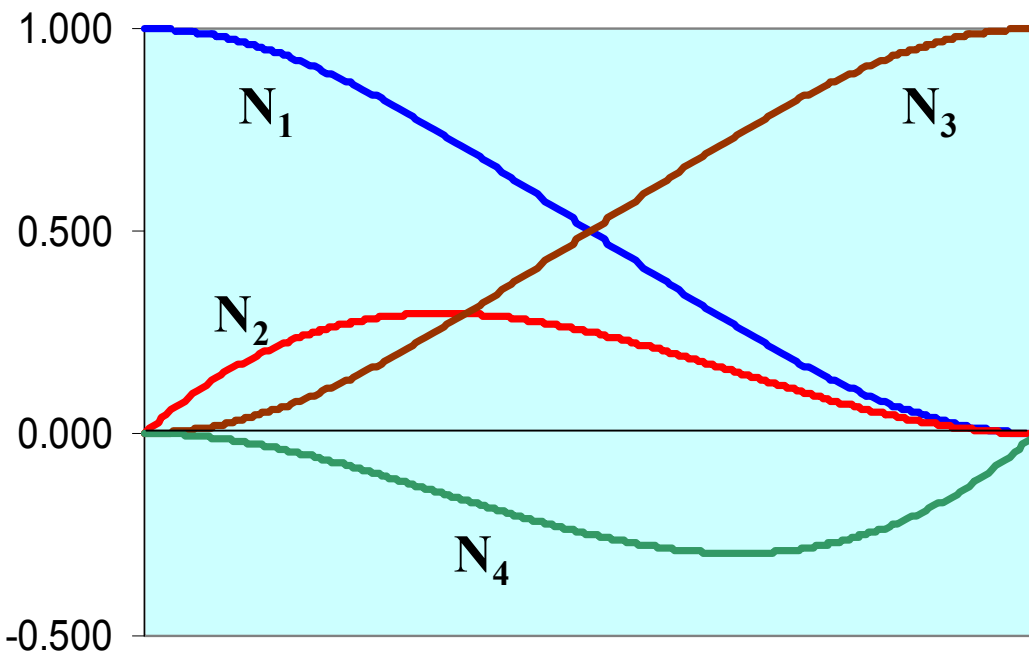
Funcțiile de formă  
(continue și derivabile)

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (2\hat{x}^3 - 3\hat{x}^2L + L^3)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^3} (\hat{x}^3L - 2\hat{x}^2L^2 + \hat{x}L^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3} (-2\hat{x}^3 + 3\hat{x}^2L)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^3} (\hat{x}^3L - \hat{x}^2L^2)$$



### Pasul 3 - Se definesc relațiile constitutive funcție de mărimile discrete

$$\varepsilon_x(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}}$$

$$\hat{u} = -\hat{y} \frac{d\hat{v}}{d\hat{x}}$$

$$\varepsilon_x(\hat{x}, \hat{y}) = -\hat{y} \frac{d^2\hat{v}}{d\hat{x}^2}$$

$$M(\hat{x}) = EI \frac{d^2\hat{v}}{d\hat{x}^2}$$

$$T = EI \frac{d^3\hat{v}}{d\hat{x}^3}$$

## Pasul 4 - Se deduc componentele matricei de rigiditate

$$\begin{aligned}\hat{F}_{1y} &= T = EI \frac{d^3 \hat{v}(0)}{d\hat{x}^3} \\ &= \frac{EI}{L^3} (12 \hat{v}_1 + 6 L \theta_1 - 12 \hat{v}_2 + 6 L \theta_2) \\ \hat{F}_{2y} &= -T = EI \frac{d^3 \hat{v}(L)}{d\hat{x}^3} \\ &= \frac{EI}{L^3} (-12 \hat{v}_1 - 6 L \theta_1 + 12 \hat{v}_2 - 6 L \theta_2)\end{aligned}$$



$$M_1 = -M = -EI \frac{d^2 \hat{v}(0)}{d\hat{x}^2}$$
$$= \frac{EI}{L^3} (6L \hat{v}_1 + 4L^2 \theta_1 - 6L \hat{v}_2 + 2L^2 \theta_2)$$

$$M_2 = +M = EI \frac{d^2 \hat{v}(L)}{d\hat{x}^2}$$
$$= \frac{EI}{L^3} (6L \hat{v}_1 + 2L^2 \theta_1 - 6L \hat{v}_2 + 4L^2 \theta_2)$$

Relația dintre solicitări și deplasările din noduri este:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1y} \\ M_1 \\ \hat{F}_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \theta_1 \\ \hat{v}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$[K]$

11

# Deducerea matricei de rigiditate pe baza formulării obținute prin utilizarea principiului lucrului mecanic virtual

$$[K] = \int_{Vol} [B]^T [D] [B] dV$$

10

Pornind de la expresia stabilită pentru deformațiile specifice

$$\{\varepsilon_x\} = -\hat{y} \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2}$$

se obține forma:

$$\{\varepsilon_x\} = [B] \{\hat{\delta}\}$$

scrisă ca:

$$\{\varepsilon_x\} = -\hat{y} [B^*] \{\hat{\delta}\}$$

unde matricea  $[B^*]$  este:

$$[B^*] = \begin{bmatrix} \frac{12\hat{x}-6L}{L^3} & \frac{6\hat{x}L-4L^2}{L^3} & \frac{-12\hat{x}+6L}{L^3} & \frac{6\hat{x}L-2L^2}{L^3} \end{bmatrix}$$

Efectuând calculele pentru  $[K]$ :

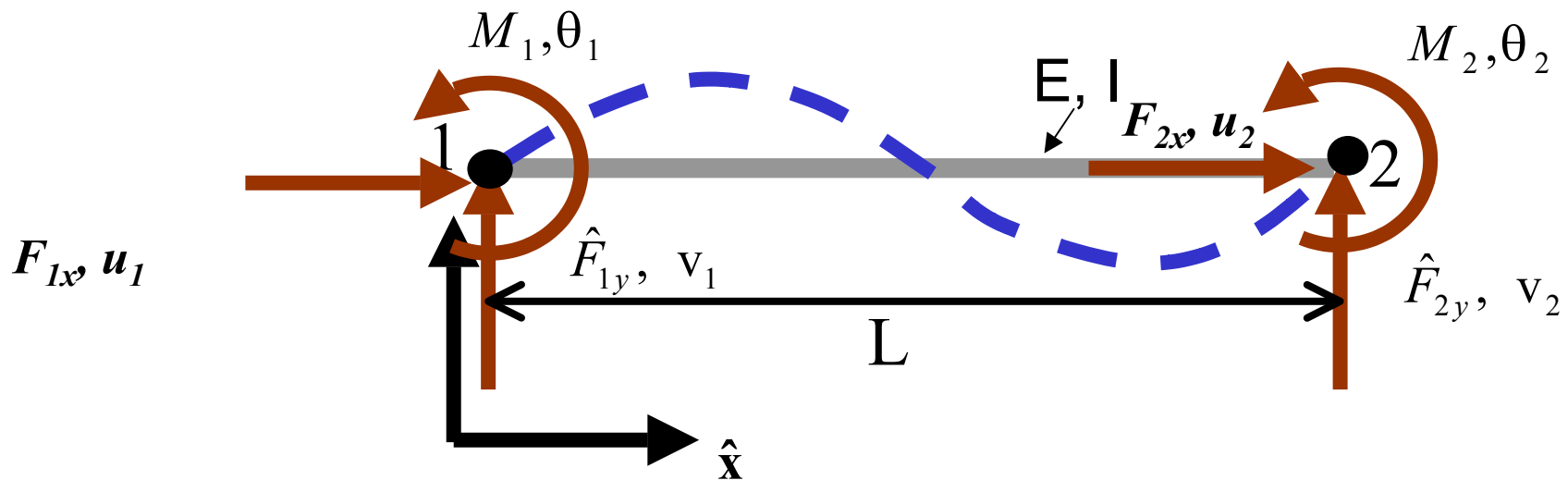
$$[K] = \iint_A \int_L [B]^T [D][B] dA d\hat{x}$$

și ținând cont că  $\iint_A \hat{y}^2 dA = I$

rezultă pentru  $[K]$  aceeași expresie

11

# Grinda solicitată și cu forțe axiale



Legătura dintre forțe și deplasări, în sistemul local, este de forma:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{1y} \\ M_1 \\ \hat{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = [\hat{K}] \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \theta_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Pentru deducerea matricei de rigiditate se va utiliza principiul suprapunerii efectelor, considerând acest caz ca fiind o însumare între solicitarea axială și cea de încovoiere

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ \hat{F}_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{u}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↓  
Matricea de rigiditate  
pentru solicitarea axială

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{F}_1 \\ M_1 \\ 0 \\ \hat{F}_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \hat{v}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Matricea de rigiditate pentru  
solicitarea de încovoiere

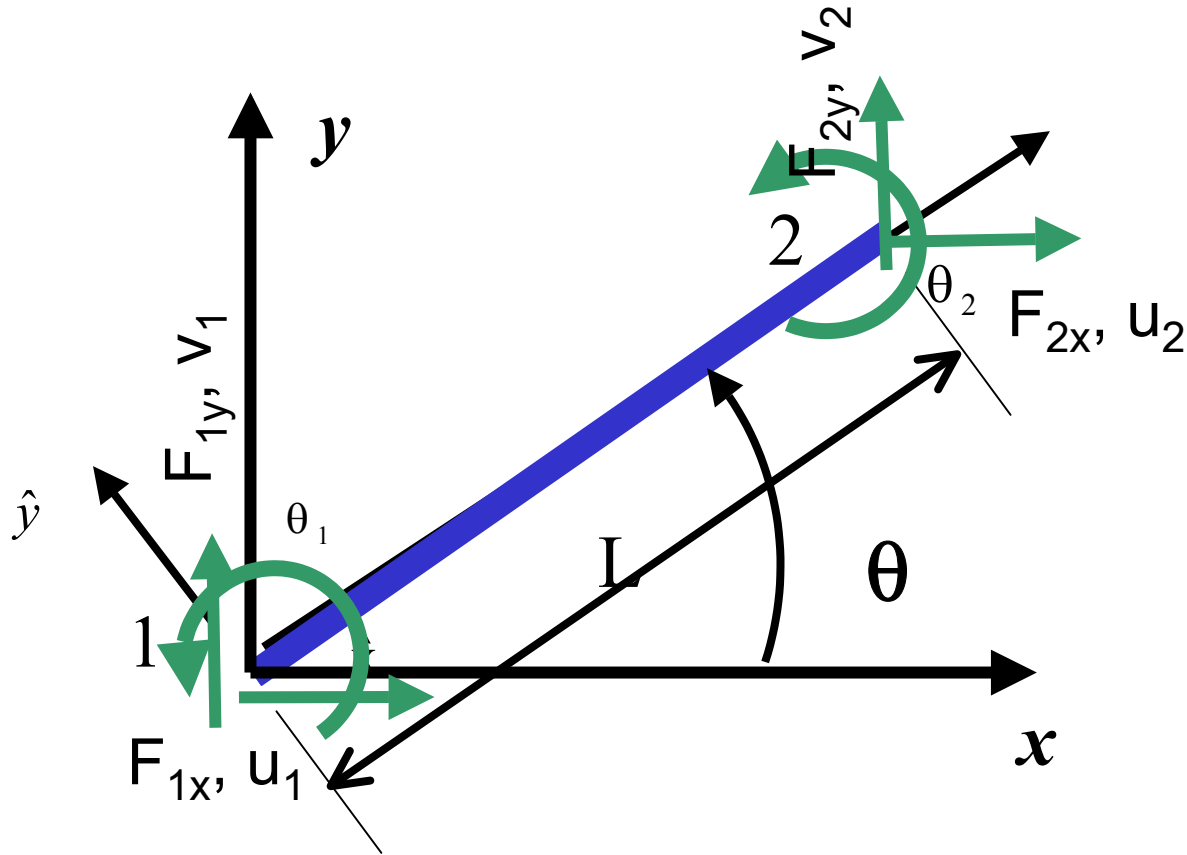
# Matricea de rigiditate completă rezultată prin însumare

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{1y} \\ M_1 \\ \hat{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \theta_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left[ \hat{K} \right]$$



# Elementul de grindă în sistemul de coordonate global



Se dorește relația:

$$\{F\} = [K] \{\delta\}$$

Matricea de rigiditate se calculează cu algoritmul deja cunoscut:

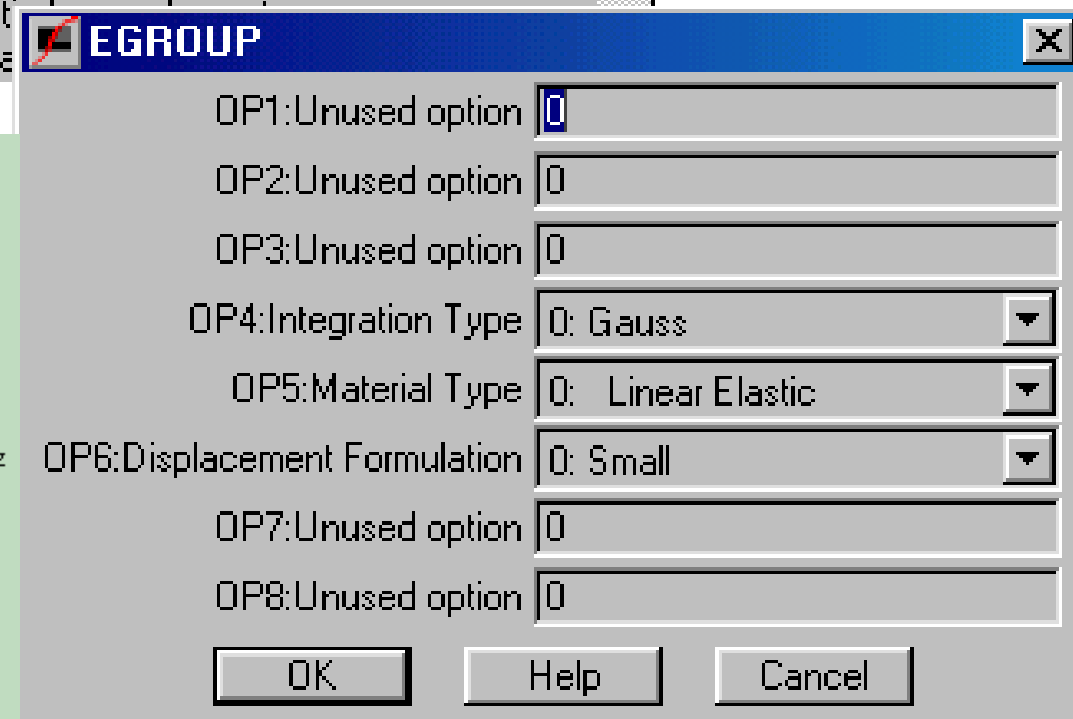
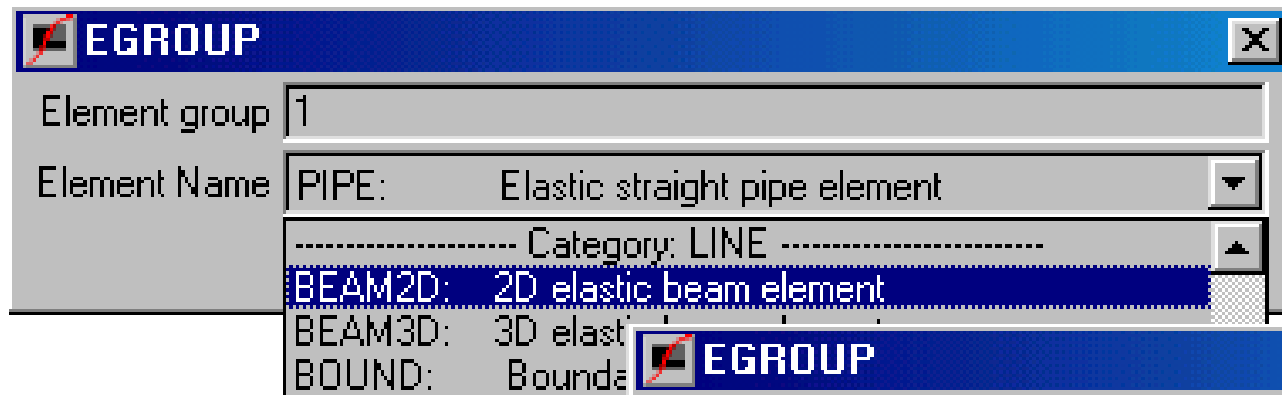
$$[K] = [T]^T [\hat{K}] [T]$$

9

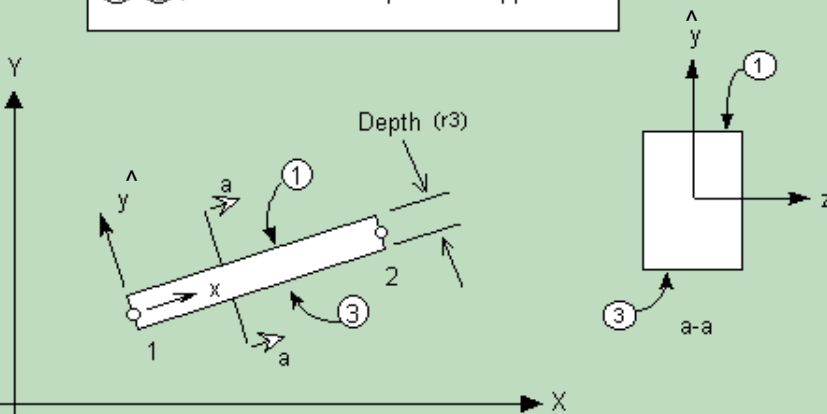
Unde, matricea de transformare de coordonate este:

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# În biblioteca de elemente a programului Cosmos, elementul este denumit **BEAM2D**



XY: Global Cartesian Coordinate System  
^ ^  
xy: Element Coordinate System  
① ③: Face number for pressure application



## Beam2D

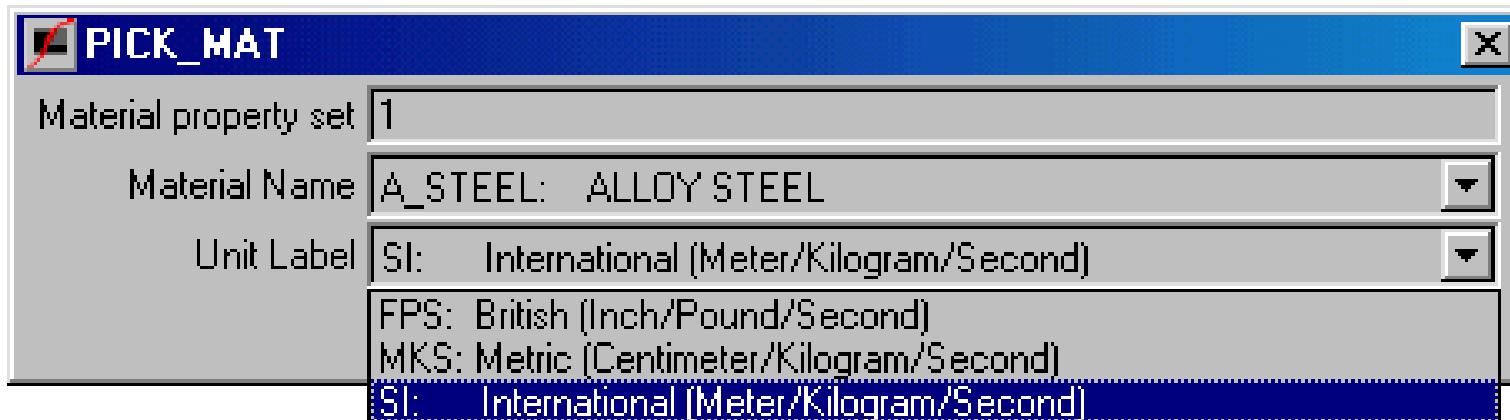
Elementul suportă analiză structurală, dinamică (frecvențe proprii), de stabilitate structurală (flambaj) și analiză termică.

Pentru analiza structurală, proprietățile de material ce trebuie indicate sunt:

EX - modulul de elasticitate;

NUXY - constanta lui Poisson

Se poate apela și un material din bibliotecă : **Atenție la unitățile de măsură !**



# Beam2D

**RCONST**

RC1 : Cross-sectional area

RC2 : Moment of inertia (Iz)

RC3 : Depth

RC4 : End-release code (node 1)

RC5 : End-release code (node 2)

RC6 : Shear factor in elem. y-axis

RC7 : Temp. diff. in elem. y-axis

RC8 : Perimeter (HSTAR only)

OK Help Cancel

- Element Group
- Material Property
- Real Constant
- Pick Material Lib
- User Material Lib
- Material Browser
- AISC Sect. Table

---

- List Element Groups
- List Material Props
- List Real Constants
- Delete Element Groups
- Delete Material Props
- Delete Real Constant
- Change EI-Prop
- New Property Set

---

- Beam Section**
- List Beam Sections

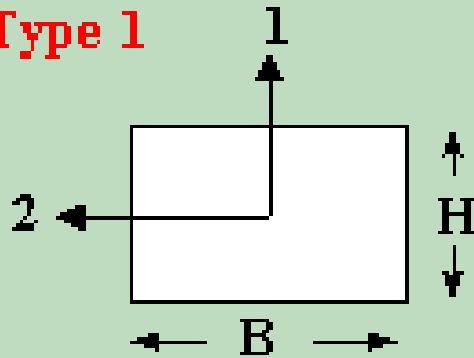
**BMSECDEF**

Section number (0: user section)

Continue Help Cancel

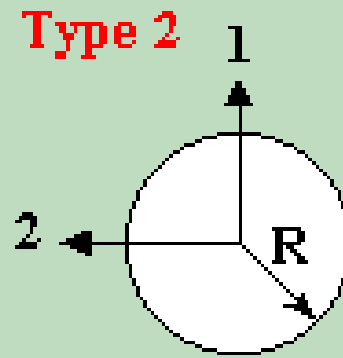
## Tipurile de secțiuni predefinite în meniul BeamSection

Type 1



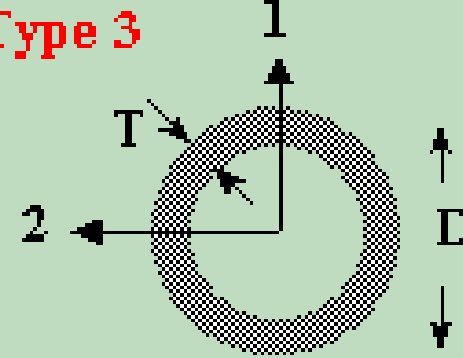
Solid Rectangular

Type 2



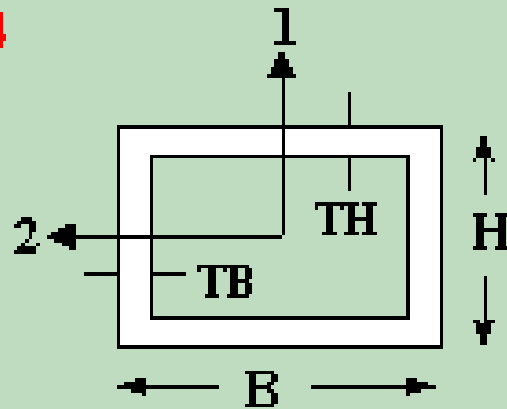
Solid Circular

Type 3



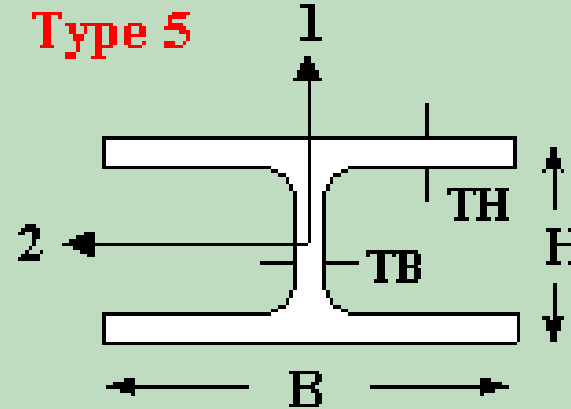
Circular Hollow

Type 4



Hollow Rectangular

Type 5



I

BMSECDEF

BS1 : Height of beam (H)

BS2 : Width of beam (B)

BS3 : End-release code (node 1)

BS4 : End-release code (node 2)

BS5 : Shear factor in elem. y-axis

BS6 : Temp. diff. in elem. y-axis

BS7 : Perimeter (HSTAR only)

OK Help Cancel

End release code este o combinatie de 6 cifre, corespunzătoare gradelor de libertate ale nodului. Dacă valorile sunt 0 (cazul definit implicit), valoarea corespunzătoare a forței nu este cunoscută, și ea va fi calculată de program. Dacă în poziția respectivă este plasat (1), atunci forța sau momentul sunt cunoscute ca fiind zero (datorită prezenței unei articulații în acel nod) iar programul nu va calcula forța în nodul respectiv.

## Exemplul 1

Punctul 1 coordonate 0,0,0

Punctul 2 coordonate 200,0,0

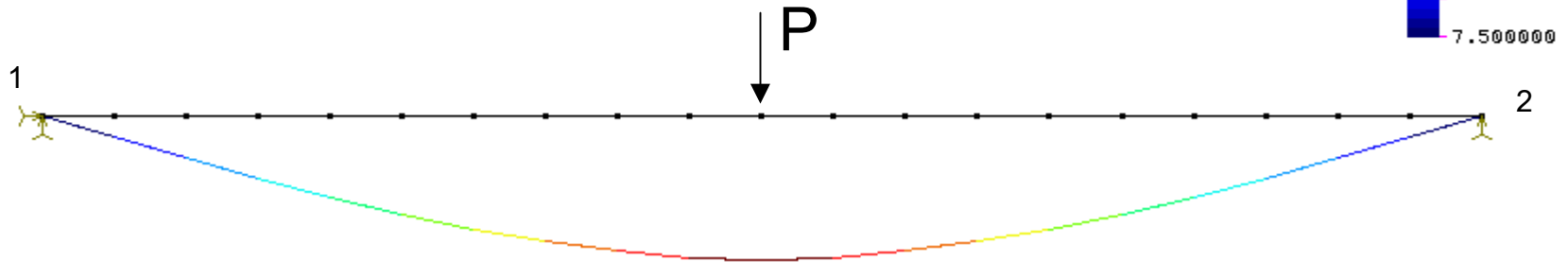
Secțiunea dreptunghiulară  $B=10$ ;  $H=20$

Material  $E=2.1 \cdot 10^5$  MPa;  $P=1000$  N

Articulație în punctul 1; rezemare în punctul 2

Configurația structurii deformate

Tensiunile în elemente





# Exemplul 1

## Valorile reacțiunilor

DISLIST.1,2,1,21,1,0				
Node	RFX	RFY	Load case RFZ	1 RFRES
1	0.000e+000	5.000e+002	0.000e+000	5.000e+002
21	0.000e+000	5.000e+002	0.000e+000	5.000e+002
Sum :	0.000e+000	1.000e+003	0.000e+000	1.000e+003

Lin Moment (MT) Lc=1

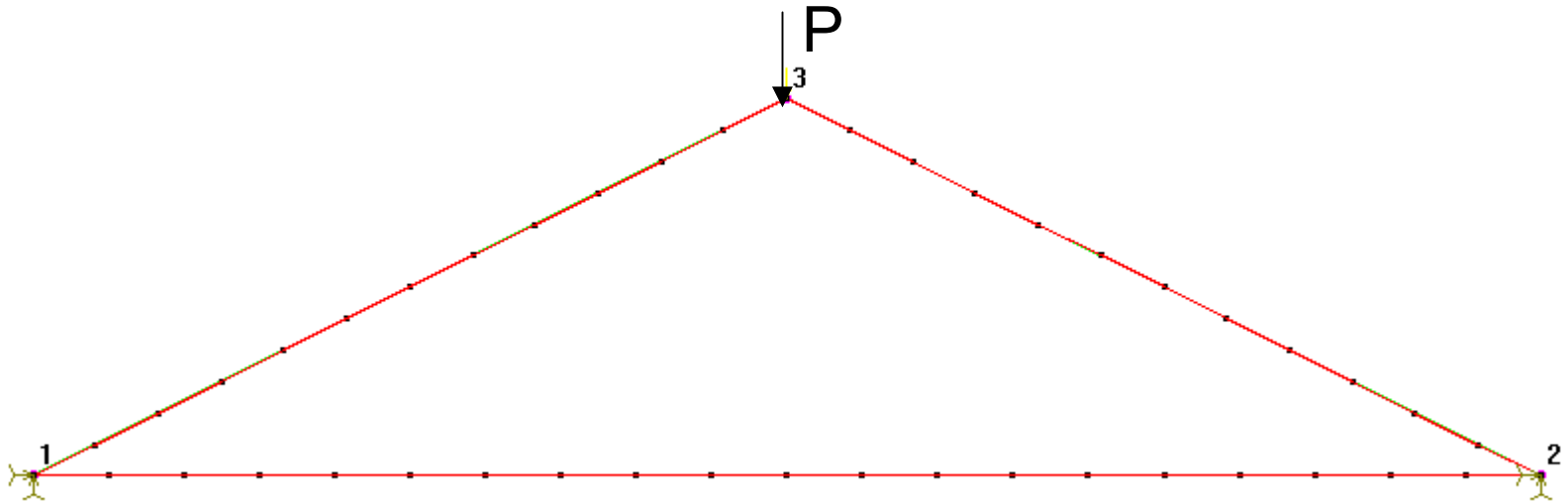
## Diagrama de momente T



DISLIST.1,1,1,21,1,0						
Node	UX	UY	Load case UZ	1 RX	RY	RZ
1	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.875e-003
2	0.000e+000	-1.869e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.856e-003
3	0.000e+000	-3.700e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.800e-003
4	0.000e+000	-5.456e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.706e-003
5	0.000e+000	-7.100e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.575e-003
6	0.000e+000	-8.594e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.406e-003
7	0.000e+000	-9.900e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.200e-003
8	0.000e+000	-1.098e-001	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-9.563e-004
9	0.000e+000	-1.180e-001	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-6.750e-004
10	0.000e+000	-1.232e-001	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-3.563e-004
11	0.000e+000	-1.250e-001	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.907e-010
12	0.000e+000	-1.232e-001	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	3.562e-004
13	0.000e+000	-1.180e-001	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	6.750e-004
14	0.000e+000	-1.098e-001	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	9.563e-004
15	0.000e+000	-9.900e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.200e-003
16	0.000e+000	-8.594e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.406e-003
17	0.000e+000	-7.100e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.575e-003
18	0.000e+000	-5.456e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.706e-003
19	0.000e+000	-3.700e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.800e-003
20	0.000e+000	-1.869e-002	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.856e-003
21	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.875e-003

Valorile  
deplasărilor în  
noduri

## Exemplul 2



Punctul 1 coordonate 0,0,0

Punctul 2 coordonate 200,0,0

Punctul 3 coordonate 100,35,0

Secțiunea dreptunghiulară  $B=10$ ;  $H=20$

Material  $E=2.1 \cdot 10^5$  MPa;  $P=100$  N

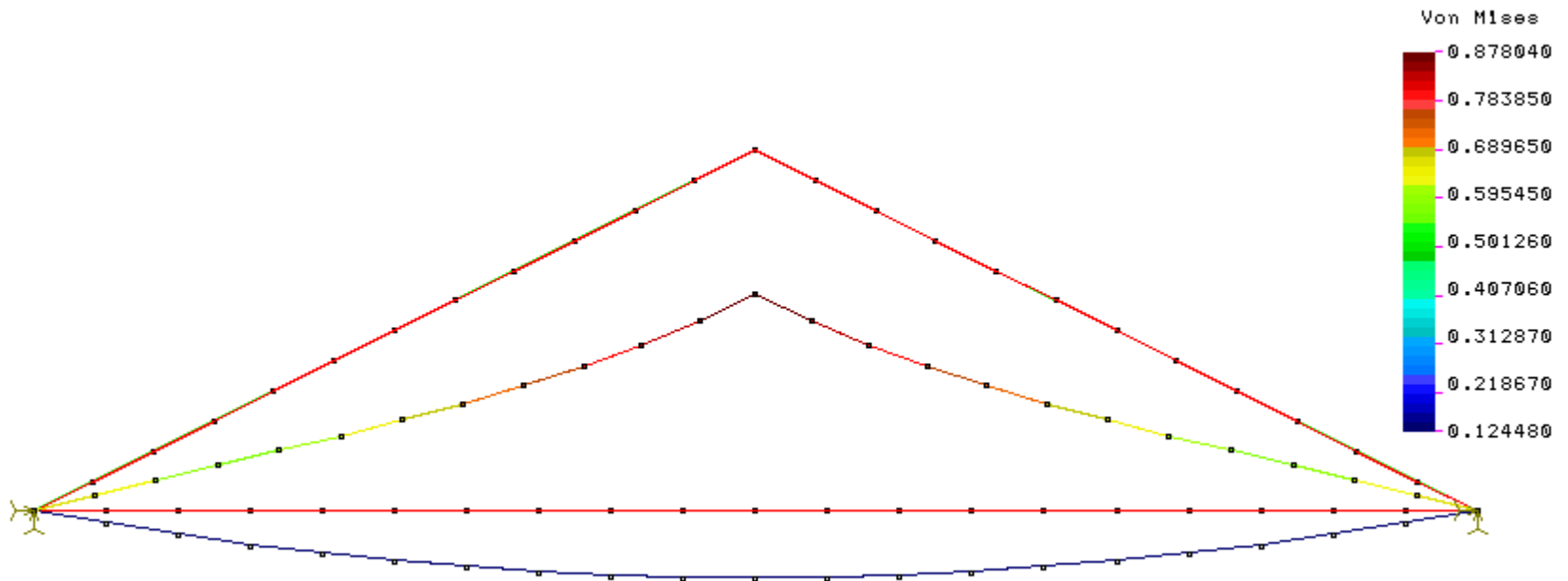
## Exemplul 2

Rezultate:

Configurația structurii deformată sub sarcină

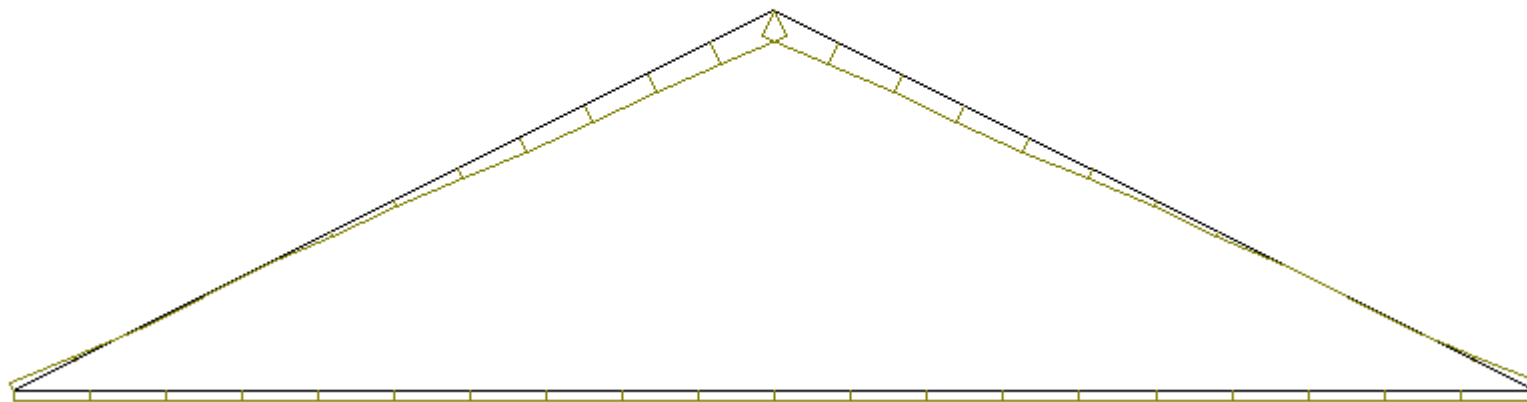
Valorile tensiunilor rezultante, la nivelul elementelor

\_1n STRESS Lc=1



## Exemplul 2

## Diagrama de momente T

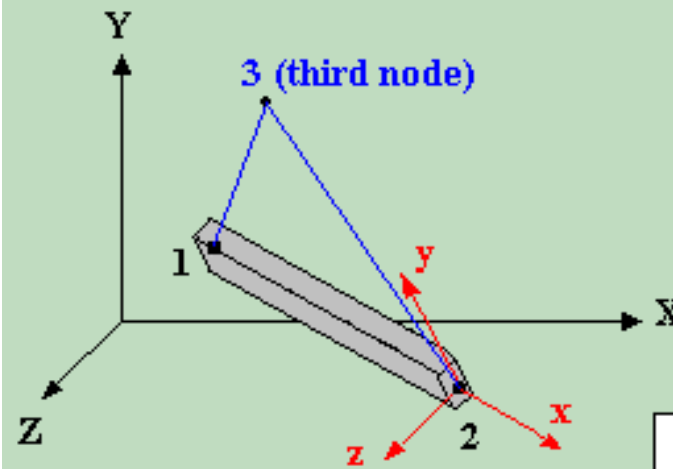


## Valorile reacțiunilor

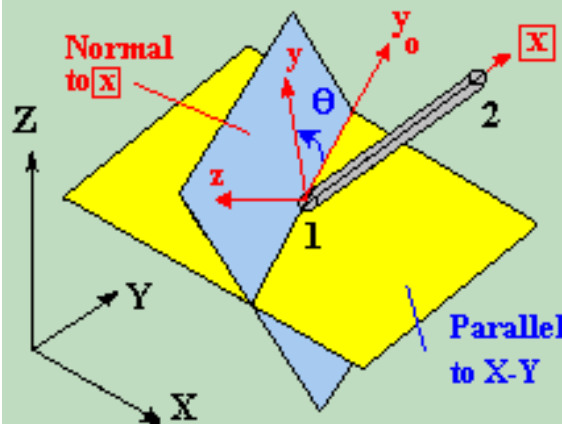
DISLIST,1,2,1,46,1,0				
Node	RFX	RFY	Load case RFZ	1 RFRES
1	9.371e+001	5.000e+001	0.000e+000	1.062e+002
21	-9.371e+001	5.000e+001	0.000e+000	1.062e+002
Sum :	0.000e+000	1.000e+002	0.000e+000	1.000e+002

# Elementul de grindă Beam 3D

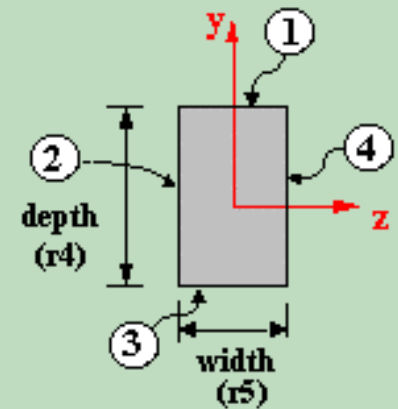
- Este un element de tip linie, cu două noduri.
- Un al treilea nod poate fi folosit pentru orientarea spațială a secțiunii elementului



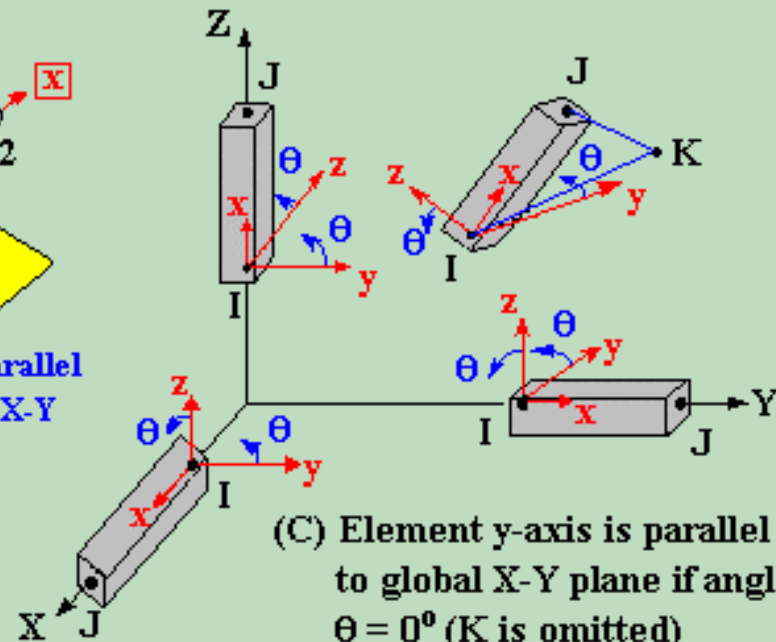
(A) Alignment definition using a third node



(B) Alignment definition using an orientation angle

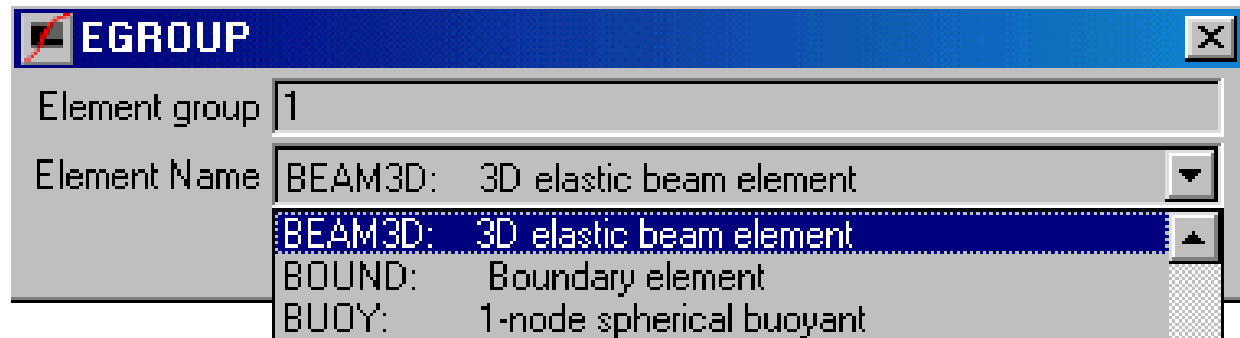


XYZ: Global Cartesian Coordinate System  
 xyz: Element Coordinate System  
 ①②③④: Face numbers for pressure application



(C) Element y-axis is parallel to global X-Y plane if angle  $\theta = 0^\circ$  (K is omitted)

# Beam3D



- Pentru analiza structurală sunt considerate 6 grade de libertate pentru fiecare nod.
- Se acceptă secțiuni nesimetrice, pentru care centrul de forfecare nu coincide cu centrul de greutate

**Op. 1:** Section type (tipul secțiunii)

= 0; simetric (opțiunea implicită)

= 1; nesimetric

= 2; simetric, cu secțiunea variabilă liniar.

**Op. 2 și Op. 3:** Neutilizate

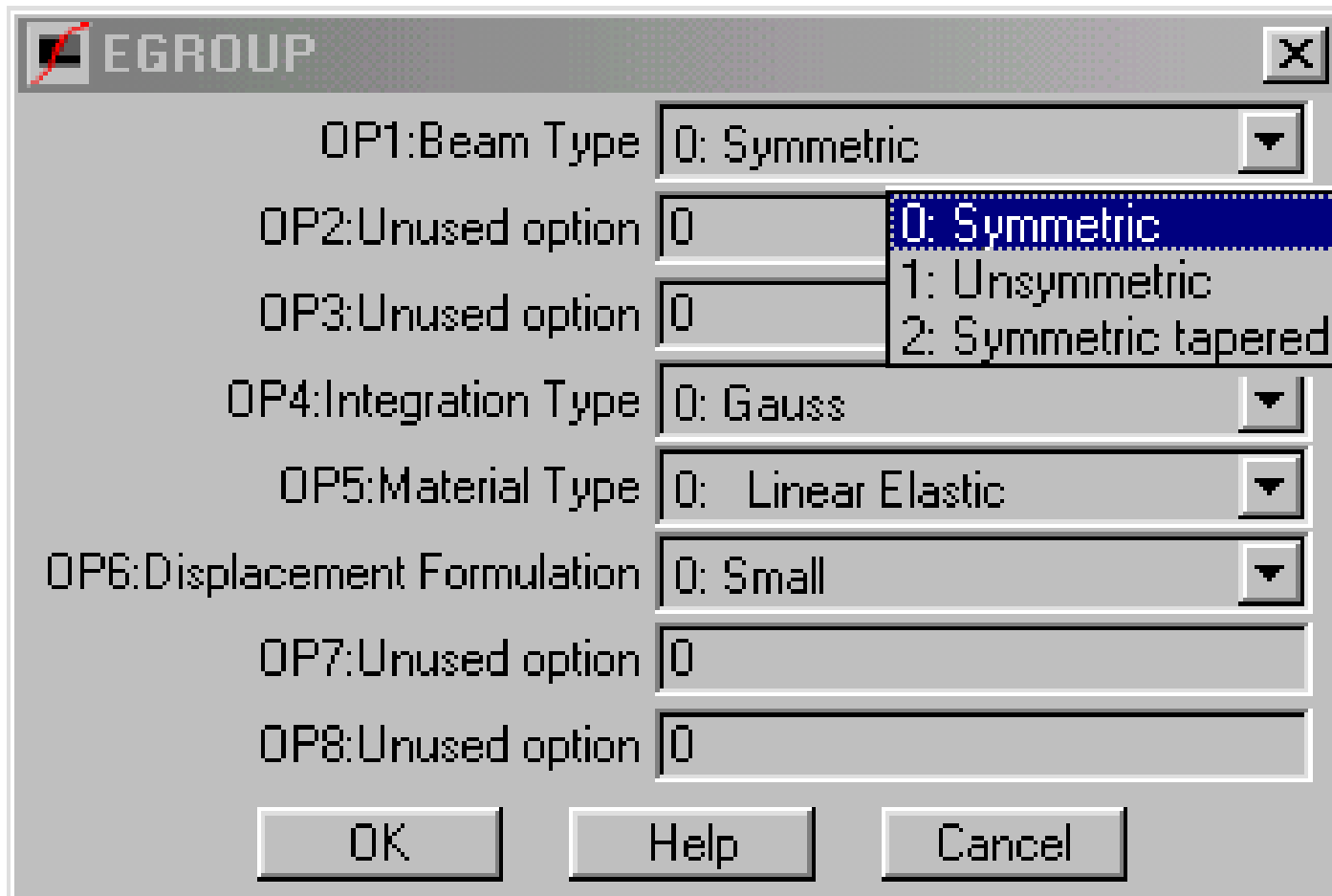
**Op. 4:** Se folosește valoarea implicită

**Op. 5:** Se folosește valoarea implicită (Linear elastic Material)

**Op. 6:** Se folosește valoarea implicită (Small displacement formulation)

**Op. 7 și Op. 8** Neutilizate pentru acest tip de element

## Beam3D



Opțiunea Symmetric tapered implică o variație continuă, liniară a parametrilor secțiunii în lungul elementului

## Beam3D

Constantele reale se introduc din meniul RCONST, sau sunt calculate direct pentru secțiunile din biblioteca programului, cu ajutorul meniului BeamSection

**RCONST**

RC1 : Cross-sectional area

RC2 : Moment of inertia about y-axis (Iy)

RC3 : Moment of inertia about z-axis (Iz)

RC4 : Depth of beam (y-axis)

RC5 : Width of beam (z-axis)

RC6 : End-release code (node 1)

RC7 : End-release code (node 2)

RC8 : Torsional Constant (J)

RC9 : Shear factor in elem. y-axis

RC10 : Shear factor in elem. z-axis

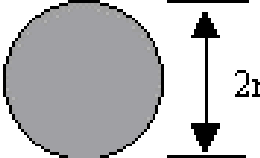

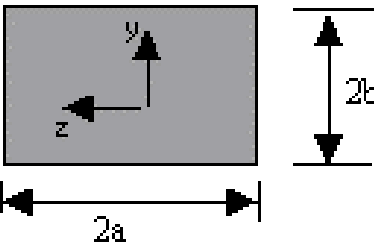
OK Help Cancel



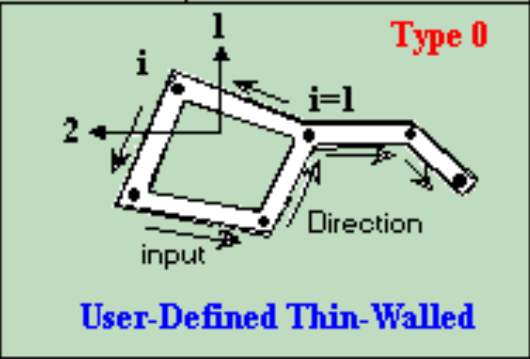
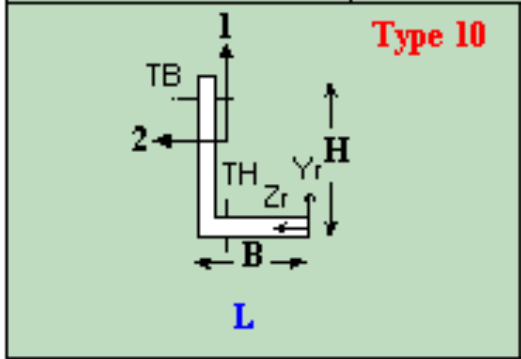
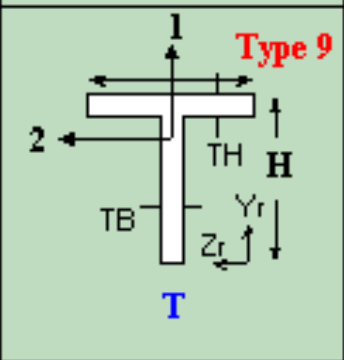
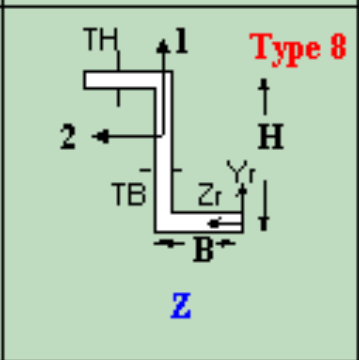
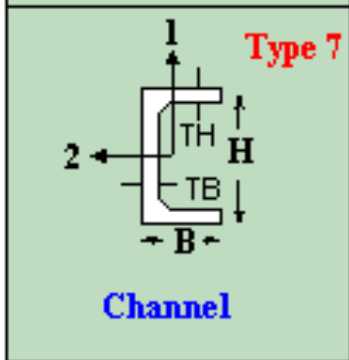
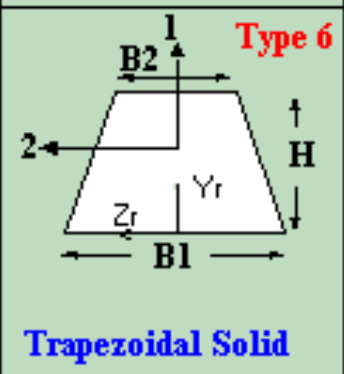
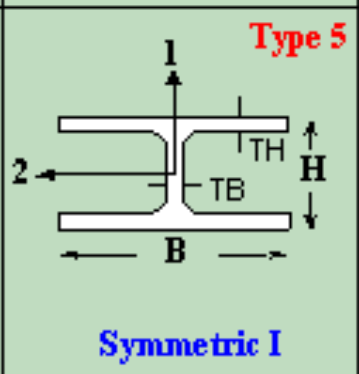
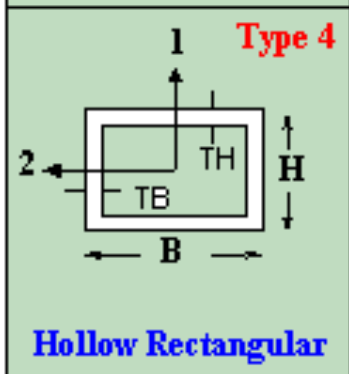
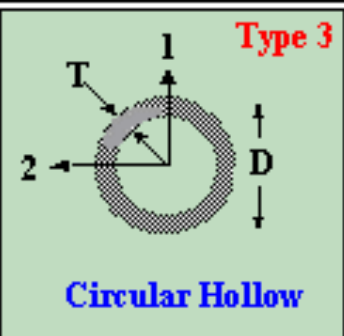
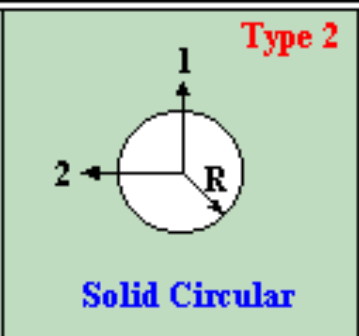
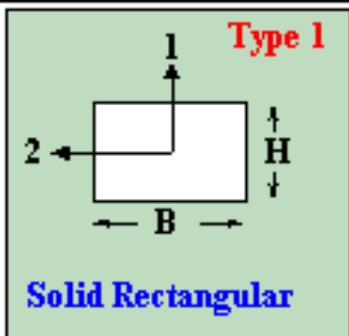
# Beam3D

$$\tau_{\max} = T \frac{CTOR}{J}$$

Valorile constantelor ce intervin în calculul tensiunii maxime la răsucire.

Cross-Section	CTOR and J	Shear Factor
	$CTOR = r$ ; $J = I_p = \frac{\pi r^4}{2}$	$\frac{9}{10} = 0.90$
	$CTOR = r$ ; $J = I_p = I_{yy} + I_{zz}$	$\frac{1}{2} = 0.50$
	$CTOR = \frac{(3a + 1.8b)}{8a^2 b^2} \cdot J$  Where: $J = ab^3 \left[ \frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$	$\frac{5}{6} = 0.8333$

# Beam3D



Tipurile de secțiuni predefinite, din meniul BeamSection (simetrice și nesimetrice)

# PIPE

Un caz particular de element Beam3D, simetric, este elementul PIPE, comod de utilizat întrucât numărul de constante reale ce trebuie definite este redus

