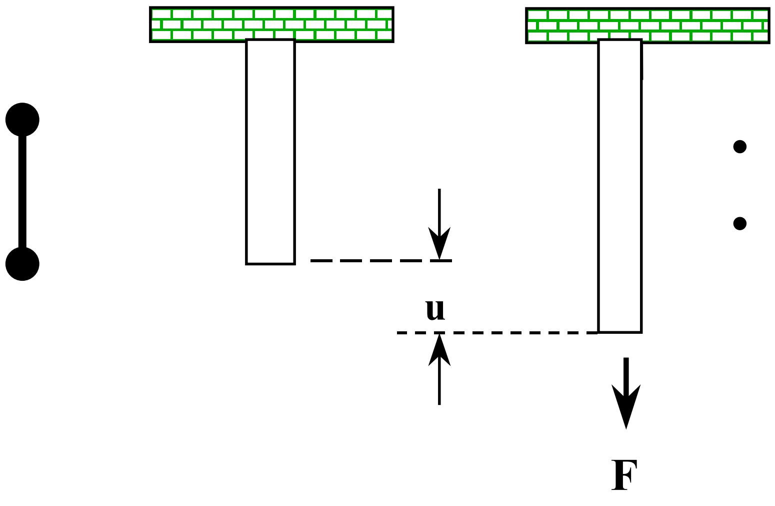
Metoda Elementului Finit (MEF)

- Pentru structurile mecanice, mărimile cu semnificaţie fizică specifică care sunt urmărite la nivelul nodurilor sunt deplasările nodurilor (u,v,w,rx,ry,rz - corespunzătoare gradelor de libertate) - de aici denumirea de **metoda deplasărilor** , consacrată pentru această abordare.

Elementul de bară cu secţiune constantă, solicitat uniaxial: (Truss 1D)



- u = Valoarea deplasării
- F = Valoarea încărcării (a sarcinii)

Elementul Bară 1D (Truss 1D)

Ipoteze:

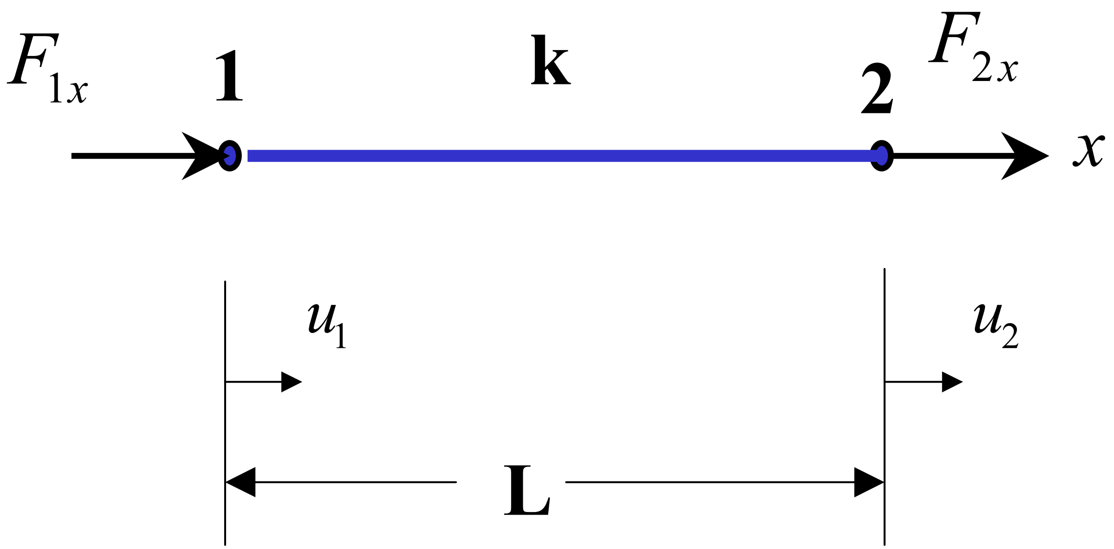
- elementul de bară are un comportament linear (se aplică legea lui Hooke)
- secţiunea transversală "A" este constantă de-a lungul barei
- încărcarea este dată de forţe dirijate în lungul barei şi aplicate în capete
- Sistemul de coordonate local $(\hat{x},\hat{y})$ se suprapune peste sistemul de coordonate global (x,y)
- bara nu suportă forţe şi deplasări transversale: $v_1 = v_2 = 0$

Lungimea L, aria secţiunii A şi modulul de elasticitate E al materialului vor caracteriza integral comportarea elastică a barei - rigiditatea $k = E*A / L$

Pentru cazul concret prezentat :
$F = k * u$

Pasul 1 Abstractizarea

Se consideră bara ca un element cu două noduri:



Notă: Sistemul local şi global fiind suprapuse, $\hat{x}$ şi x sunt identice, iar pentru a simplifica scrierea se va utiliza numai o notaţie

Pasul 2 - Se stabileşte o funcţie pentru deplasări $u = u_{(x)}$

Funcţia trebuie să fie continuă pe domeniul corespunzător elementului şi să asigure compatibilitatea interelemente. Se aleg, de obicei funcţii polinomiale.

Se consideră o funcţie lineară

$$u = a_1 + a_2 x$$

Numărul de coeficienţi = 2 = numărul de grade de libertate (d.o.f) al elementului.

Scris sub formă matricială:

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Se identifică constantele a_1 şi a_2

$$u(0) = a_1 + a_2 \cdot (0) = u_1$$

$$u(L) = a_1 + a_2 \cdot (L) = u_2 = a_2 L + u_1$$

se obţine:

$$\boxed{a_1 = u_1}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}}$$

Substitutind înapoi în : $u = a_1 + a_2 x$

Rezultă :

$$\boxed{u = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) x}$$

Sub formă matricială:

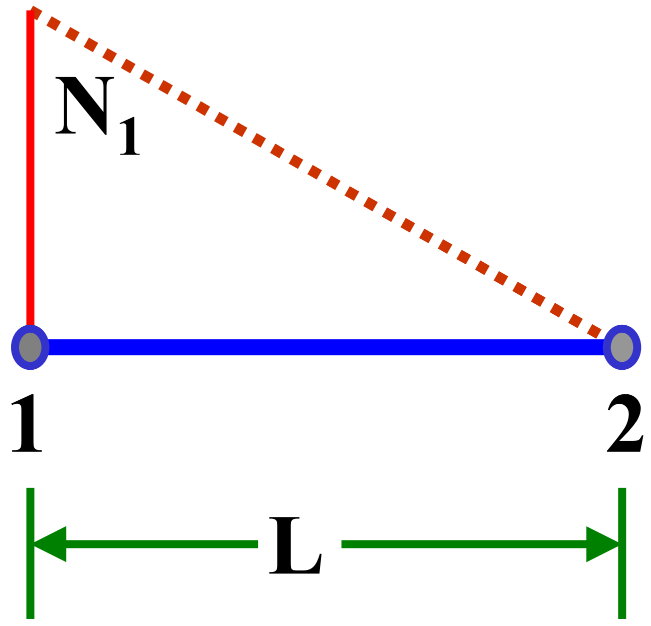
$$u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$ care se poate scrie sub forma:

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$ 1 $$\boxed{u = [N]\{\delta_i\}}$$

Unde :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$ şi $$N_2 = \frac{x}{L}$$ sunt denumite funcţii de formă, indicând legea de variaţie asumată pentru deplasări la nivelul elementului

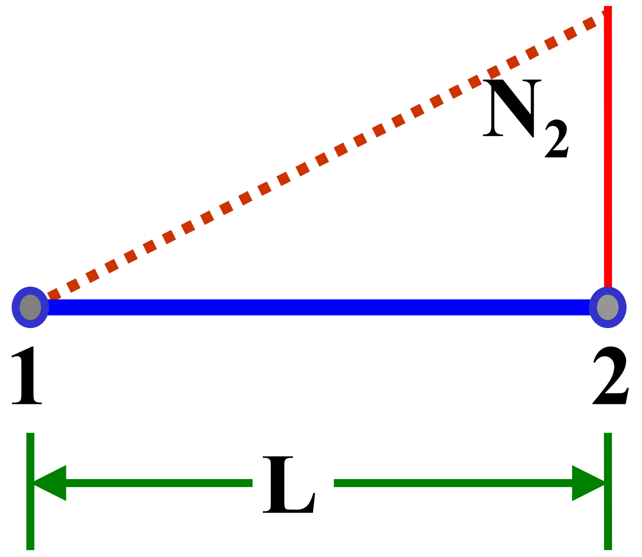
Funcţiile de formă



$N_1 = 1 \quad N_2 = 0$ **la nodul 1**

$N_1 = 0 \quad N_2 = 1$ **la nodul 2**

$N_1 + N_2 = 1$



Pasul 3 - Se definesc relaţiile constitutive funcţie de mărimile discrete

Relaţia deformaţii specifice deplasări devine:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

care se scrie sub formă matricială ca:

$$\varepsilon = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

2

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta_i\}$$

Notă: consecinţă a legii de variaţie lineare pentru deplasări, deformaţia specifică este constantă pe întregul element.

Relaţia constitutivă pentru starea de tensiuni (legea lui Hooke) este:

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

Exprimată funcţie de deplasările din noduri:

$$\sigma = E\left[B\right]\left\{\delta_i\right\}$$

3

Ea se scrie sub formă matricială ca:

$$\left\{\sigma\right\} = \underbrace{\left[D\right]\left[B\right]}_{\left[S\right]}\left\{\delta_i\right\}$$

în acest caz particular matricile {σ} şi [D] au câte un singur termen

$[S]$ este denumită si matricea tensiunilor elementului (element stress matrix)

Notă: întrucât deformaţia specifică este constantă pe întregul element şi tensiunea σ este constantă pe întregul element

Pasul 4:   Se deduce expresia matricei de rigiditate

Forţa de tracţiune din bară este $F = A\ \sigma$

Din condiţii de echilibru:

$$F_{1x} = -F$$

$$F_{2x} = F$$

Sub formă matricială se scrie:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sigma$$

Utilizând expresia lui σ funcţie de deplasările nodale (3), se obţine:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

se notează: $k = \dfrac{AE}{L}$ rigiditatea barei

se obţine relaţia forţe-deplasări sub forma specifică:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (4) \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Notă: Pentru simplificarea notaţilor s-a renunţat la indicele x

[K]- matricea de rigiditate a elementului

Rezolvarea pentru deplasări

- Matricea este simetrică
- Termenii diagonalei principale sunt pozitivi
- Matricea este singulară
- Pentru a putea soluţiona sistemul de ecuaţii ce leagă forţele de deplasări sunt necesare condiţii suplimentare, respectiv condiţiile limită.

În acest caz $u_1 = 0$

Rezultă:

$$u_2 = \frac{F_2}{k} = \frac{F_2 \mathrm{L}}{\mathrm{EA}}$$

Calculul tensiunilor

Conform 3 se scrie:

$$\sigma = E\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{\mathrm{E}\, F_2\, \mathrm{L}}{\mathrm{L\,A\,E}} = \frac{F_2}{\mathrm{A}}$$

Important: formularea prezentată permite generalizarea

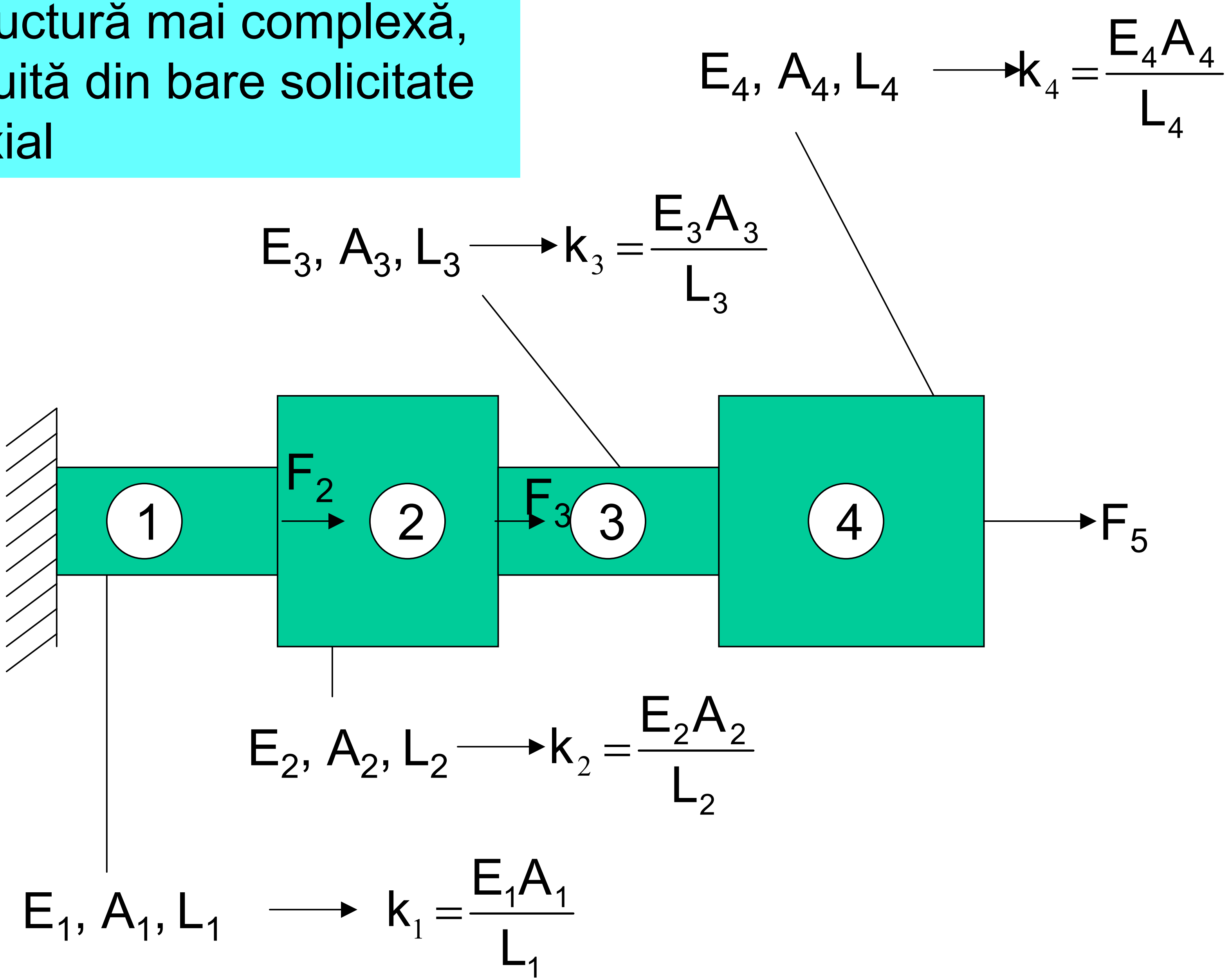
În formularea matriceală pentru elementul finit, termenii care compun matricea de rigiditate pot fi interpretaţi ca fiind coeficienţi de influenţă care leagă forţele nodale de deplasările nodale ale structurii:

$$[K]\{\delta\}=\{F\}$$

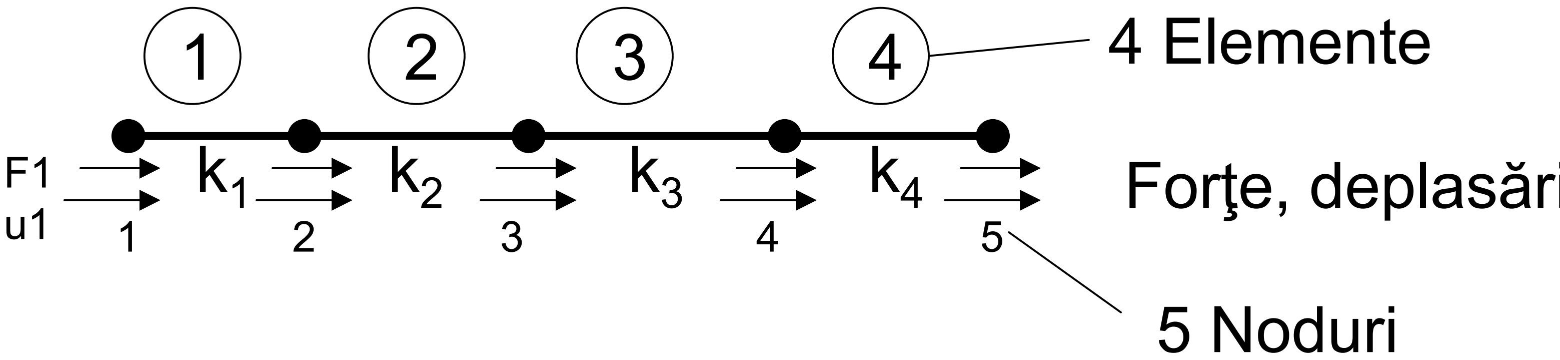
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Conform definiţiei, valoarea unui coeficient de influenţă de rigiditate k_{ij} este valoarea forţei din nodul “i” pe care o induce o deplasare egală cu unitatea în nodul “j”, deplasările în celelalte noduri fiind 0 (blocate), elementul rămânând în echilibru.

O structură mai complexă, alcătuită din bare solicitate uniaxial



Abstractizarea:



Pentru fiecare element se poate scrie o relaţie de tipul

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [\mathrm{K}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$ indicii 1 şi 2 corespunzând nodurilor elementului

Corespondenţa dintre numerotarea globală şi cea locală a nodurilor este prezentată în tabelul următor

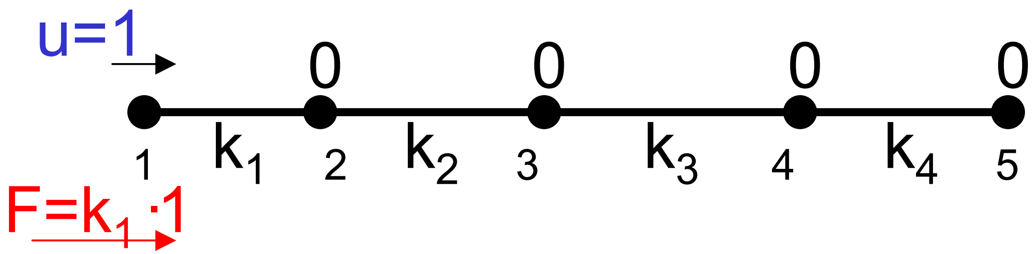
Element	1		2		3		4	
Nr nod local	1	2	1	2	1	2	1	2
Nr. nod global	1	2	2	3	3	4	4	5

Relaţia forţe - deplasări care trebuie stabilită pentru această structură va fi de forma:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & k_{44} & k_{45} \\ \cdots & \cdots & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

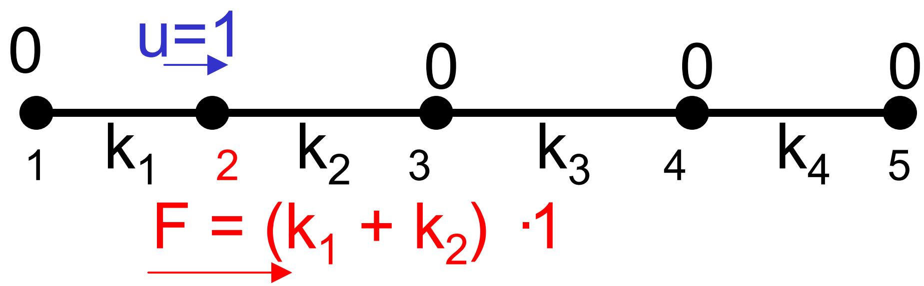
Construirea matricei [K] - matricea de rigiditate a structurii.

O primă abordare este cea directă, bazată pe metoda coeficienţilor de influenţă:



$$k_{11} = k_1$$

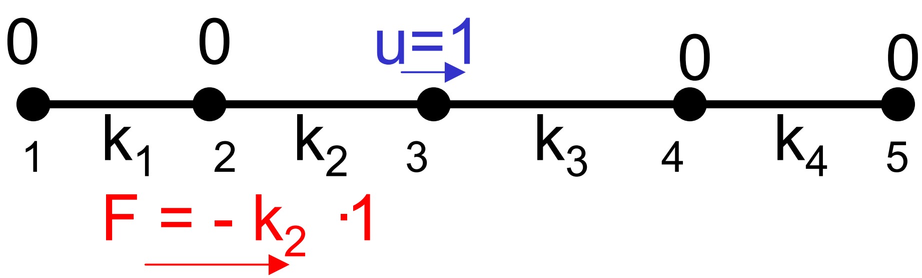
$$k_{12} = k_{13} = k_{14} = k_{15} = 0$$



$$k_{22} = k_1 + k_2$$

$$k_{21} = -k_1 \quad k_{23} = -k_2$$

$$k_{24} = k_{25} = 0$$



$$k_{33} = k_2 + k_3$$

$$k_{32} = -k_2 \quad k_{34} = -k_3$$

$$k_{31} = k_{35} = 0$$

....

În final rezultă:

$$[K]=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

O altă abordare:
asamblarea matricii de rigiditate a structurii

Se scrie matricea fiecărui element, expandată la rangul matricei întregului sistem:

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathrm{k}_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \\ \\ \end{Bmatrix}$$

Indicele superior pentru F şi u se referă la numărul elementului

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathsf{k}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathsf{k}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1^4 \\ F_2^4 \end{Bmatrix} = \mathrm{k}_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix}$$

Pentru asamblare se însumează matricile elemetelor şi se impun condiţiile necesare pentru echilibru şi compatibilitate :

Echibrul forţelor:

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1^4 \\ F_2^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$$

rezultă:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \mathsf{k}_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathsf{k}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \mathsf{k}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathsf{k}_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix}$$

Pentru compatibilitate - asigurarea continuităţii structurii:

$$u_2^1 = u_1^2 = u_2$$
$$u_2^2 = u_1^3 = u_3$$
$$u_2^3 = u_1^4 = u_4$$

Corespunzător notaţiei globale a nodurilor:

$$u_1^1 = u_1$$
$$u_4^2 = u_5$$

Vectorul deplasărilor:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

devine acelaşi pentru toţi termenii

În final:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

$[K]$ matricea de rigiditate a sistemului

• Obţinerea soluţiei căutate pentru deplasări implică rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare.

•Trebuie aplicate condiţiile la limită :

în problema analizată în nodul 1 deplasarea este 0.

• Sub această formă sistemul nu poate fi rezolvat întrucât matricea de rigiditate este singulară.

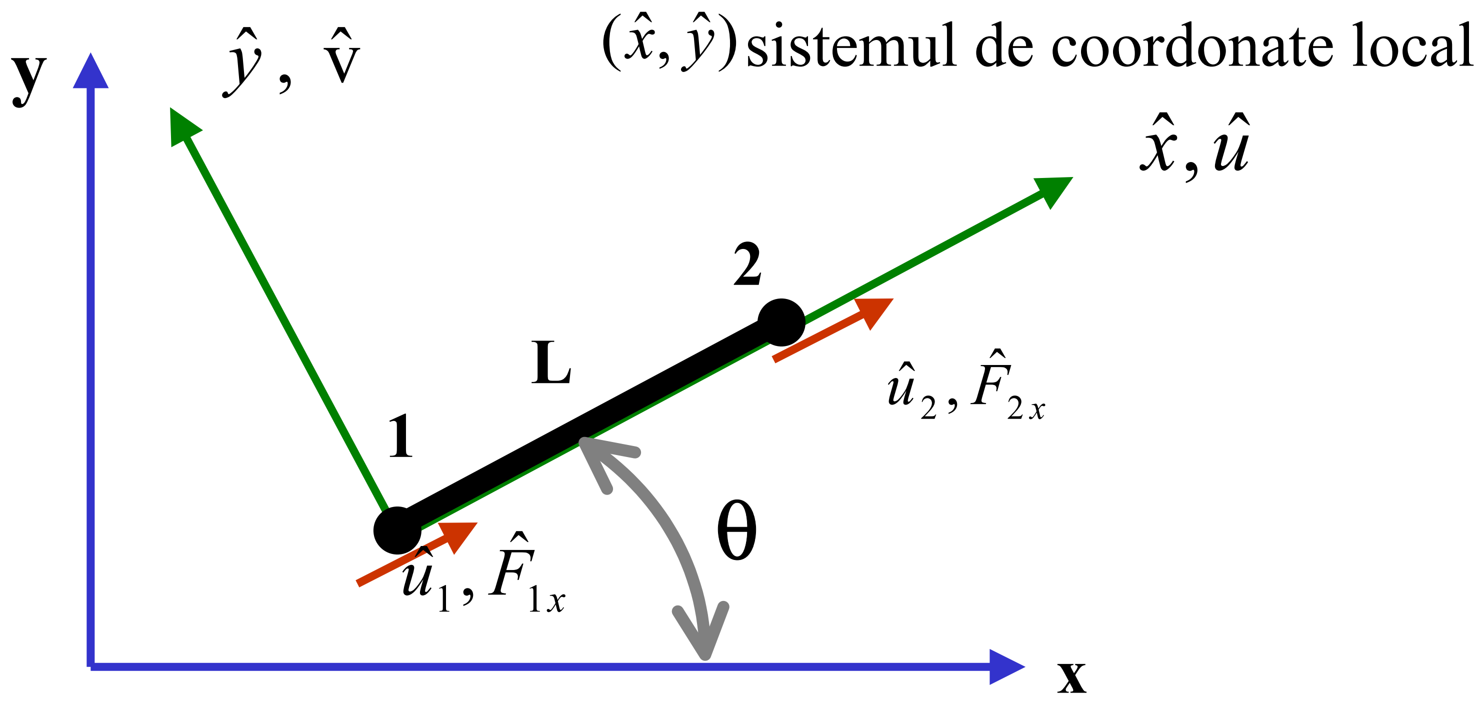
• Se elimină din sistem rândul corespunzător condiţiei la limită, iar din matricea de rigiditate coloana corespunzătoare.

• Se soluţionează sistemul pentru deplasări

• Se calculează apoi forţelele necunoscute, utilizând forma iniţială a matricei de rigiditate

•Se calculează tensiunile din elemente

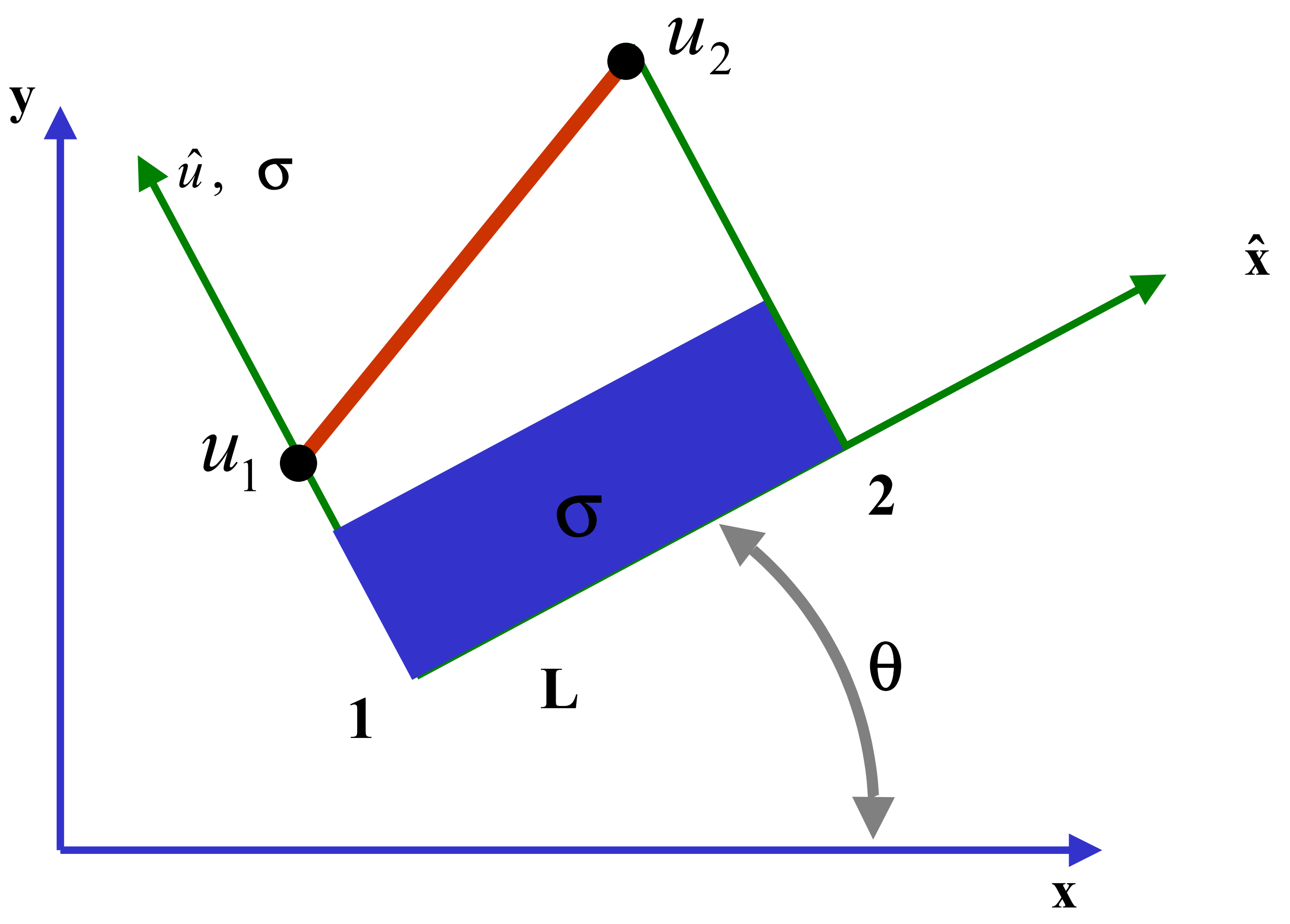
Elementul Bară 2D (Truss 2D)



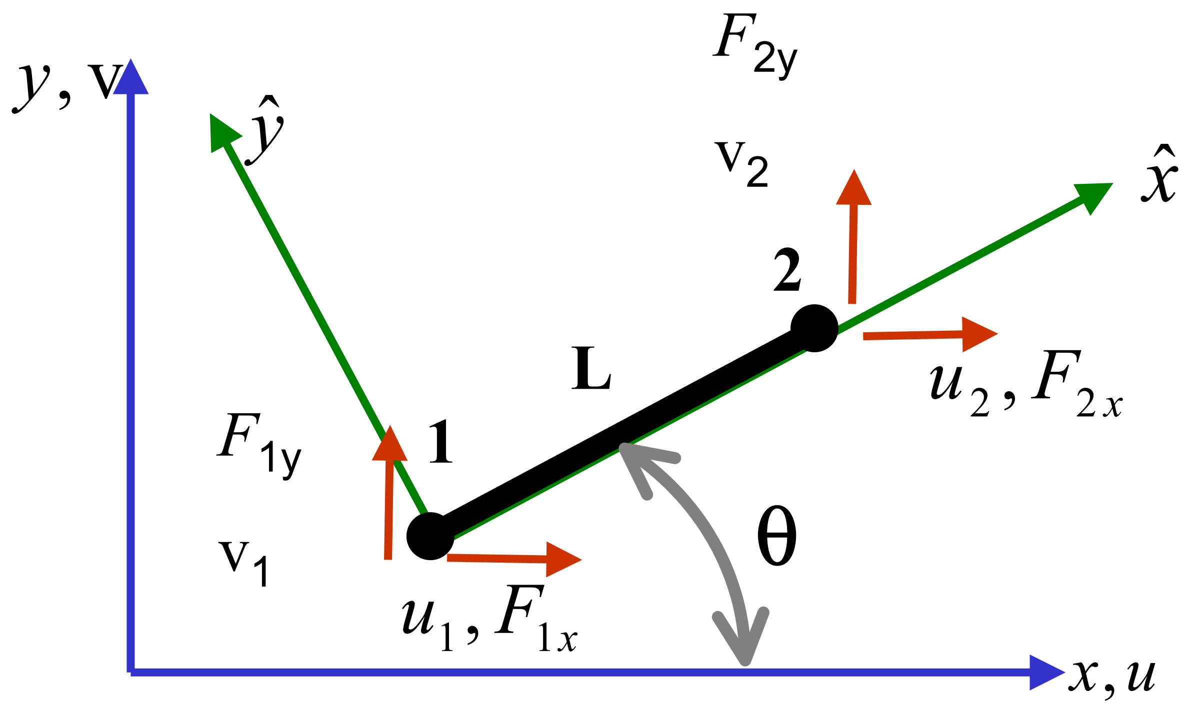
(**x, y**) sistemul de coordonate global

Aceleaşi ipoteze ca şi în cazul elementului unidimensional

Variaţia deplasărilor şi a tensiunii în elementul bară



Forţele şi deplasările în sistemul de coordonate global



Ecuaţia pentru elementul bară, exprimată în sistemul de coordonate local (4), dedusă anterior, este:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\hat{F}\} = [\hat{K}]\{\hat{\delta}\}$$

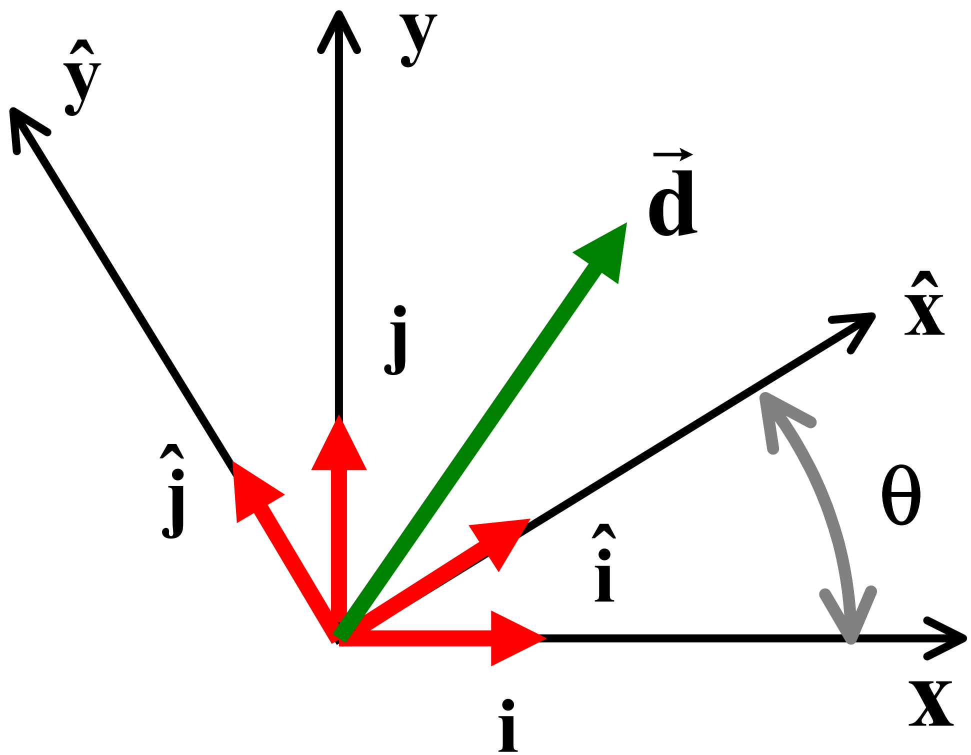
Se reaminteşte că $\hat{F}_{1y}$, $\hat{F}_{2y}$, , $\hat{\mathrm{v}}_1$, $\hat{\mathrm{v}}_2$ sunt egale cu 0

Prin expandarea matricei de rigiditate $[\hat{K}]$ la dimensiunile 4 x 4 ecuaţia elementului finit devine:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x} \\ \hat{F}_{1y} \\ \hat{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\hat{K}]} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\mathrm{v}}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\mathrm{v}}_2 \end{Bmatrix}$$

5

Transformarea de coordonate pentru un vector în plan



$$\vec{\mathbf{d}} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} = \hat{d}_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{d}_y \hat{\mathbf{j}}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_x \\ \hat{d}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_x \\ \hat{d}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}$$

cu: $C = \cos\theta$

$S = \sin\theta$

unde:

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

Matricea de transformare (matrice ortogonală şi antisimetrică)

Pentru a aplica transformarea simultan la ambele noduri matricea de transformare va expanda la rangul dublu: 4 x 4

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

Matricea este ortogonala şi antisimetrică

Obiectivul este stabilirea matricei de rigiditate globală:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \qquad (6)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} \qquad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \mathrm{v}_1 \\ u_2 \\ \mathrm{v}_2 \end{Bmatrix}$$

Relaţia dintre deplasările din noduri exprimate în coordonate locale şi cele în coordonate globale este:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\mathrm{v}}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\mathrm{v}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \mathrm{v}_1 \\ u_2 \\ \mathrm{v}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\hat{\delta}\right\} = [T]\{\delta\} \qquad (7)$$

Similar pentru forţe:

$$\left\{\hat{F}\right\} = [T]\{F\} \Rightarrow \{F\} = [T]^{-1}\left\{\hat{F}\right\} \qquad (8)$$

Din relaţiile 5 ... 8 rezultă:

$$\{F\} = [T]^{-1}\left[\hat{K}\right][T]\{\delta\}$$

matricea de transformare $[T]$ fiind ortogonală:

$$[T]^{-1} = [T]^{T}$$

$$\{F\} = \underbrace{[T]^{T}\left[\hat{K}\right][T]}_{[K]}\{\delta\}$$

$$\boxed{[K] = [T]^{T}\left[\hat{K}\right][T]} \qquad 9$$

Matricea de rigiditate căutată este:

$$[K]=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$

Un rezultat similar se poate obţine si prin metoda directă, a coeficienţilor de influenţă

Calculul tensiunilor

Conform 3 se scrie: $$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}$$

Relaţia dintre deplasările exprimate în sistemul de coordonate local şi cel global se poate scrie ca:

$$\left\{\hat{\delta}\right\} = \left[T^*\right]\left\{\delta\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ \mathrm{v}_1 \\ u_2 \\ \mathrm{v}_2 \end{Bmatrix}$$

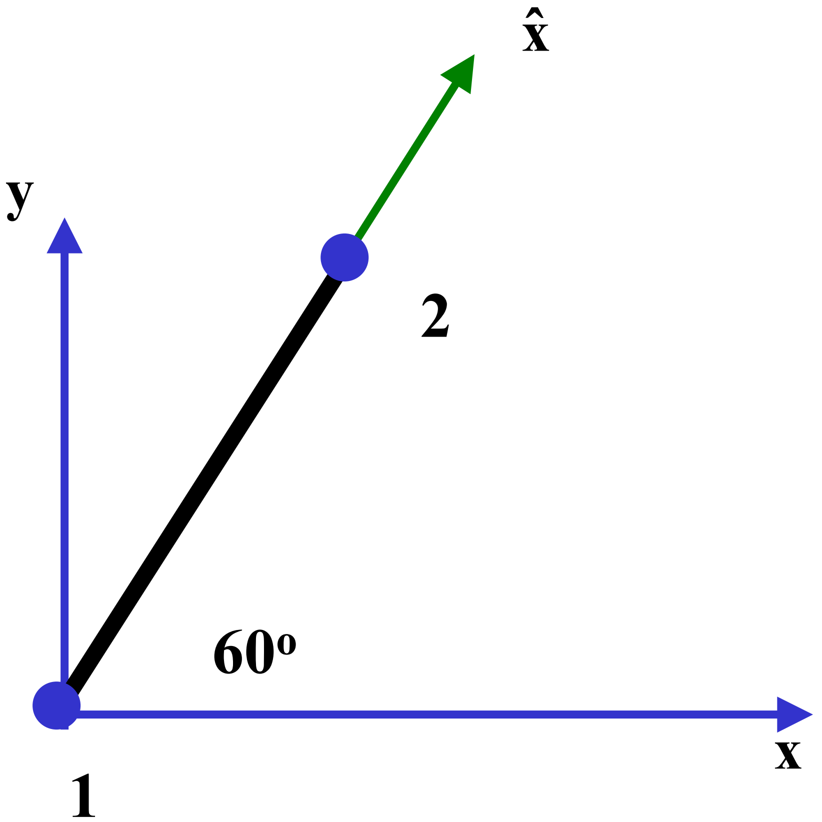
Dacă se evidenţiază matricea tensiunilor S, rezultă:

$$\sigma = [\,S'\,]\{\delta\}$$

$$[\,S'\,] = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & C & S\end{bmatrix}$$

$$[\,S'\,] = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-C & -S & C & S\end{bmatrix}$$

Exemplu



$A = 4 \times 10^{-4}\ m^2$

$E = 210\ GPa$

$L = 2\ m$

$\theta = 60^o$

$u_1 = 0.25\ mm$

$v_1 = 0.0\ mm$

$u_2 = 0.50\ mm$

$v_2 = 0.75\ mm$

Notă: valorile deplasărilor u şi v satisfac condiţia deformării axiale a barei

$$[S'] = \frac{210 \cdot 10^9 \ N/m^2}{2\,m} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

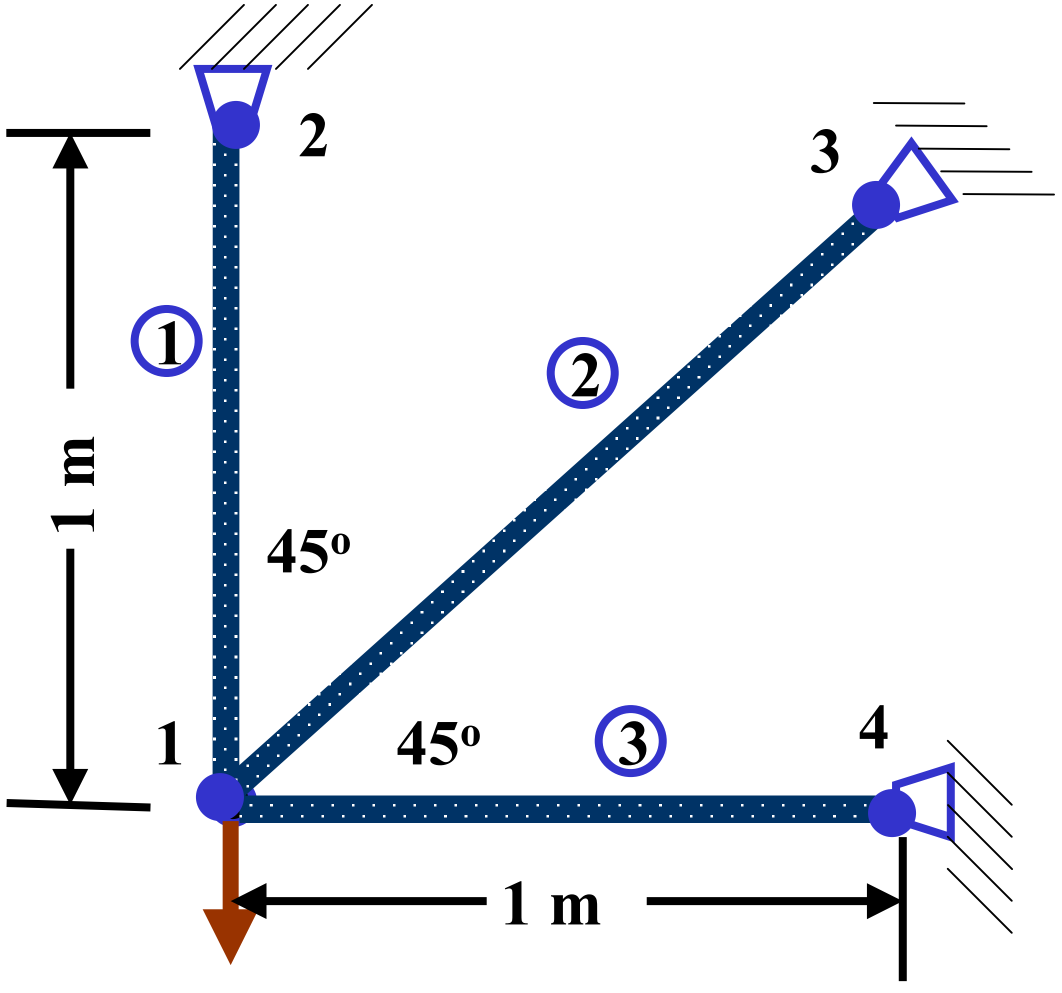
$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \mathrm{v}_1 \\ u_2 \\ \mathrm{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.25 \cdot 10^{-3} \ m \\ 0.0 \, m \\ 0.50 \cdot 10^{-3} \ m \\ 0.75 \cdot 10^{-3} \ m \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{210 \cdot 10^9}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.25 \cdot 10^{-3} \\ 0.0 \\ 0.50 \cdot 10^{-3} \\ 0.75 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = 8.132 \cdot 10^7 \ N/m^2$$

$$\sigma = 81.32 \ MPa$$

Exemplu :Structură cu 3 bare



Datele numerice pentru exemplu

Modulul de elasticitate pentru toate elementele
$E = 2\ 10^5$ MPa

Element	Node local 1	Node local 2	L (mm)	A (mm^2)	θ	C	S	C^2	S^2	CS
	Nr. node global									
1	1	2	1000	200	90	0	1	0	1	0
2	1	3	1000	200	45	0.7071	0.7071	0.5	0.5	0.5
3	1	4	1410	200	0	1	0	1	0	0

$$\left[K^{(1)}\right]=\frac{(2\cdot 10^{5})\,(200)}{(1000)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[K^{(2)}\right]=\frac{(2\cdot 10^{5})\,(200)}{(1414)}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\left[K^{(3)}\right]=\frac{(2\cdot 10^{5})\,(200)}{(1000)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix}
k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} + \cdots
$$

$$\cdots\begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 & 0 & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & 0 & 0 & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & 0 & 0 \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & 0 & 0 & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$
\cdots\begin{bmatrix}
k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} \\
k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} \\
k_{41}^{(3)} & k_{42}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)}
\end{bmatrix}
$$

$$[K]=(40000)\begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 & 0 & 0 & -0.354 & -0.354 & -1 & 0 \\ 0.354 & 1.354 & 0 & -1 & -0.354 & -0.354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De comentat: de ce coloanele 3 şi 8 din matricea de rigiditate sunt nule

Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual pentru formularea matricei de rigiditate.

O structură liniar-elastică este în stare de echilibru static dacă lucrul mecanic virtual al forţelor exterioare este egal cu energia de deformare pentru ori ce deplasare virtuală compatibilă cu legăturile sistemului.

Pentru elementul de bara solicitat axial, lucrul mecanic al forţelor exterioare (forţe ce acţionează în noduri este:

$$\Delta W = \hat{F}_{1x} \cdot \Delta \hat{u}_1 + \hat{F}_{2x} \cdot \Delta \hat{u}_2 = \sum \hat{F}_i \cdot \Delta \hat{u}_i$$

Scris sub formă matricială

$$\Delta W = \{F\} \cdot \{\Delta\delta_i\} = \{\Delta\delta_i\}^T \{F\}$$

Nota: Pentru simplificare s-a renunţat la utilizarea notaţiei specifice sistemului de coordonate local

Lucrul mecanic virtual al tensiunilor este:

$$\Delta W_i = \int_{Vol} \sigma \cdot \Delta\varepsilon \, dV = \int_{Vol} \Delta\varepsilon^T \sigma \cdot dV$$

Tinând cont de exprimarea deformaţiilor specifice funcţie de deplasări 2, care se scrie şi sub forma:

$$\{\varepsilon\}^T = \{\delta_i\}^T [B]^T$$

respectiv

$$\Delta W_i = \int_{Vol} \Delta\delta_i^{\,T} [B]^T \sigma \cdot dV$$

Ţinând cont şi de expresia tensiunilor funcţie de deplasările nodale, exprimată de :

$$\sigma = E[B]\{\delta_i\}$$

rezultă :

$$\Delta W_i = \int_{Vol} \Delta\delta_i^{\,T} [B]^T E[B]\{\delta_i\} \cdot dV$$

$$\Delta W_i = \Delta\delta_i^{\,T} \int_{Vol} [B]^T E[B] dV \cdot \{\delta_i\}$$

Din egalitatea $\boxed{\Delta W = \Delta W_i}$ rezultă:

$$\left\{\Delta\delta_i\right\}^T \left\{F\right\} = \Delta\delta_i^{\;T} \underbrace{\int_{Vol} \left[B\right]^T E \left[B\right] dV}_{\left[K\right]} \cdot \left\{\delta_i\right\}$$

$$\boxed{\left\{F\right\} = \left[K\right]\left\{\delta_i\right\}}$$

Pentru elementul bara 1D, cu $\left[B\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$

$$\left[K\right] = \int_0^L \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} [-1 \quad 1] A dx = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Expresia pentru matricea de rigiditate a elementului se poate generaliza şi pentru stari de încărcare mai complexe. În acest caz în $\{\varepsilon\}$ vor apare mai multe componente, iar pentru legatura între tensiuni şi deplasări se foloseşte relaţia $\{\sigma\}=[D][B]\{\delta_i\}$

Matricea de rigiditate se calculează astfel:

$$[K]=\int_{Vol}[B]^T[D][B]dV \tag{10}$$