Metoda elementului finit (MEF)

2 ore curs + 2 ore laborator

Prof.dr. ing. Adrian PASCU
Catedra Organe de maşini şi Tribologie

Formarea notei:

- Lucrări laborator: 40%
- Test final laborator: 20%
- Bonificaţie prez. curs 20%
- Test final curs : 20%

"Although the finite element method can make a good engineer better, it can make a poor engineer more dangerous."

"În timp ce metoda elementului finit poate face ca un inginer bun să devină mai bun, ea poate face ca un inginer slab să devină mai periculos."

Bibliografie

- **Bathe, K.-J.:** Finite-Elemente-Methoden. Berlin, Heidelberg,New York: Springer 1986

- **Zienkiewicz, O.C.:** The Finite Element Method. McGraw-Hill 1977

- **Huebner, H. K. :**

  The Finite Element Method for Engineers

  John Willey & Sons 1975

- **Blumenfeld, M**

  Introducere în metoda elementelor finite

  Ed. Tehnica, 1995
- **Gârbea , D.**

  Analiză cu elemente finite

  Ed. Tehnică, 1990
- **Gafiţanu, M. ş.a**.

  Elemente finite şi de frontieră cu aplicaţii la calculul organelor de maşini

  Ed. tehnică , 1987
- **Pascariu, I.**

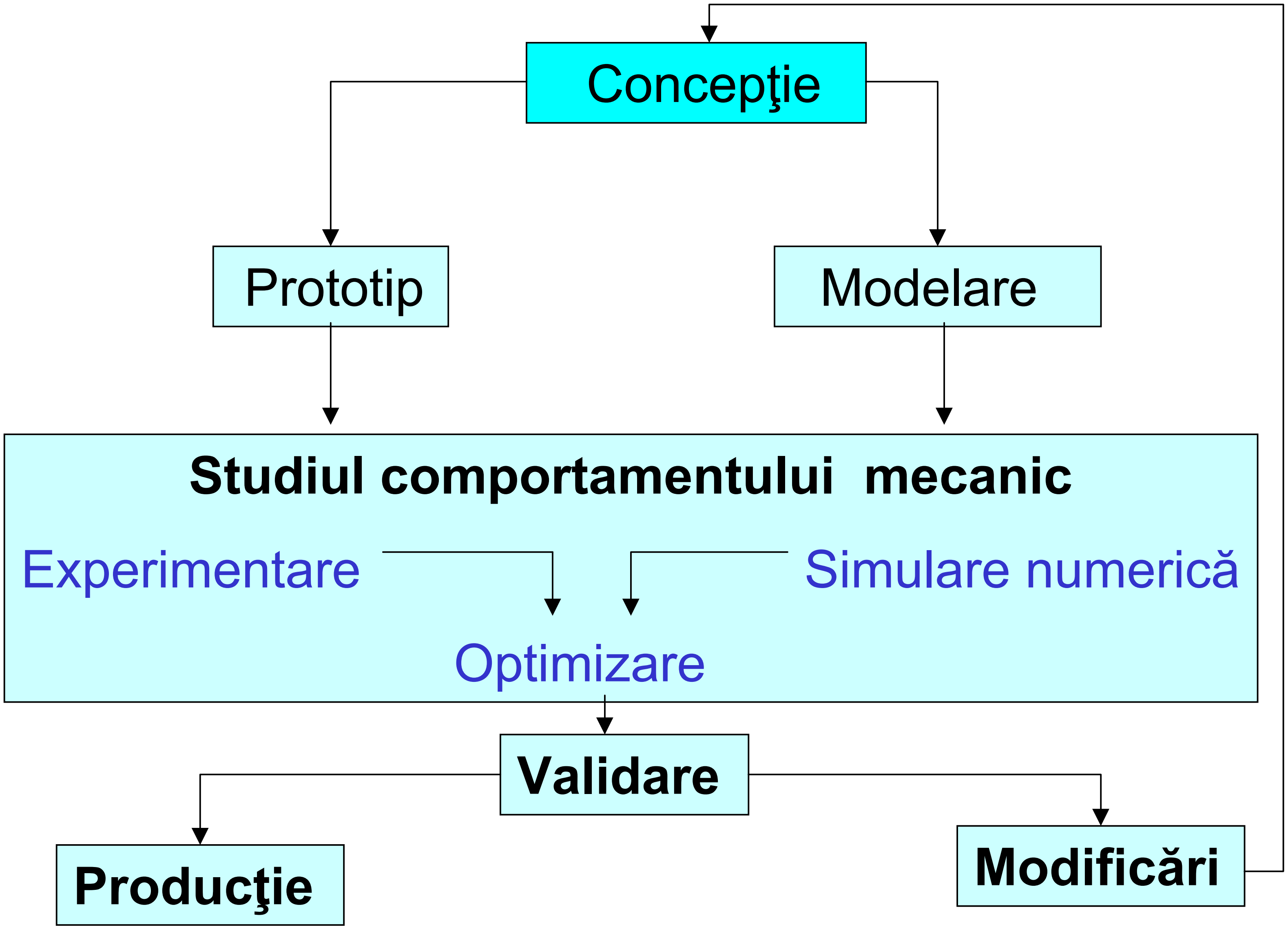
  Elemente finite Concepte-Aplicaţii

  Ed. Militară , 1985

Scurt istoric

- 1940‘: Utilizarea metodelor matriciale în calculul structurilor (Hrennicoff -1941 şi formulare variaţională R.Courant- 1943)
- 1950‘: Introducerea procedurilor de calcul bazate pe metoda deplasărilor şi respectiv a rigidităţilor pentru calculul structurilor complexe din aviaţie - formularea energetică - Argyris-1954)
- 1970‘: Utilizarea efectivă şi eficientă a MEF pentru calculul structurilor în industria aerospaţială (NASA) şi apoi în cea constructoare de automobile (NASA->NASTRAN)
- 1960: Impunerea termenului de element finit “Finite Element“- R.Clough-1960
- 1980’: Metoda câştigă teren şi în alte domenii: mecanica fluidelor, electromagnetism etc.
- 1990’: FEM se impune ca “unealtă” standard (numerică) pentru calculele inginereşti

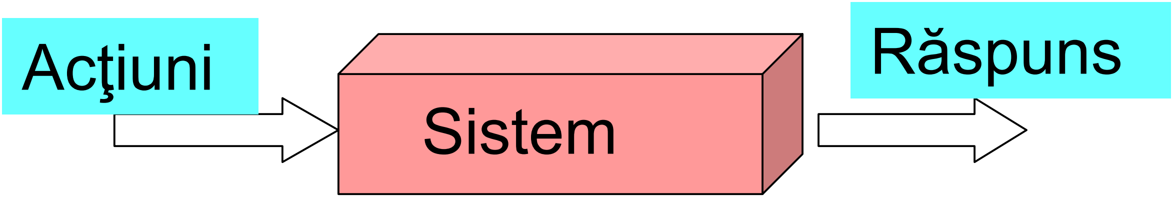
Organigrama etapelor la realizarea unei piese mecanice



• Proiectarea modernă trebuie să facă faţă multor cerinţe

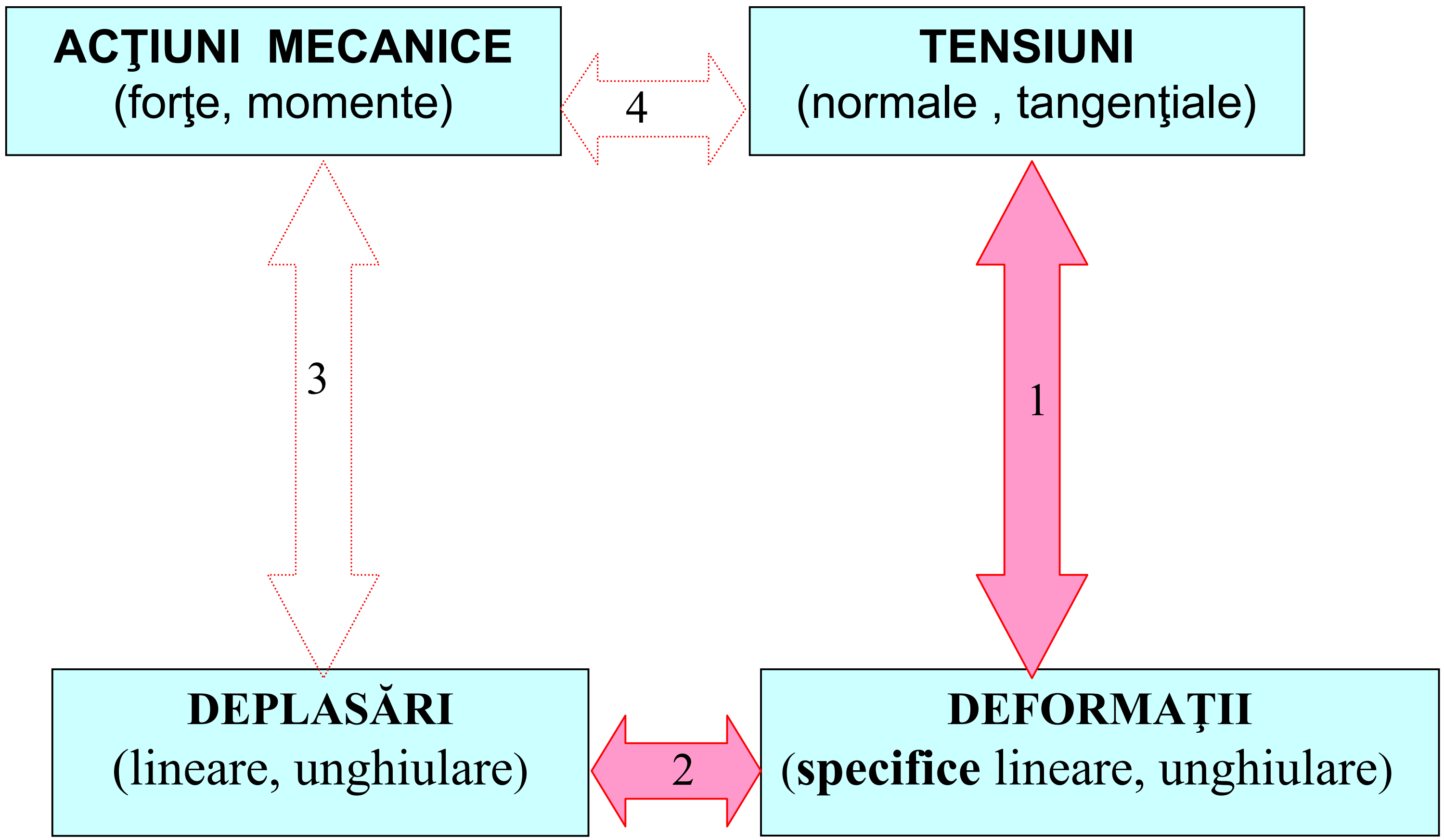
• O sarcină majoră este determinarea comportării unei structuri mecanice sau a unor elemente structurale sub efectul acţiunilor exterioare

•Concret, intrebarea esenţială este : care este răspunsul structurii atunci când este supusă acţiunilor exterioare (variaţii de forţe, de temperaturi etc.)



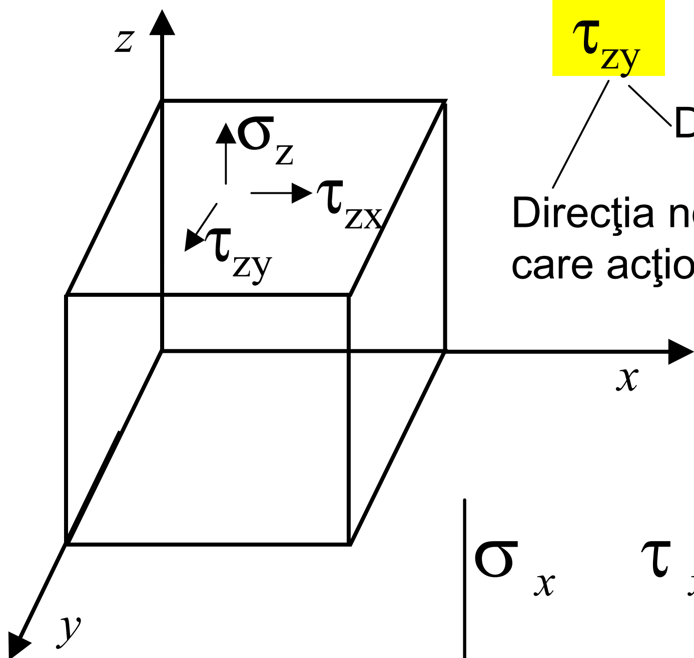
STAREA GLOBALĂ A STRUCTURII (macro)

STAREA LOCALĂ A MATERIALULUI (micro)



Relaţii generale	Particularizare pentru o bară simplă solicitată axial
1 $\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}$	1* $\sigma = E * \varepsilon$
2 $\{\varepsilon\} = [B] * \{\delta\}$	2* $\varepsilon = (1/L)\,\Delta l$
3 $\{F_i\} = [K] * \{\delta_i\}$ (în condiţiile acceptării unei discretizări şi a unei funcţii predefinite pentru deplasări)	3* $F = (E*A/L)\,\Delta l$ $F = k * u$
4 $\{\sigma\} = [D] * [B] * \{\delta_i\}$ (în condiţiile acceptării unei discretizări şi a unei funcţii predefinite pentru deplasări)	4* $\sigma = F / A$

Tensorul tensiunilor



τ_{zy}

Direcţia de acţiune

Direcţia normalei la planul în care acţionează

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Relaţia deformaţii specifice-deplasări

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

u, v, w , sunt componentele deplasării după direcţiile x, y şi z.

Relaţia deformaţii specifice-deplasări

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\end{vmatrix}\begin{Bmatrix}u_{(x,y,z)}\\ v_{(x,y,z)}\\ w_{(x,y,z)}\end{Bmatrix}$$

Sub formă matricială:

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta_{(x,y,z)}\}$$

Relaţia tensiuni-deformaţii specifice (legea lui Hooke generalizată)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ & & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ & & & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ & sim & & & d_{55} & d_{56} \\ & & & & & d_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Sub formă matricială:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Pentru materiale omogene, izotrope, cu comportare lineară:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Notă: $G = \dfrac{E}{2(1-\nu)}$

Pentru starea plană de tensiuni:

$$\sigma_z = 0 \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) - se \;\; neglijeaza$$

rezultă:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

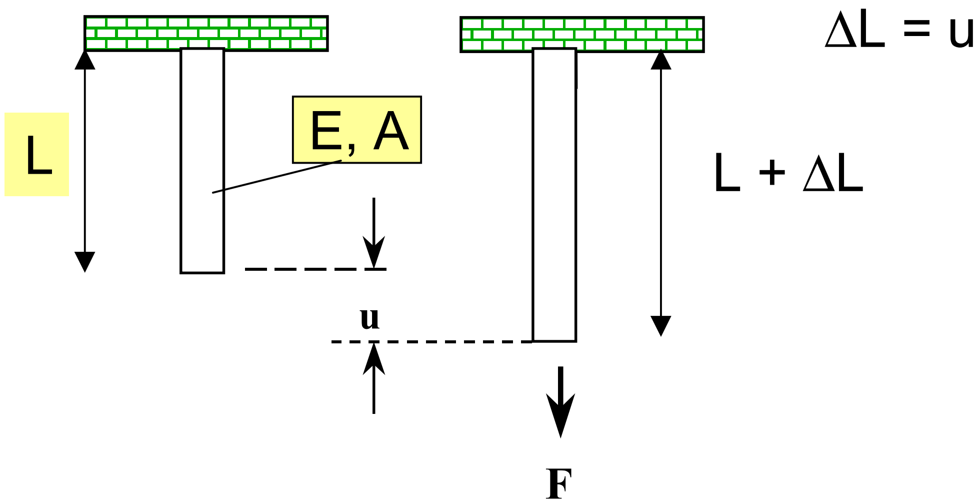
Pentru starea plană de deformaţii:

$$\varepsilon_z = 0 \qquad \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right]$$

$$se\ \ neglijeaza$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- Relaţii analitice directe se pot obţine numai pentru cazuri particulare simple, cum sunt structurile tip bară supuse la solicitări simple. Cel mai simplu exemplu este bara solicitată axial:



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma = \mathrm{E} \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{L}\mathrm{u}$$

$$\boxed{\mathrm{F} = \frac{\mathrm{E} \cdot \mathrm{A}}{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{u}}$$

$$\boxed{\mathrm{F} = k \cdot \mathrm{u}}$$

Metode de calcul numeric

- Programe matematice generale: Mathcad, Mathematica, Maple, Matlab
- Programe speciale care prelucrează şi adaptează formulele de calcul
  - de ex. metodologii de calcul standardizate, nomograme
- Metode numerice
  - Metoda diferenţelor finite
  - Metoda elementelor de frontieră
  - Metoda elementelor finite (MEF) (FEM)

Principiul de bază al procedurilor numerice

- Ecuaţiile diferenţiale descriu comportarea structurii la nivelul unei particule infinitezimale
  - pt. probleme de rezistenţă > Teoria elasticităţii
  - pt. mecanica fluidelor > Ecuaţiile Navier-Stokes
  - pt. câmpuri magnetice > Ecuaţiile Maxwell
  - pt. transfer de căldură în solide > Ecuaţia Fourier

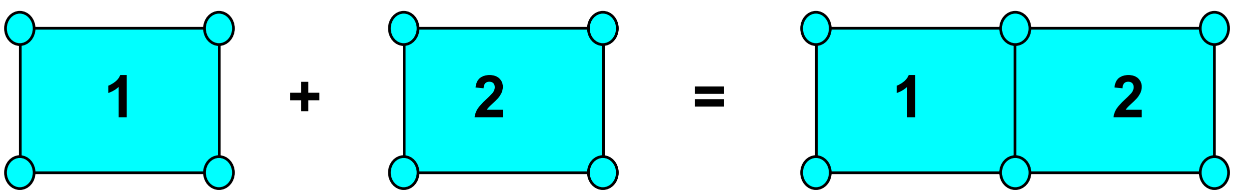
- Funcţia pe care o descrie ecuaţia diferenţială este o mărime caracteristică:
  - pt. probleme de rezistenţă > deplasarea
  - pt. mecanica fluidelor > viteza, presiunea
  - pt. câmpuri magnetice > potenţialul magnetic
  - pt. transfer de căldură > temperatura

Principiul de bază al procedurilor numerice

- Scopul este să obţină soluţia pentru această funcţie. Celelalte mărimi rezultă din prelucrarea funcţiei
- Pentru soluţionarea ecuaţiilor diferenţiale se stabileşte o reprezentare aproximativă pentru funcţia necunoscută.
- Prin procedurile specifice metodelor de rezolvare numerică (Utilizarea diferenţelor, a dezvoltărilor în serie etc.- care implică discretizarea) problema descrisă de ecuaţia diferenţială se transformă într-un sistem de ecuaţii algebrice.
- Prin soluţionarea sistemului de ecuaţii se determină valorile mărimii caracteristice într-un număr finit de puncte şi respectiv coeficienţii care permit definirea concretă a funcţiei de aproximare.

Metoda Elementului Finit (MEF)

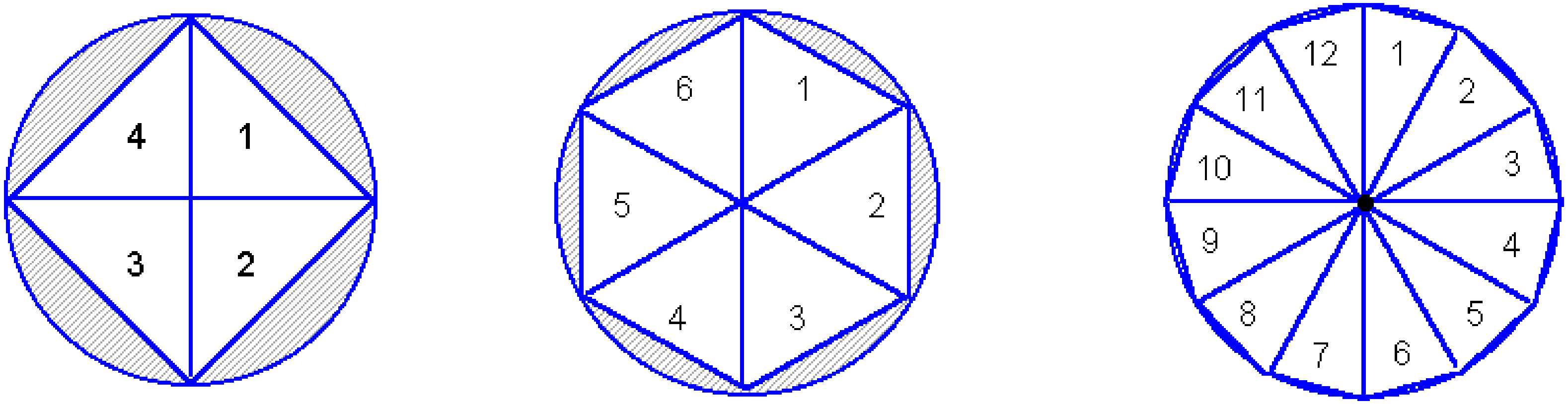
- Discretizarea - Funcţia de defineşte numai pentru domenii mici. Aceasta permite ca pentru descrierea comportării ei în interiorul domeniului să se poată alege funcţii de formă simple, de ordin inferior.
- Funcţia de aproximare pentru întreaga structură rezultă din asamblarea funcţiilor domeniilor individuale, parţiale, mici.
- Aceste domenii individuale sunt denumite elemente. Punctele în care se realizează legătura dintre elemente sunt denumite noduri.



Metoda Elementului Finit (MEF)

O analogie: determinarea ariei unui cerc, considerând că se cunoaşte numai formula de calcul a ariei unui triunghi:

$$A_{tr} = b\,h/2 \quad \Longrightarrow \quad Acerc = \sum_{i=1}^{n} A_{tr\,i}$$



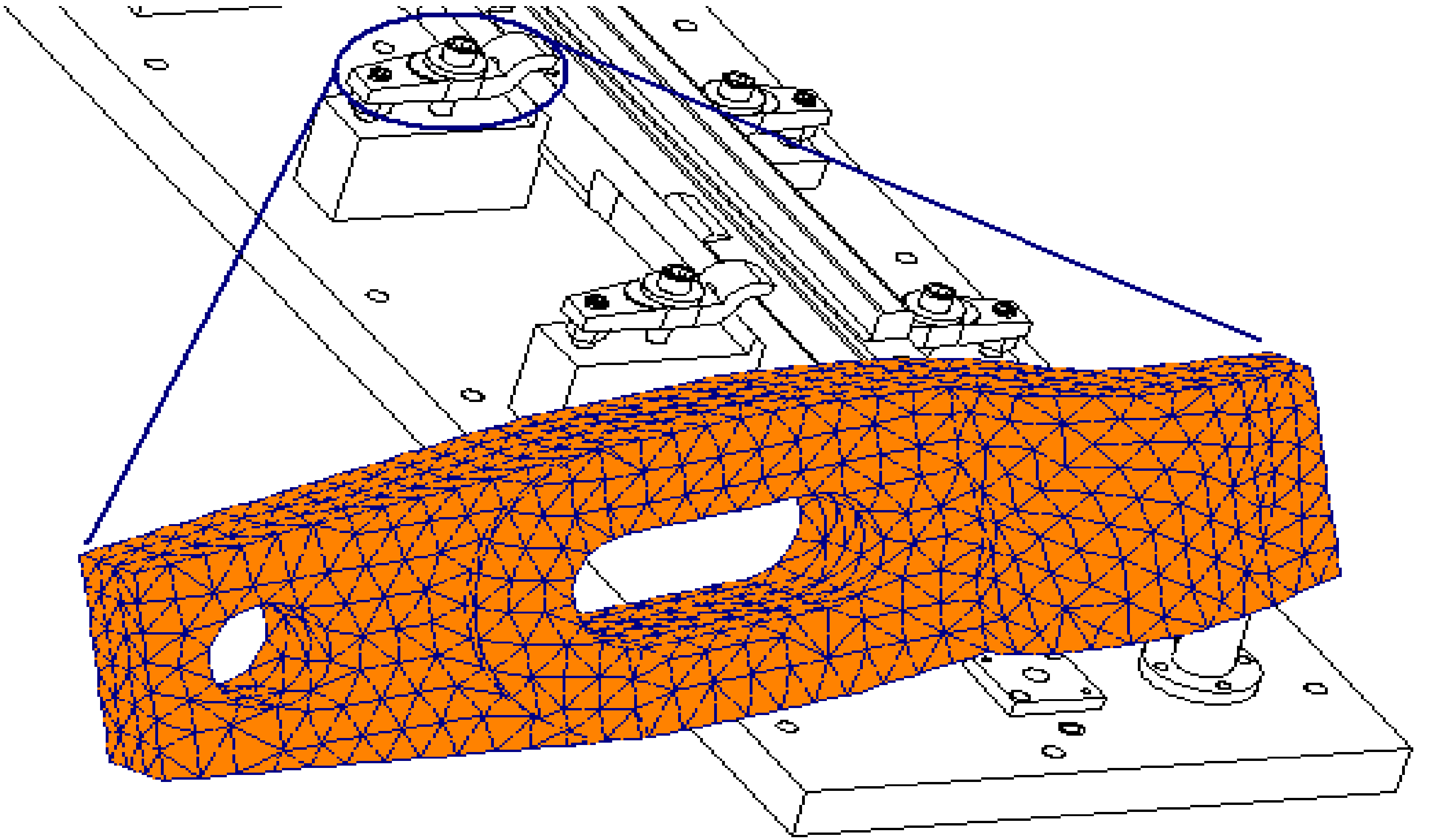
de reţinut:

- utilizarea unei aproximări bazată pe folosirea de elemente mai simple, pentru care avem la dispoziţie o soluţie;

- sporirea exactităţii calculului prin rafinarea discretizării

Metoda Elementului Finit (MEF)

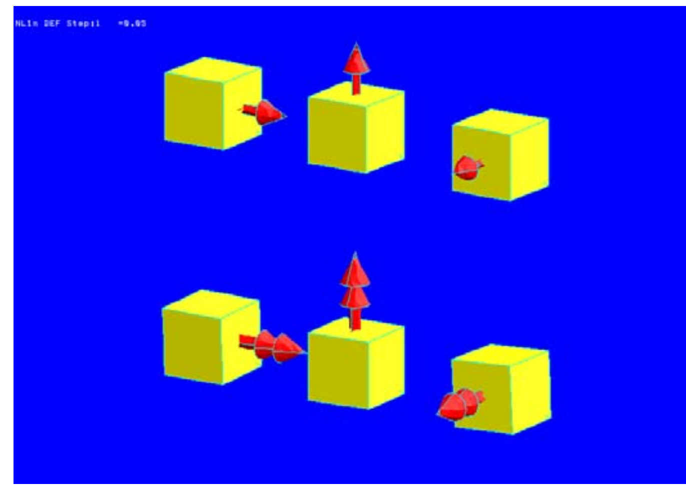
Se pot analiza astfel structruri cu forme mai complexe



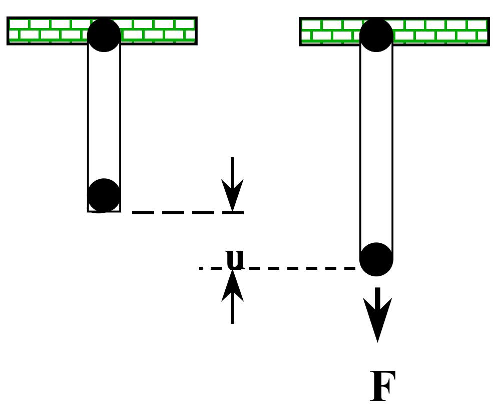
Entităţile cu care operează Metoda elementului finit sunt **nodurile** şi **elementele**

Mărimea fizică urmărită pentru calculul structurilor mecanice este deplasarea. - în urma discretizării : deplasarea nodurilor.

Pentru un nod, ca şi pentru un corp există 6 deplasări posibile, denumite şi grade de libertate (DOF): trei translaţii, notate u,v,w şi trei rotiri, notate rx,ry,rz. Pentru cazuri particulare numărul acestor deplasări este mai redus.



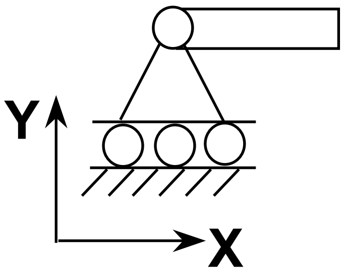
Exemplu:

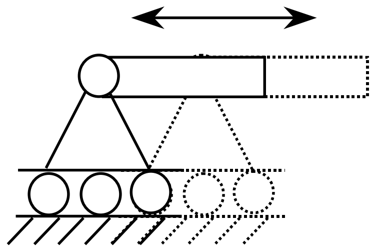


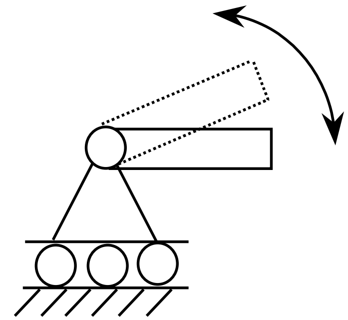
Pentru nodul unui element de structură solicitat uniaxial, singura deplasare ce intervine este **u**

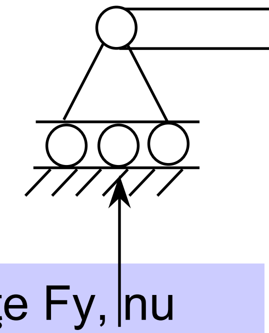
Pentru noduri care intervin în condiţiile de frontieră:

Rezemarea simplă (2D)







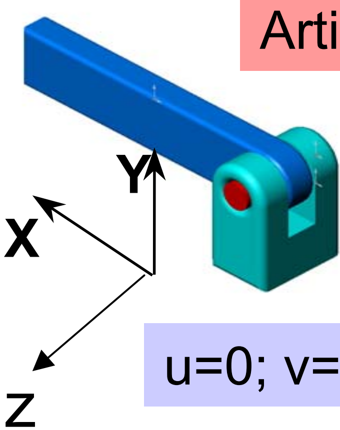


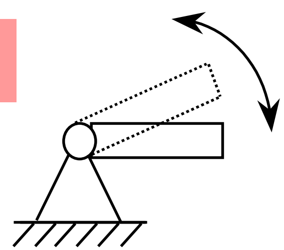
v=0

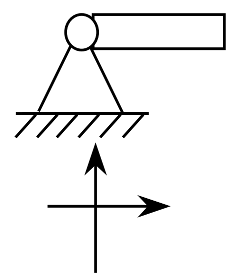
Sunt permise rz şi translaţia u

În plan preia forţe Fy, nu preia momente şi Fx

Articulaţia (2D)





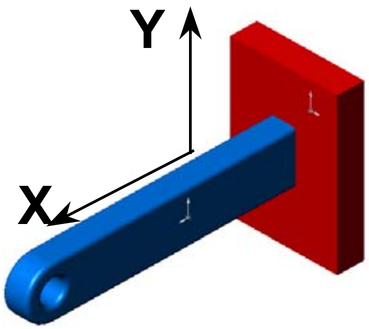


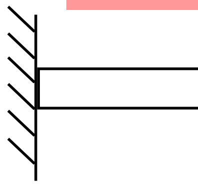
u=0; v=0

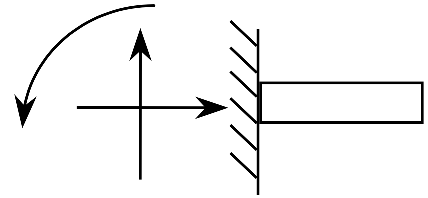
Este permis rz

Preia în plan forţe Fx şi Fy, nu preia momente

Încastrarea





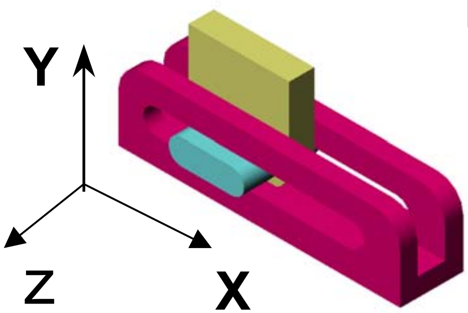


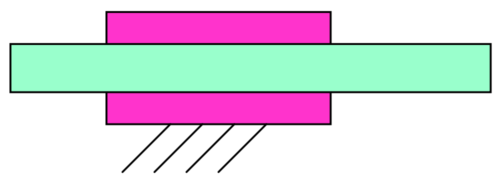
u=0; v=0; rz =0

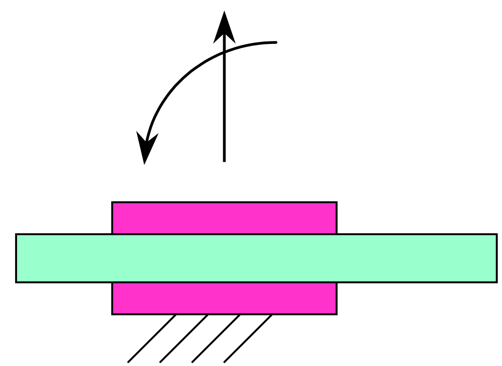
Nu permite nici o deplasare

În plan preia forţe Fx şi Fy precum şi momente

Ghidarea





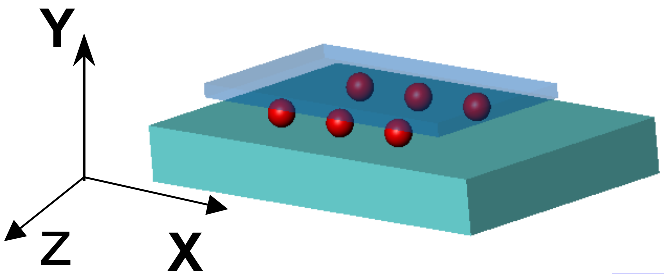


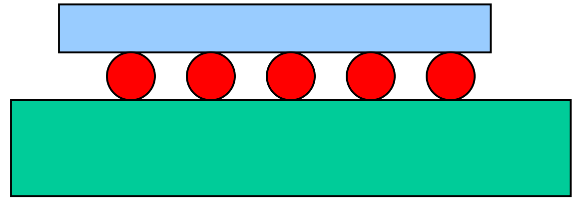
v=0; rz =0

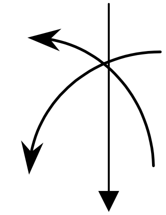
Permite numai translaţia u

În plan preia forţe Fy şi precum şi momente Mz

Sprijinirea plană





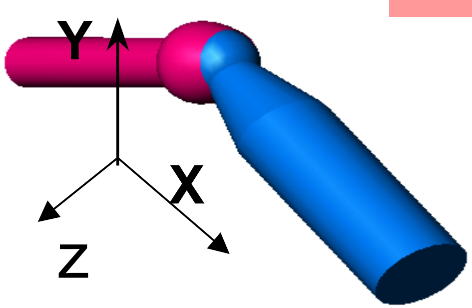


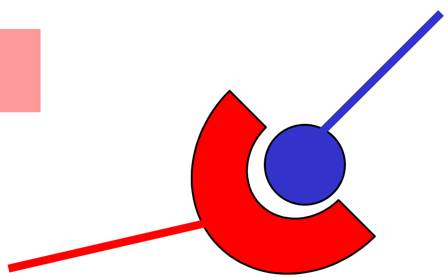
v=0; rx =0;ry =0

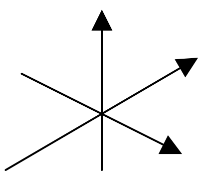
Permite deplasarile u şi v precum şi rotaţia ry

Preia forţe verticale Fy şi momente Mx,Mz

Articulaţia sferică







u=0; v=0; w=0

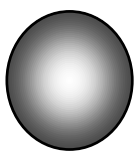
Permite toate rotaţiile, nu permite nici o deplasare

Preia forţe după toate direcţiile, nu preia momente

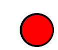
Elementele se diferenţiază:
- după geometrie
- după tipul de încărcare suportat
- legea de comportare a materialului

Exemple

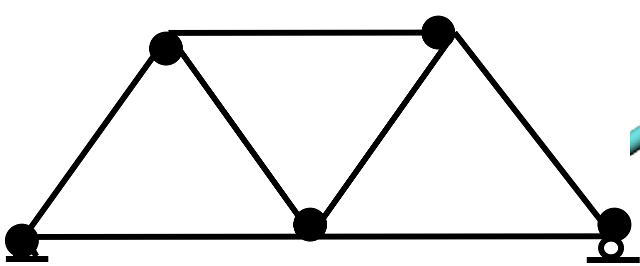
Modelare element finit

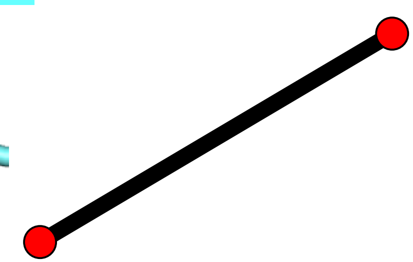


Element cu 1 nod - mass



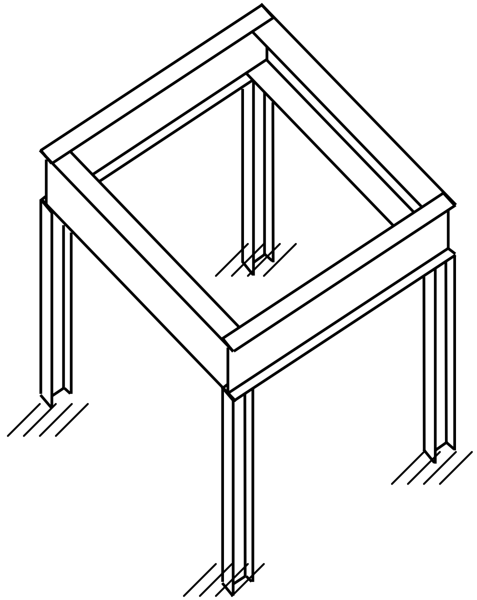
Masă concentrată (se abstractizează cu un punct)

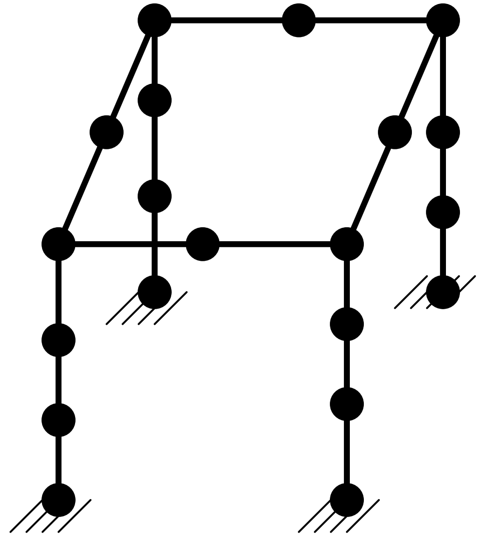




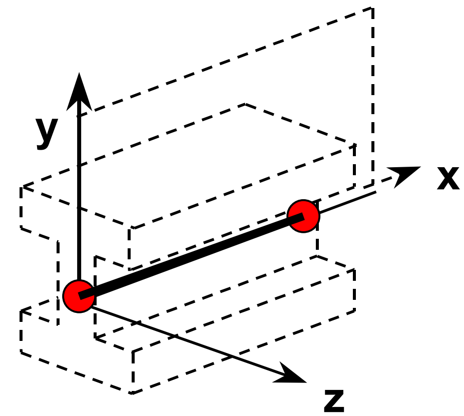
Structură din bare articulate (sunt abstractizate ca linii)

Element bară cu 2 noduri (tip linie) - truss

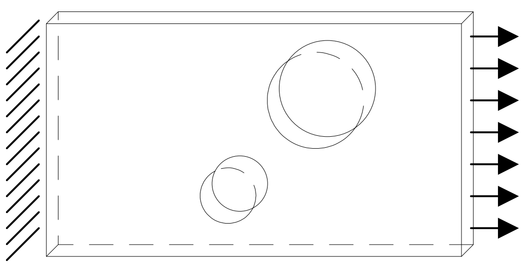


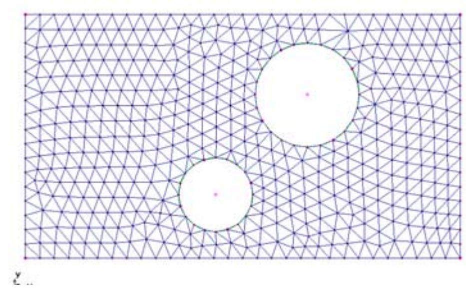


Structură din profile sudate (se modelează cu grinzi, abstractizate ca linii)

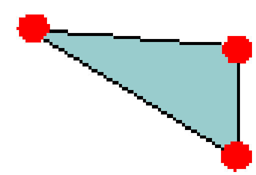


Element grindă cu 2 noduri (tip linie) - beam

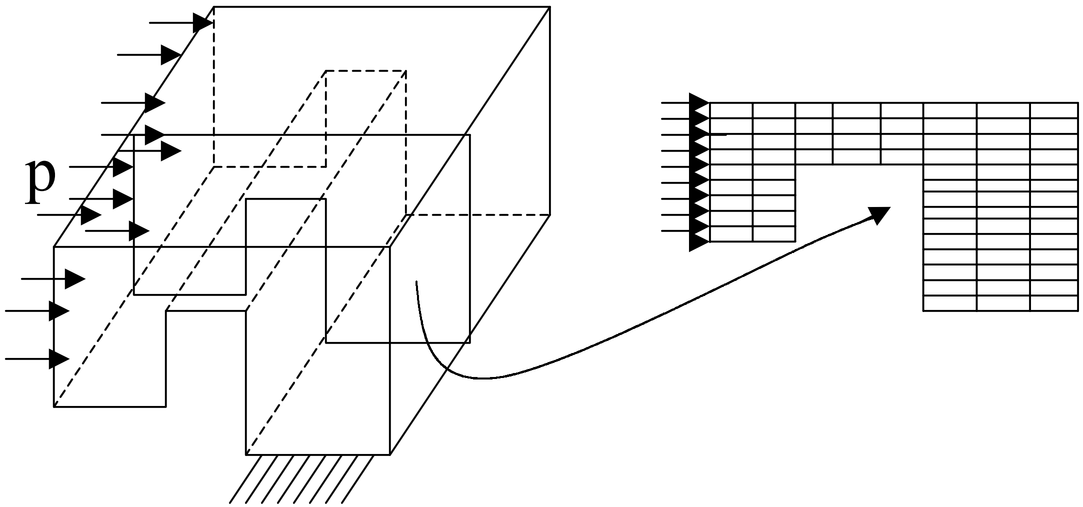


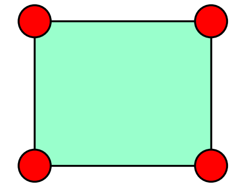


Structură plană subţire, solicitată în planul ei (se modelează ca o suprafaţă)



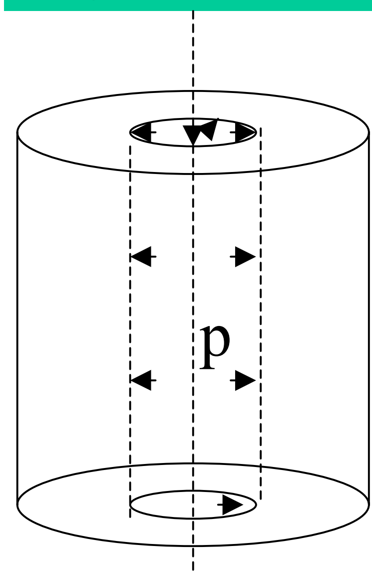
Element de stare plană de tensiuni cu trei noduri (tip suprafaţă) - triang

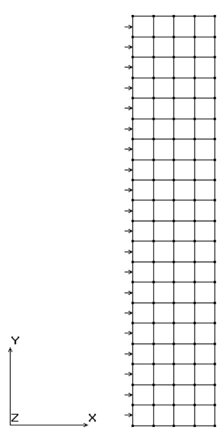


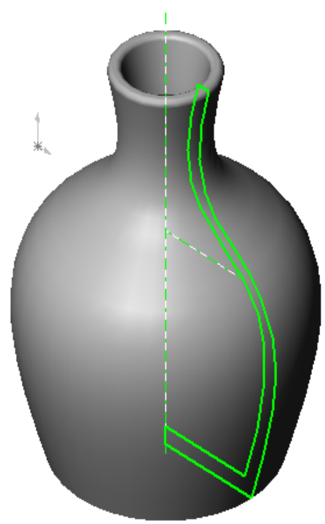


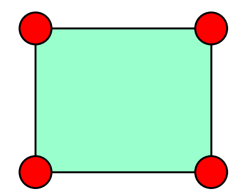
Element de stare plană de deformaţii cu 4 noduri (tip suprafaţă) - quad -Plane2D

Structură cu lăţime mare, pentru care se poate considera că deformaţia şi solicitarea este identică în toate secţiunile transversale (stare plană de deformaţii)



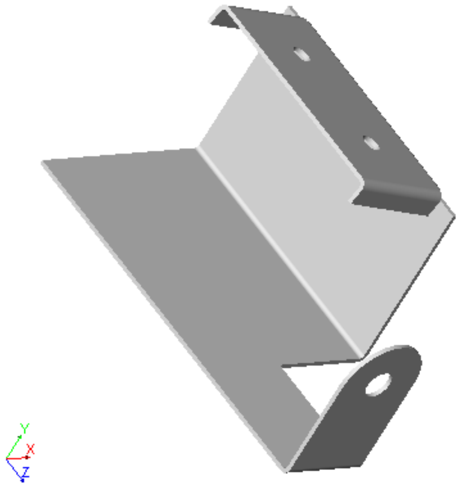


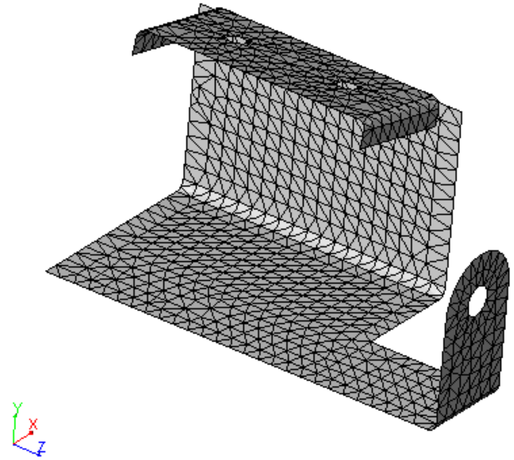


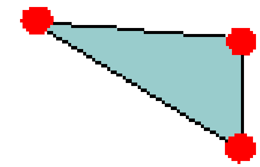


Element de solid de revoluţie cu încărcare axial-simetrică
Element cu 4 noduri (tip suprafaţă) - quad -Plane2D

Solid de revoluţie cu încărcare simetrică

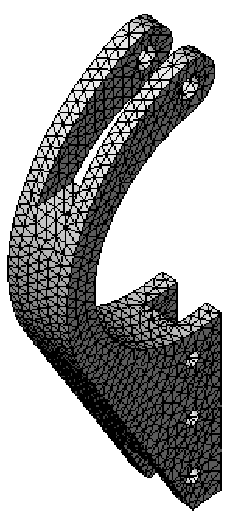


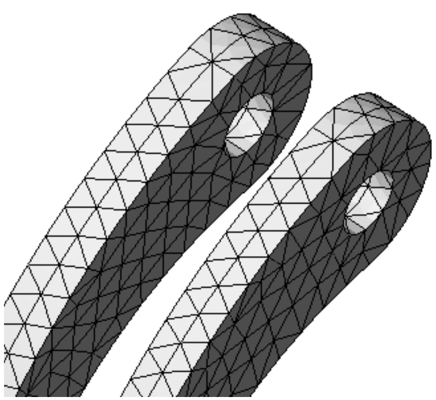


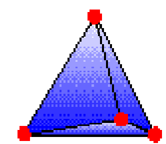


Element de înveliş - shell (tip suprafaţă) cu 3 noduri

Piesă din tablă (se modelează ca o suprafaţă)





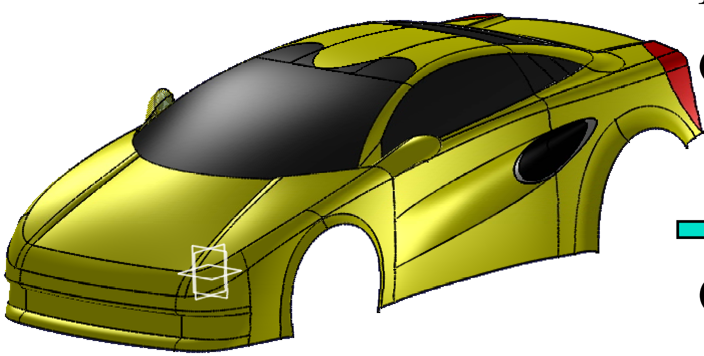


Element de solid - tetra (tip volum) cu 4 noduri

Piesă masivă (se modelează 3D)

Metoda Elementului Finit (MEF)

Continuum



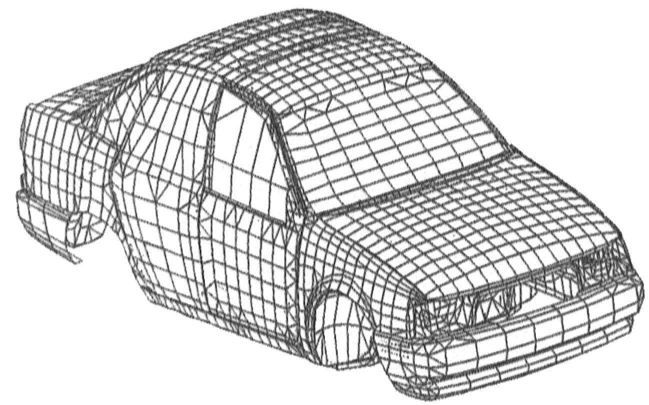
Discretizare

Material

Geometria elementului

Condiţii de frontieră

Încărcări



$$\{F_i\} = [K] * \{\delta_i\}$$

Sistem de ecuaţii cu n necunoscute

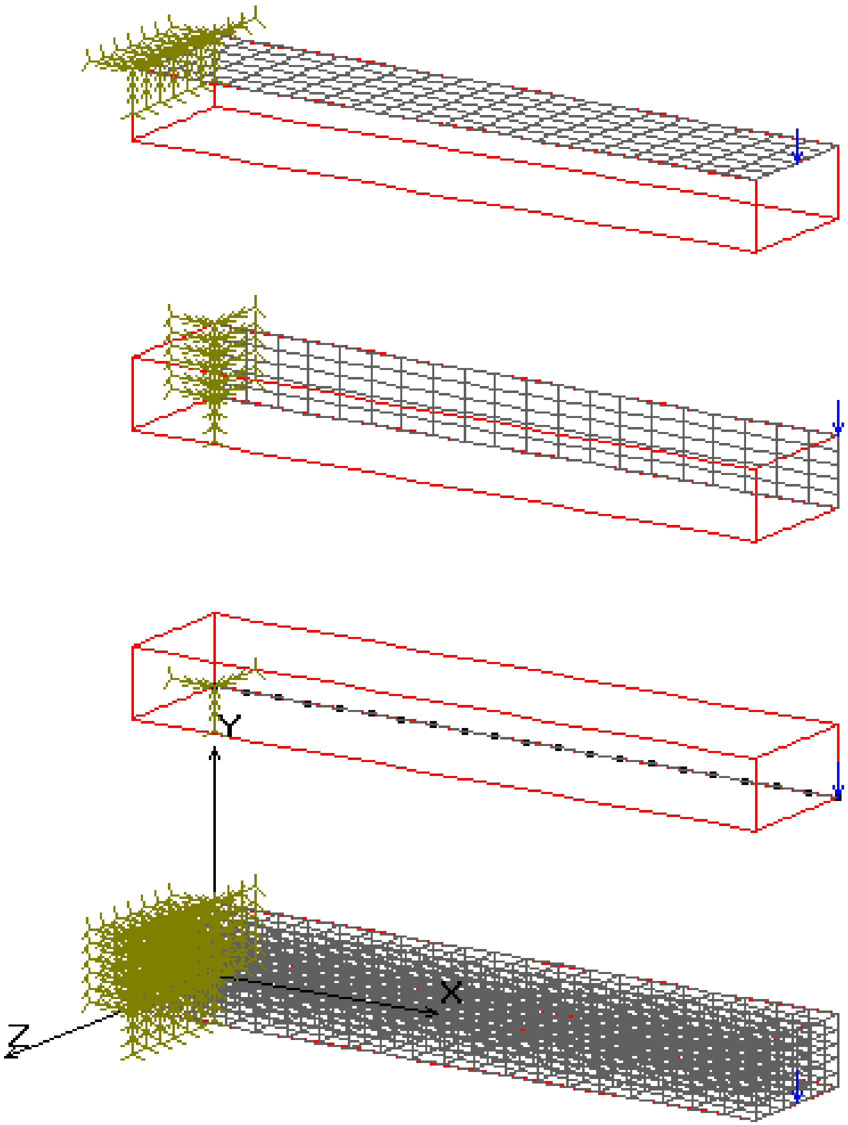
[K] = Matricea de rigiditate a structurii

{δ_i} = Vectorul deplasărilor în nodurile structurii

{F_i} = Vectorul încărcărilor structurii (aplicate în noduri)

Grindă încastrată, solicitată de o forţă transversală concentrată

bxhxL = 20x10x100 [mm]; E= 2,1•10^5 [MPa]; F = 100 [N]



Variante de abstractizare şi discretizare

Elemente de placă cu grosimea h
- shell 120 elemente 147 noduri

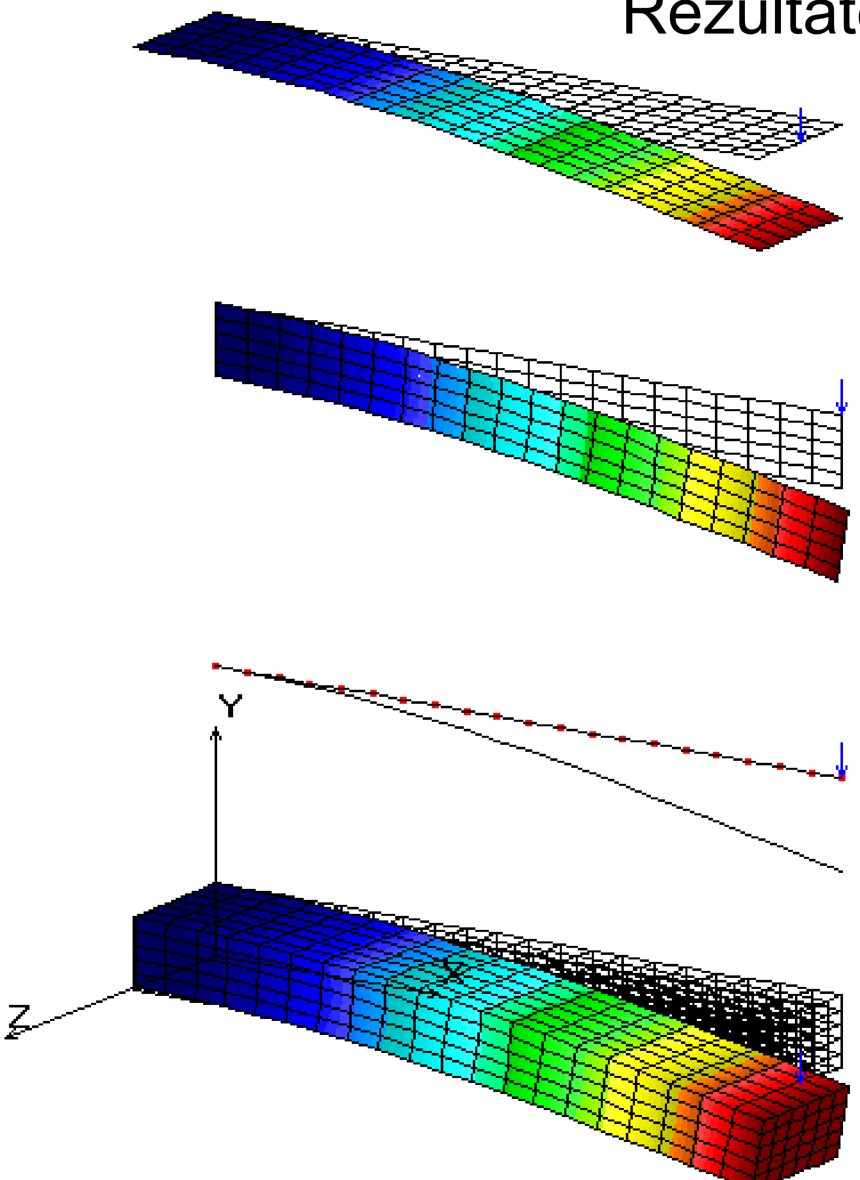
Elemente de stare plană de deformaţii
Plane2D- 100 elemente 127 noduri

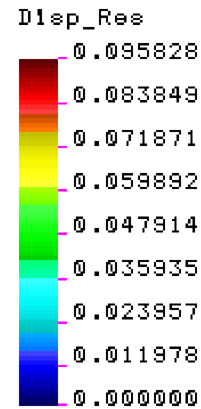
Elemente tip linie, de grindă solicitată la încovoiere, (caracterizată de $I = bh^3/12$)
beam - 20 elemente 21 noduri

Elemente paralelipipedice de volum
solid- 600 elemente 1175 noduri

Grindă încastrată, solicitată de o forţă transversală concentrată

Rezultate pentru deplasări



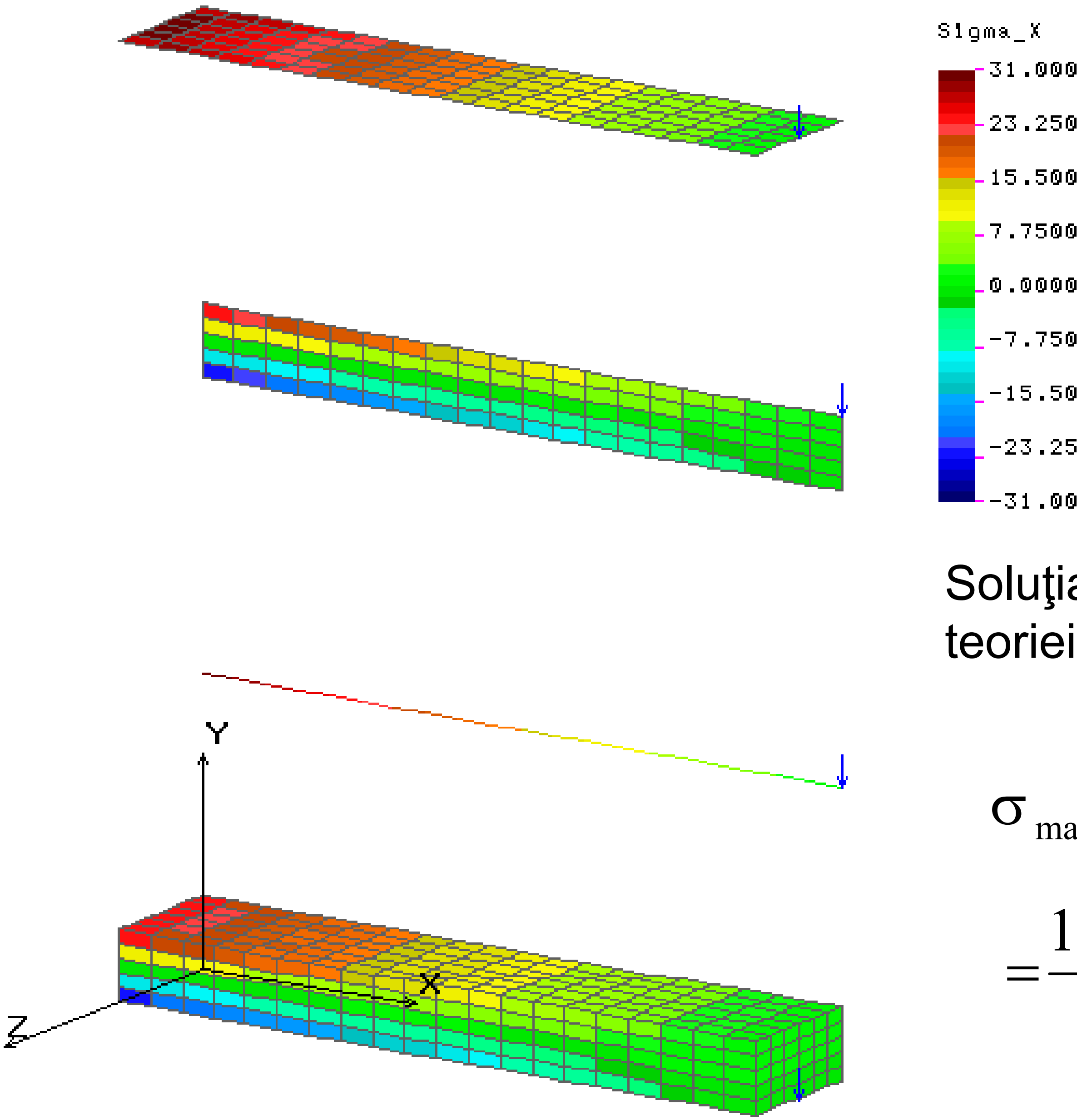


Soluţia analitică corespunzătoare teoriei de bară:

$$f_{\max} = \frac{FL^3}{3EI} =$$

$$= \frac{100 \cdot 100^3 \cdot 12}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^3} = 0{,}0952 \ [\mathrm{mm}]$$

Grindă încastrată, solicitată de o forţă transversală concentrată

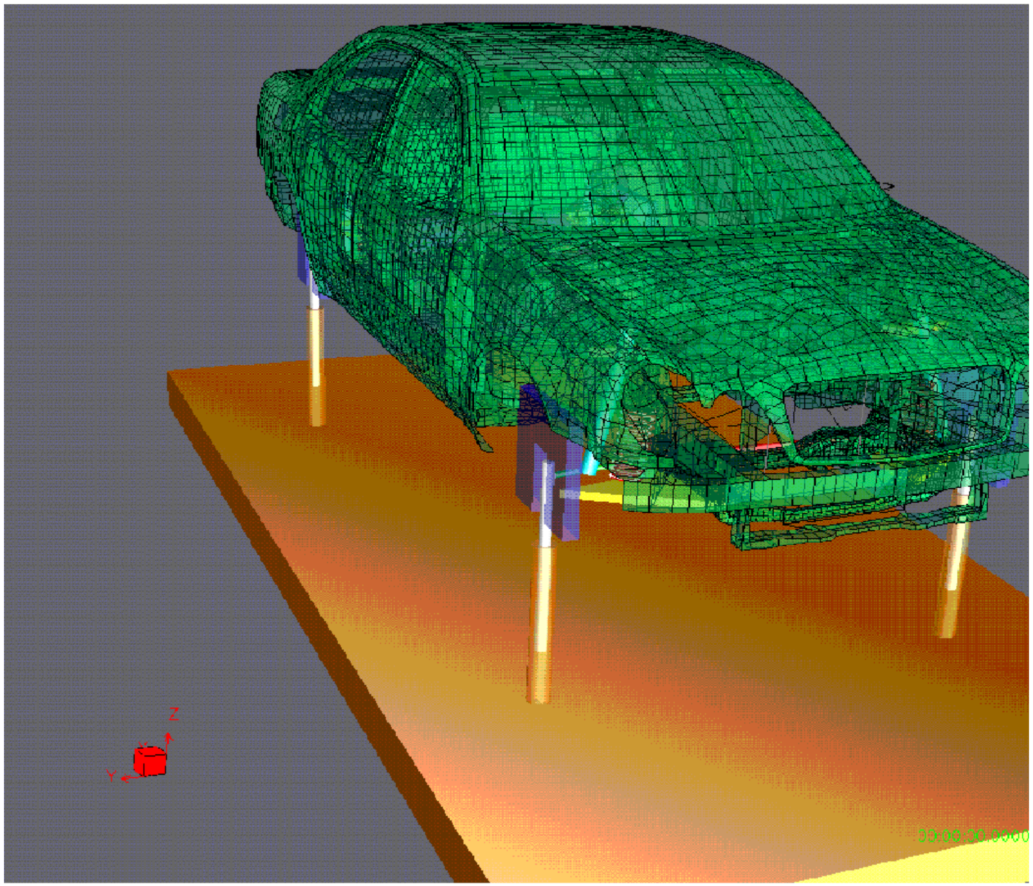


Rezultate pentru tensiunile σ_x

Soluţia analitică corespunzătoare teoriei de bară:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{FL}{bh^2/6} =$$

$$= \frac{100 \cdot 100 \cdot 6}{20 \cdot 10^2} = 30 \ [\mathrm{MPa}]$$

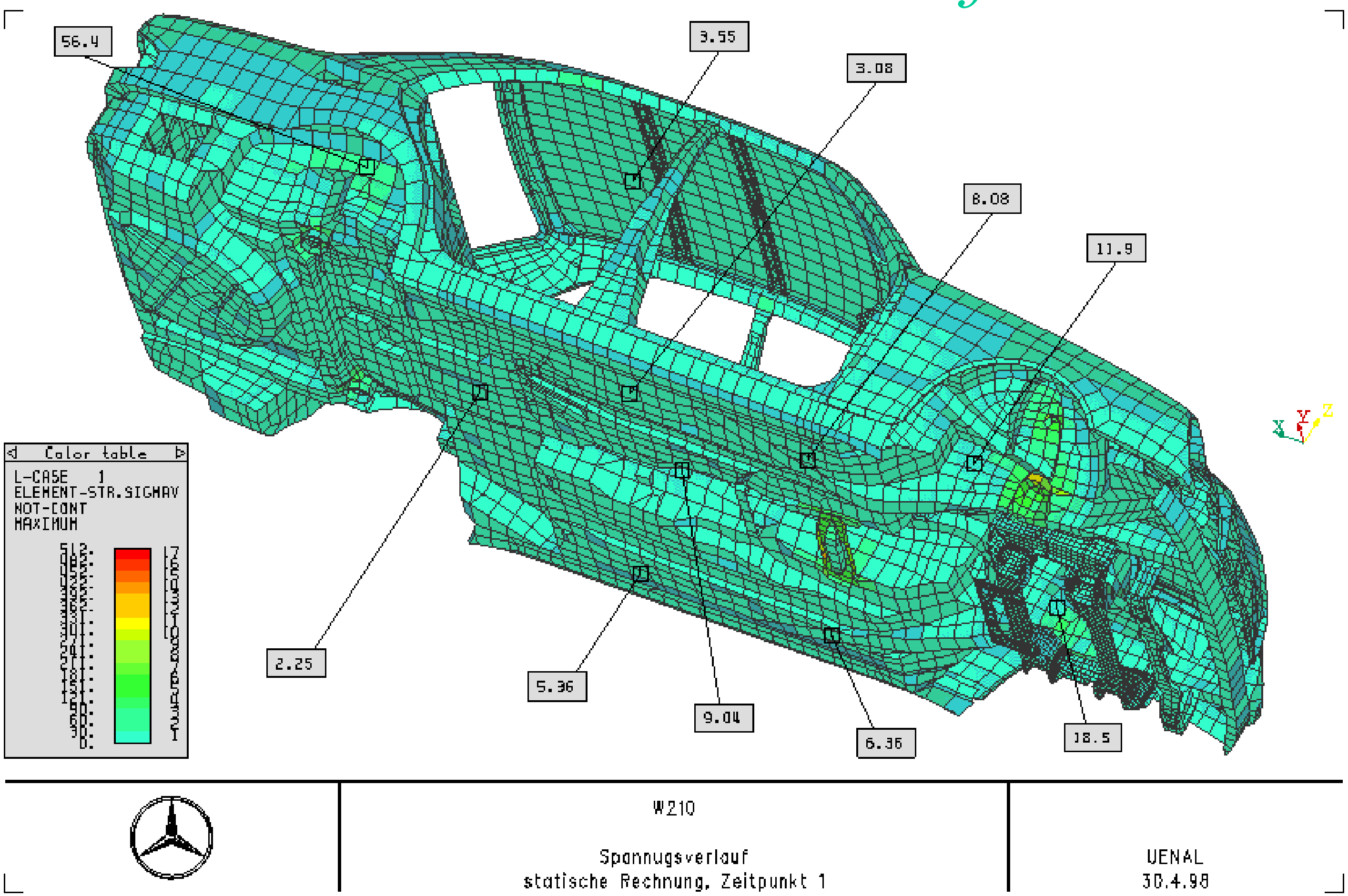


Simularea încărcării şasiului pe un banc de probă (50.000 nodes)

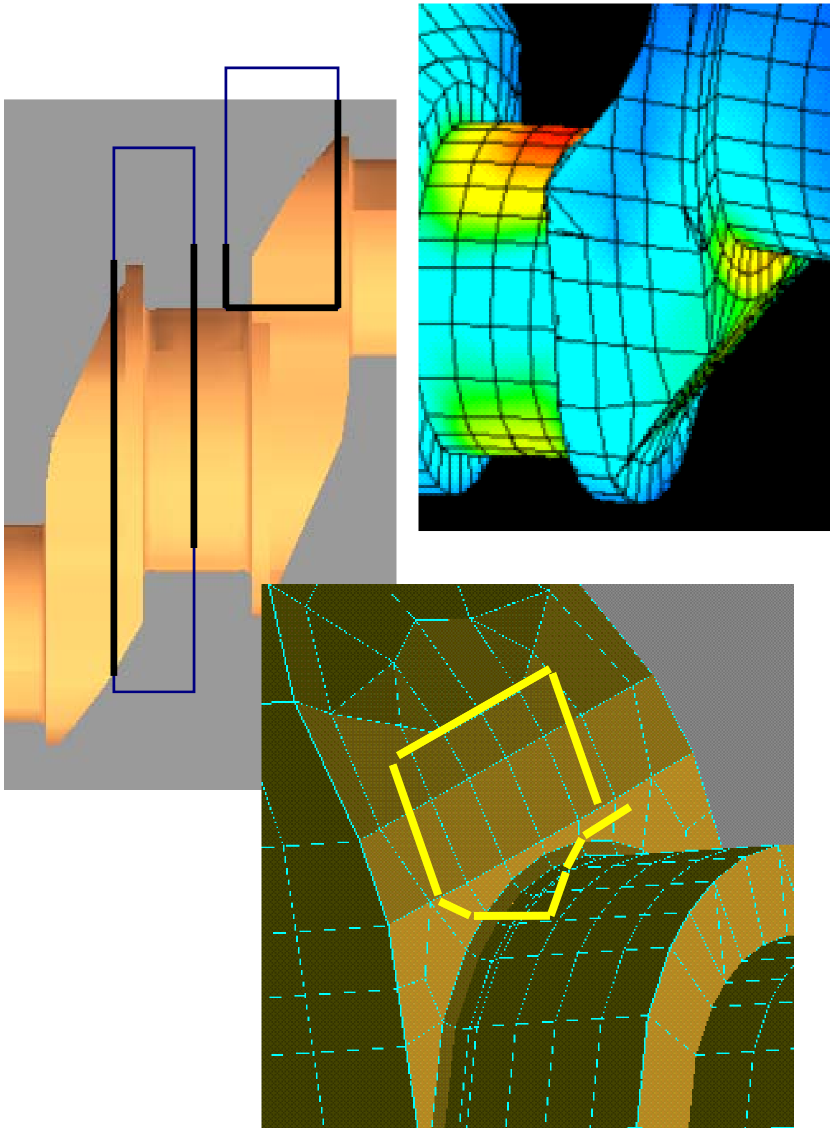
*** FE-Kongress Baden-Baden, 1998**

Mechanical Dynamics

Static Load Transfer



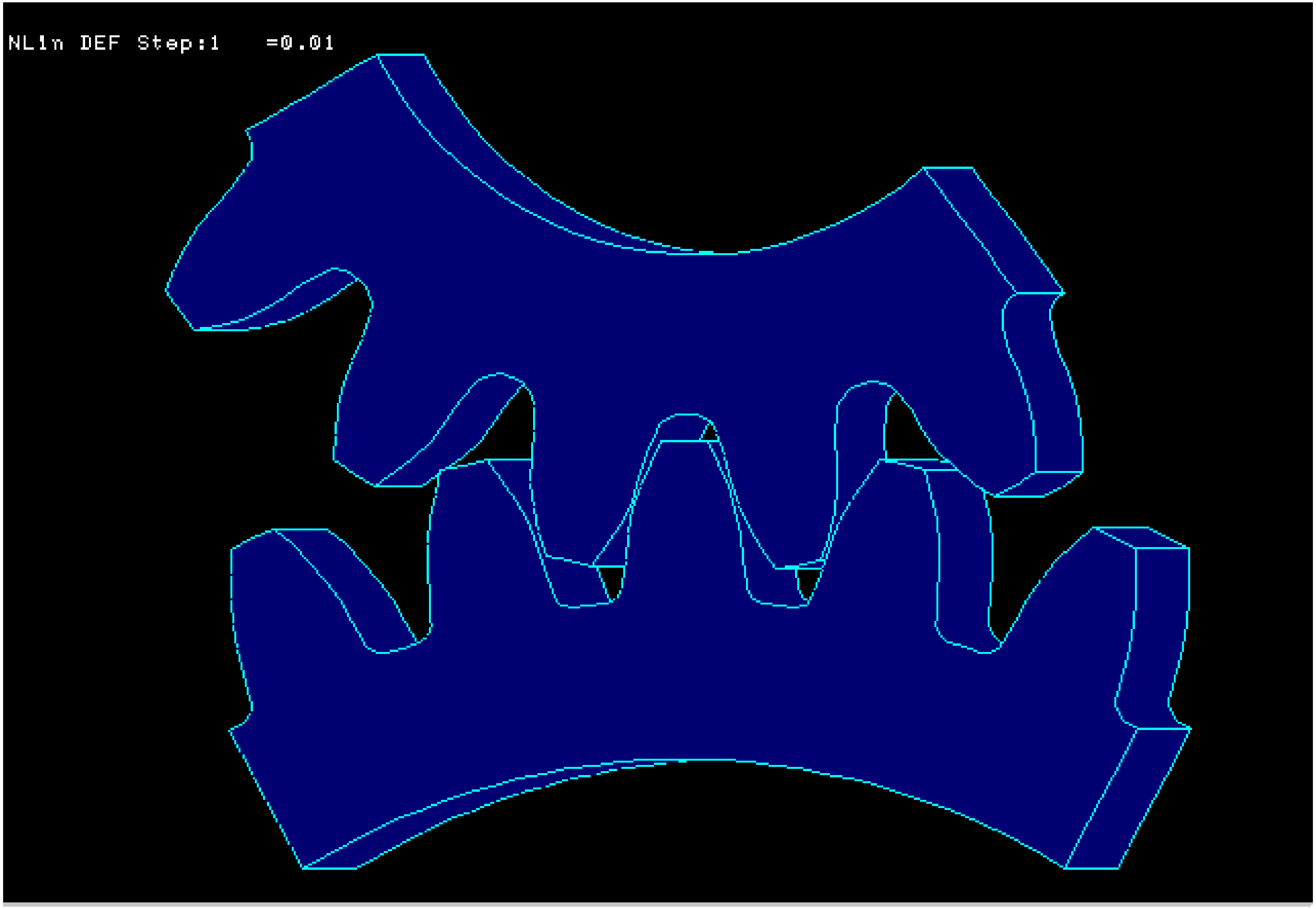
Limitări: de exemplu la analiza tensiunilor

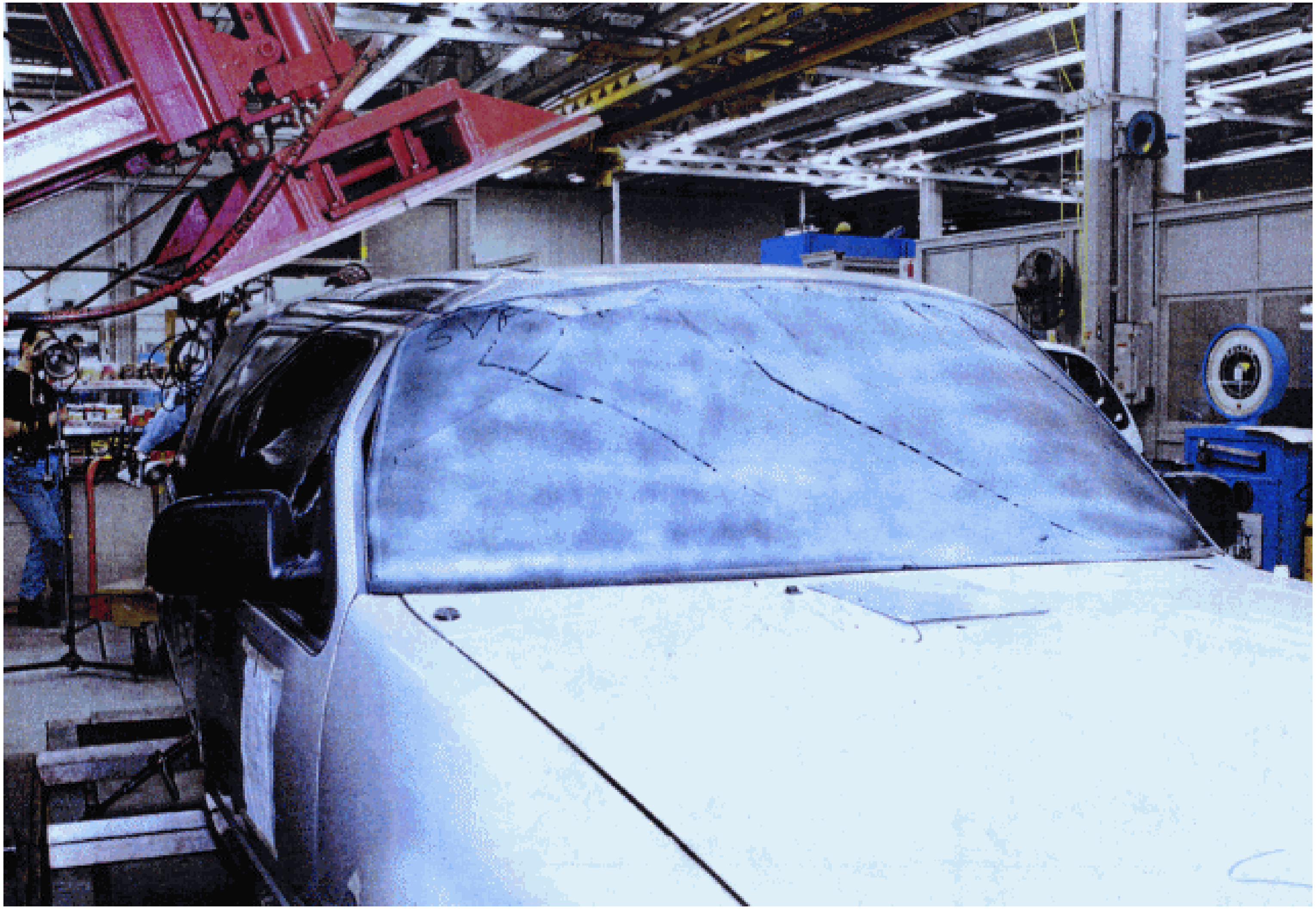


Persistă probleme pentru analiza modelelelor de tip solid: un exemplu concret - arborele cotit

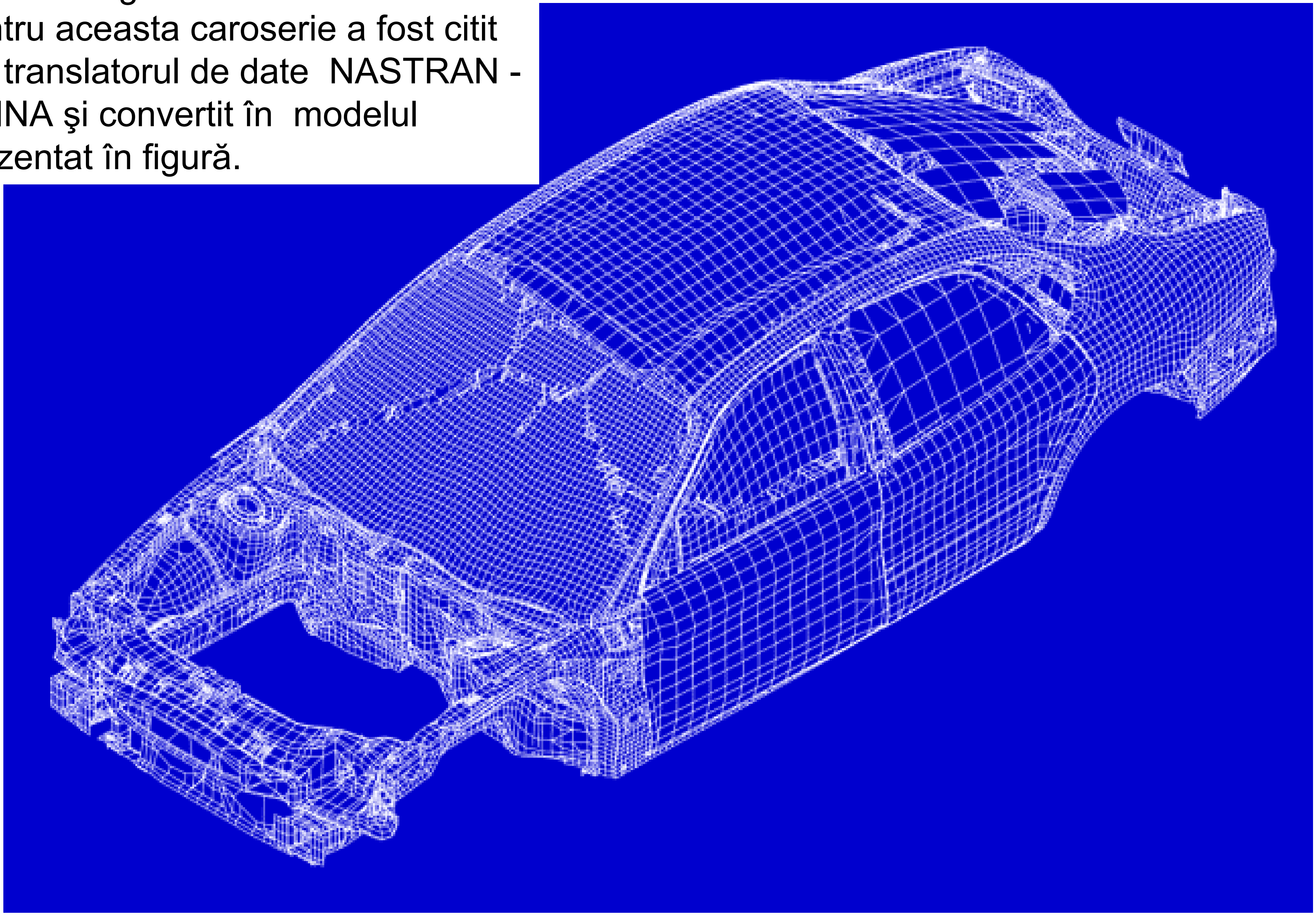
• mărimea **modelului : chiar şi 1.000.000 noduri se dovedesc a fi o discretizare prea grosieră pentru zonele cu concentratori de tensiuni - de exemplu zona racordării marcată în medalion**

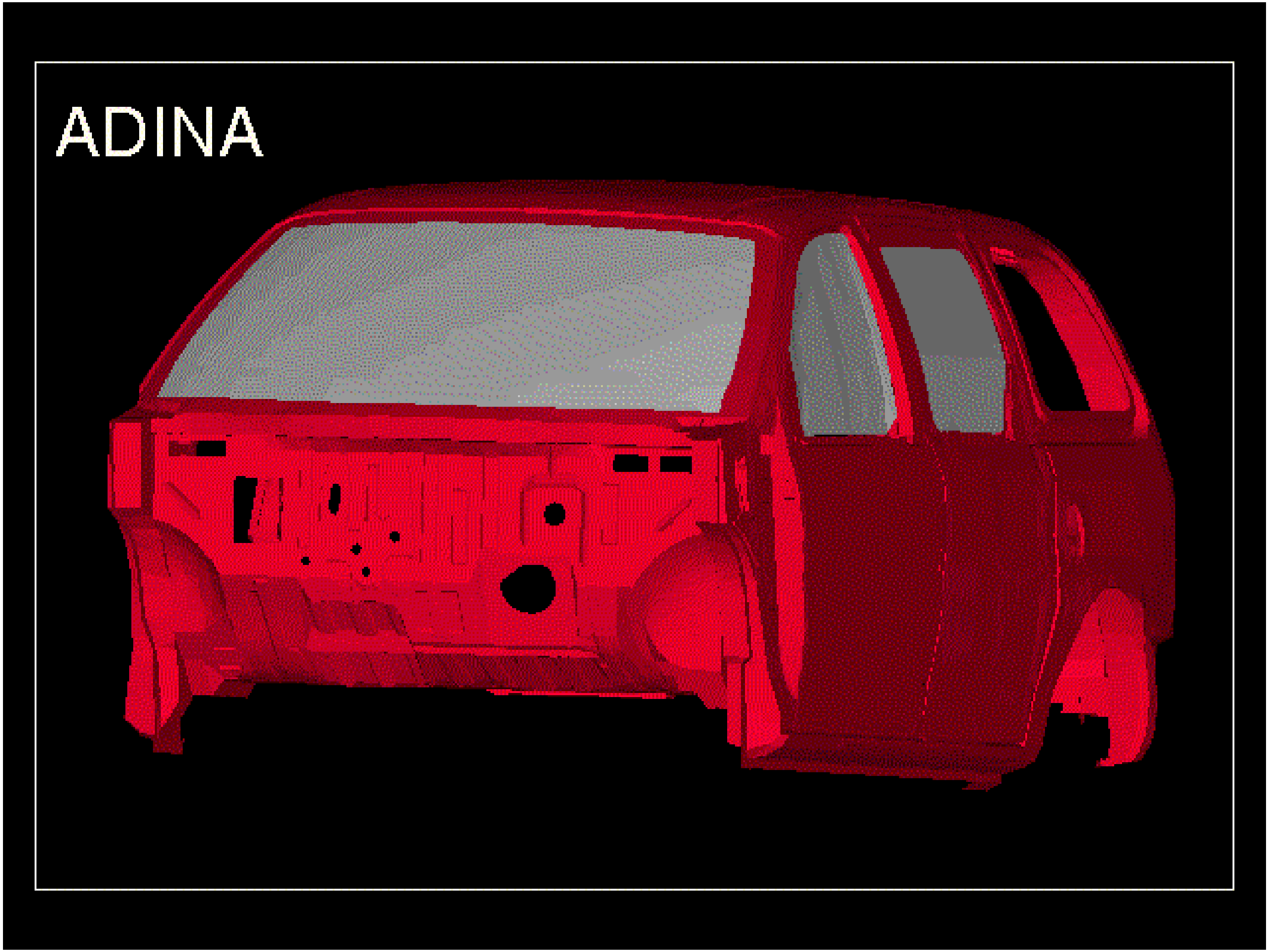
Astfel de aspecte pot fi tratate eficient pentru părţi ale modelului





Modelul original PATRAN/NASTRAN pentru aceasta caroserie a fost citit de translatorul de date NASTRAN - ADINA şi convertit în modelul prezentat în figură.




ADINA

Comparaţie a rezultatelor experimentale cu datele furnizate de ADINA, pentru modelul analizat

Roof crush analysis