ANEXE

Anexa 1: Elemente de algebră liniară a variabilelor aleatoare

● Se numeşte *variabilă aleatoare* (v. a.) o variabilă X care are proprietatea că fiecărei valori x a acesteia i se poate asocia câte o probabilitate P(x). V. a. poate fi:

- discretă, când valorile acesteia formează o mulțime discretă, numărabilă, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ cu probabilitățile asociate $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$;
- continuă, când X poate lua orice valoare reală x^* într-un anumit interval.

● *Repartiția variabilei aleatoare*

- pentru o v. a. discretă este mulțimea perechilor (x_i, p_i), cu i= 1, 2, ... ,n, şi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;
- pentru o v. a. continuă este probabilitatea P ca variabila X să ia valori $x^* \le x$:

$$F(x) = P(x^* \le x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

unde a este limita inferioară a intervalului în care X poate lua valori, f(x) este densitatea de probabilitate.

● *Media M(X) şi dispersia D(X)* pentru o v. a.:

- pentru o v. a. discretă $\quad M(X) = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$ şi

$$D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right]^2 = M\left[X - M(X)\right];$$

- pentru o v. a. continuă $\quad M(X) = \mu = \int_a^b x\, f(x)\, dx$

$$D(X) = \sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2\, f(x)\, dx.$$

● *Proprietăți ale mediei şi dispersiei*

- pentru c=constant:

$$M(c\,X) = c\,M(X),\ M(c+X) = c + M(X),$$
$$D(c\,X) = c^2\,M(X),\ D(c+X) = D(X);$$

- pentru două variabile aleatoare X şi Y:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y),$$
$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\,Cov(X,Y),$$

unde covarianța variabilelor X şi Y este $Cov(X,Y) = M[X - M(X)] \cdot M[Y - M(Y)]$, când cele două variabile aleatoare sunt independente, $Cov(X,Y) = 0$;

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y),$$
$$D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2\,Cov(X,Y);$$
$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) + Cov(X,Y),$$
$$D(X \cdot Y) = M^2(X) \cdot D(Y) + M^2(Y) \cdot D(X) + D(X) \cdot D(Y) + Cov^2(X,Y) + M(X) \cdot M(Y) \cdot Cov(X,Y);$$

$$M(X^2) = M^2(X) + D(X),$$
$$D(X^2) = 4 \cdot M^2(X) \cdot D(X) + 2\,D^2(X);$$
$$M(X/Y) = M(X)/M(Y),$$
$$D(X/Y) = \frac{M^2(X) \cdot D(Y) + M^2(Y) \cdot D(X)}{M^2(Y) \cdot [M^2(Y) + D(Y)]}.$$

- pentru $\sqrt{X}$

$$M(\sqrt{X}) = \left[M^2(X) - \frac{1}{2}D(X)\right]^{1/4},$$
$$D(\sqrt{X}) = M^2(X) - \left[M^2(X) - \frac{1}{2}D(X)\right]^{1/2};$$

- pentru n variabile independente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ constante reale,

$$M(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n}) = M(X_1^{\alpha_1}) \cdot M(X_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot M(X_n^{\alpha_n}),$$

coeficientul de variație: $CV(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot CV^2(X_i)$

Anexa 2: Funcția integrală Gauss-Laplace a repartiției normale normate

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.6	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.7	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.8	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.9	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
4.0	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

x	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$1-\Phi(x)$	$3.39767 \cdot 10^{-6}$	$2.86652 \cdot 10^{-7}$	$1.89896 \cdot 10^{-8}$	$9.86588 \cdot 10^{-10}$	$4.016 \cdot 10^{-11}$	$1.27987 \cdot 10^{-12}$

Anexa 3: Valorile critice ale parametrilor utilizați în testele Grubbs, Jrwin Romanovski de eliminare a valorilor aberante

n	Testul Grubbs (v_{cr})			Testul Jrwin (λ_{cr})			Testul Romanovski (t_{cr})		
	α_1=0,90	α_2=0,95	α_3=0,99	α_1=0,90	α_2=0,95	α_3=0,99	α_1=0,90	α_2=0,95	α_3=0,99
3	1,41	1,41	1,41	1.79	2.17	2.90	4.93	8.04	11.46
4	1,71	1,72	1,73	1.64	2.05	2.75	3.56	5.08	6.53
5	1,92	1,96	1,97	1.51	1.93	2.60	3.04	4.11	5.04
6	2,07	2,13	2,16	1.39	1.81	2.45	2.78	3.64	4.36
7	2,18	2,27	2,31	1.31	1.69	2.30	2.62	3.36	3.96
8	2,27	2,37	2,43	1.24	1.57	2.16	2.51	3.18	371
9	2,35	2,46	2,53	1.20	1.51	2.09	2.43	3.05	3.54
10	2,41	2,54	2,62	1.18	1.46	2.03	2.37	2.96	3.41
11	2,47	2,61	2,69	1.14	1.43	2.00	2.33	2.89	3.31
12	2,52	2,66	2,75	1.11	1.41	1.97	2.29	2.83	3.23
13	2,56	2,71	2,81	1.09	1.39	1.94	2.26	2.78	3.17
14	2,60	2,76	2,86	1.07	1.37	1.91	2.24	2.74	3.12
15	2,64	2,80	2,91	1.06	1.35	1.88	2.22	2.71	3.08
16	2,67	2,84	2,95	1.05	1.33	1.86	2.20	2.68	3.04
17	2,70	2,87	2,98	1.04	1.31	1.84	2.18	2.66	3.01
18	2,73	2,90	3,02	1.03	1.29	1.82	2.17	2.64	3.00
19	2,75	2,92	3,05	1.03	1.28	1.81	2.16	2.62	2.95
20	2,78	2,96	3,08	1.03	1.27	1.80	2.15	2.60	2.93

În tabel n este numărul de valori ale şirului de date α_1, α_2 şi α_3 reprezintă probabilitatea acceptării ipotezei că valoarea analizată este aberantă.

De exemplu, pentru un şir format din n = 20 de elemente, pentru probabilitatea α = 0,9 valoarea critică a testului Grubbs este v_{cr} = 2,78.