

10. APLICAȚII

10.1. Determinarea parametrilor statistici neparametrici ai durabilității [10, 17, 23, 24]

Scopul determinării parametrilor statistici neparametrici ai durabilității este:

- verificarea omogenității fabricației de serie foarte mare (de exemplu rulmenți);
- obținerea de indicii privind tipul legii de repartiție care ajustează cel mai bine datele experimentale.

Proprietăți ale unor indicatori statistici neparametrici:

1. În cazul repartiției exponențiale negative media este egală cu abaterea medie pătratică ($\sigma = m$) și, implicit, coeficientul de variație $C_v=1$ (unde $C_v = \sigma / m$). În plus, mediana de selecție are proprietatea: $t_m \cong \frac{\ln 2}{m}$.

2. Repartiția Poisson are media aproximativ egală cu dispersia ($m = D = D(x) = \sigma^2$).

3. Repartițiile Weibull biparametrică și Reyleigh se pot reduce la cazul repartiției exponențiale negative, dacă se cunoaște parametrul de formă β (valorile t_i se înlocuiesc cu t_i^β).

4. În cazul repartiției Gamma coeficientul de asimetrie este dublul coeficientului de variație ($C_{asim}=2 \cdot C_v$).

5. Parametrii repartiției Weibull biparametrice pot fi determinați, într-o primă aproximație, prin metoda momentelor: utilizând coeficientul de variație C_v și asimetria γ_1 .

6. În cazul repartiției normale momentul de ordinul 4 are proprietatea: $\mu_4 = 3 \cdot \sigma^2$.

Prelucrarea datelor experimentale

Preliminar, cele n date (notate x_i) se ordonează crescător. Se determină indicatorii de localizare, de variație (împrăștiere) și de formă (alură) a repartiției.

1. Indicatori de localizare:

$$1.1) \text{ media aritmetică } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad (10.1)$$

$$1.2) \text{ media geometrică } M_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} ; \quad (10.2)$$

$$1.3) \text{ media armonică } M_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} ; \quad (10.3)$$

$$1.4) \text{ media pătratică } M_P = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} ; \quad (10.4)$$

$$1.5) \text{ mediana } M_e = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{pt. } n = 2k + 1 \\ \frac{x_{n/2} + x_{1+n/2}}{2} & \text{pt. } n = 2k \end{cases} ; \quad (10.5)$$

10. Aplicații

$$1.6) \text{ valoarea centrală } x_c = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}. \quad (10.6)$$

1.7) modul unei repartiții unimodale adică având un singur maxim reprezintă valoarea corespunzătoare celei mai mari frecvențe f (pot exista și repartiții multimodale).

2. Indicatori de variație (de împrăștiere):

$$2.1) \text{ dispersia } D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad (10.7)$$

$$2.1') \text{ dispersia corectată } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad (10.8)$$

$$2.2) \text{ abaterea medie pătratică } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad (10.9)$$

2.3) abaterea medie pătratică corectată (estimată cu ajutorul unei selecții):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}}; \quad (10.10)$$

2.4) amplitudinea $W = x_{\max} - x_{\min} = x_n - x_1$ (șirul fiind ordonat crescător);

$$2.5) \text{ coeficientul de variație } C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}}. \quad (10.11)$$

3. Momente necentrate și centrate

$$3.1) \text{ momentul absolut (necentrat) de ordinul } k: m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k; \quad (10.12)$$

$$3.2) \text{ moment centrat de ordinul } k: \bar{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k. \quad (10.13)$$

4. Indicatori de asimetrie și applatizare:

$$4.1) \text{ abaterea medie aritmetică față de modă } \alpha_s = \bar{x} - M_o; \quad (10.14)$$

$$4.2) \text{ coeficientul de asimetrie: } \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\bar{m}_3}{m_2^{3/2}}; \quad (10.15)$$

$$4.3) \text{ coeficientul de exces } \gamma_2 = \frac{\bar{m}_4}{m_2^2} - 3. \quad (10.16)$$

5. Reprezentarea grafică a repartiției empirice

5.1) poligonul frecvențelor relative (v. exemplul din fig. 10.1):

5.1.1) dacă volumul eșantionului n este foarte mare, datele se pot grupa în cadrul unui anumit număr de intervale N_{interv} de lungime egală, N_{interv} este:

$$N_{\text{interv}} = 1 + 3,322 \cdot \lg n \text{ (Struges) sau} \quad (10.17)$$

$$N_{\text{interv}} = 4 \left[\frac{(n-1)}{4} \right]^{0,2} \text{ (Mann și Wald } n > 100).$$

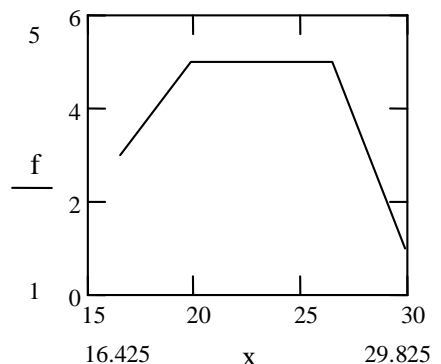


Fig. 10.1. Poligonul frecvențelor relative

10. Aplicații

5.1.2) dacă se utilizează metoda grupării în intervale, domeniul de variație al variabilei aleatoare se împarte la numărul de intervale, datele se grupează și se numără aparițiile acestora în intervale, rezultând frecvențele relative f_i .

5.2) poligonul frecvențelor cumulate

5.2.1.1) se calculează frecvențele cumulate cu: $\Phi_j = \sum_{i=1}^j f_i$. (10.18)

5.2.1.2) se calculează probabilitățile de defectare cu unul din estimatorii uzuali.

Tabelul 10.1. Estimatori uzuali ai probabilității empirice de defectare

Estimatorul	Recomandări de utilizare
$F_i = \frac{i}{n}$	Pentru eșantioane de volum mare
$F_i = \frac{i - 0,5}{n_e}$	Pentru stabilirea (recunoașterea) tipului de lege de repartiție și pentru prelucrarea eșantioanelor distribuite Weibull
$F_i = \frac{i - 0,45}{n_e + 0,3}$	Pentru eșantioane de volum mic distribuite Weibull
$F_i = \frac{i - 3/8}{n_e + 0,25}$	Pentru eșantioane distribuite normal și log-normal cu $n > 6$
$F_i = \frac{i - 0,3}{n_e + 0,4}$	Pentru eșantioane distribuite Weibull (este considerat de majoritatea experților ca fiind estimatorul cel mai adecvat)

5.2.2) se construiește poligonul frecvențelor.

Observație: Reprezentarea grafică a repartiției permite aprecierea globală a tipului repartiției.

Problema 10.1

În vederea evaluării durabilității reale a rulmentului radial cu bile 6204, fabricat de două firme diferite, s-a testat, prin încercări pe standuri specializate, câte un lot de 20 de rulmenți aparent identici, de la fiecare firmă.

Încercarea constă în determinarea timpului de funcționare corectă, atunci când sarcina radială la care este supus rulmentul coincide cu capacitatea dinamică de încărcare dată în catalog (C).

Pentru acest rulment, ambele firme prescriu capacitatea dinamică $C = 10$ kN. Încercarea s-a făcut simultan pentru fiecare lot de rulmenți, pe standuri cu turația arborelui de 750 rot/min.

Durabilitățile obținute (ore) sunt prezentate ca variabilele x_1 , pentru rulmenții fabricați de firma 1 și respectiv x_2 , pentru rulmenții fabricați de firma a doua.

$x_1 := (21.50; 18.75; 16.50; 27.75; 29.50; 31.50; 19.25; 14.75; 27.50; 22.50; 24.75; 26.50; 22.50; 18.50; 17.75; 19.75; 18.50; 27.50; 25.25; 24.25)$.

$x_2 := (14.50; 21.75; 22.25; 18.50; 19.75; 25.50; 29.75; 21.50; 25.75; 19.25; 22.50; 26.75; 22.00; 21.75; 25.00; 19.75; 18.25; 19.00; 25.50; 24.25)$

10. Aplicații

Rezolvare

Prin aplicarea relațiilor de calcul (10.1) ... (10.17) s-au obținut rezultatele prezentate în tabelul 10.2.

Tabelul 10.2. Rezultatele prelucrării neparametrice a durabilităților rulmenților 6204

	Firma 1	Firma 2
1. Indicatori de localizare:		
1.1) media aritmetică	22.7375	22.1625
1.2) media geometrică	22.2676	21.8795
1.3) media armonică	21.7971	21.5874
1.4) media pătratică	23.1968	22.4368
1.5) mediana	22.5	21.875
1.6) valoarea centrală	23.125	22.125
2. Indicatori de variație (de împrăștiere):		
2.1) dispersia	21.0967	12.233
2.1') dispersia corectată	22.2071	12.8768
2.2) abaterea medie pătratică	4.59312	3.49757
2.3) abaterea medie pătratică corectată	4.71244	3.58843
2.4) amplitudinea	8.375	7.625
2.5) coeficientul de variație	0.202006	0.157815
3. Momente necentrate și centrate:		
3.1) momentul centrat de ordinul 3	12.0919	2.10479
3.2) momentul centrat de ordinul 4	861.968	417.82
4. Indicatori de asimetrie și aplatare:		
4.2) coeficientul de asimetrie	0.124788	0.0491939
4.3) coeficientul de exces	-1.0633	-0.207934
5. Reprezentarea grafică a repartiției empirice		
5.1) numărul de intervale de grupare	5	5
5.2) lungimea unui interval de grupare	1.675	1.525

În figura 10.1 se prezintă poligonul frecvențelor relative construit pentru rulmenții produși de firma 1.

10.2 Determinarea legii de repartiție [1, 7, 10, 14, 17, 20, 24, 25, 32]

Legea de repartiție care ajustează valorile experimentale este utilizată la realizarea de prognoze ale nivelului fiabilității, stabilirea riscului, optimizarea costurilor etc.

Procedeele de lucru:

- 1) se determină parametrii pentru mai multe legi de repartiție (în cazul de față, pentru legile normală și Weibull care sunt cele mai des utilizate în practică);
- 2) se stabilesc domeniile de încredere ale parametrilor determinați la punctul 1 (domeniile sunt utilizate pentru „acoperirea riscului” datorat erorii de determinare a parametrilor, prin corectarea acestora, deoarece parametrii legii de repartiție stabiliți pe eșantionul de volum mic sunt utilizați pentru caracterizarea „populației” de volum teoretic infinit);
- 3) se determină acuratețea aproximării valorilor experimentale cu legile teoretice de repartiție utilizând testul de concordanță Kolmogorov-Smirnov (pentru a se stabili care lege

10. Aplicații

de repartiție ajustează mai bine valorile experimentale și cu ce probabilitate se poate accepta această lege ca fiind reprezentativă pentru eșantionul dat);

4) se trasează curba teoretică (a legii de repartiție) și punctele experimentale pe o rețea probabilistă (ceea ce permite evaluarea globală a corectitudinii calculelor realizate).

1) Determinarea parametrilor pentru legile de repartiție normală și Weibull

1.a) Pentru legea de repartiție normală ($F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^x \text{Exp}\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right] \cdot dx$), în

cazul eșantionului epuizat se determină:

$$1) \text{ media aritmetică } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (10.1)$$

$$2) \text{ abaterea medie pătratică corectată: } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \quad (10.10)$$

Observația 1: Se recomandă utilizarea abaterii medii pătratice corectate s în locul abaterii medii pătratice (standard) σ .

Observația 2: Pentru legea de repartiție lognormală în locul valorilor x_i se utilizează $\lg(x_i)$.

1.b) Pentru legea de repartiție Weibull, ($F(x) = 1 - \text{Exp}\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]$ pentru $x > \gamma$),

parametrii pot fi determinați prin **metoda celor mai mici pătrate** sau prin cea a **verosimilității maxime** (determinarea acesteia este mai dificilă și, în mod frecvent, algoritmi au viteză de convergență redusă).

1.b.1) Prin metoda celor mai mici pătrate se rezolvă sistemul (pentru repartiția biparametrică pentru parametrul de localizare se pune valoarea $\gamma_1 = 0$ și se calculează doar expresiile β_1 și η_1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{r \cdot \left[\sum_{i=1}^r \ln \ln \frac{1}{1-F_i} \cdot \ln(x_i - \gamma_1) \right] - \left[\sum_{i=1}^r \ln \ln \frac{1}{1-F_i} \right] \cdot \sum_{i=1}^r \ln(x_i - \gamma_1)}{r \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(x_i - \gamma_1) - \left[\sum_{i=1}^r \ln(x_i - \gamma_1) \right]^2} \\ \eta_1 = \text{Exp} \left\{ \frac{\left[\sum_{i=1}^r \ln \ln \frac{1}{1-F_i} \right] \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(x_i - \gamma_1) - \left[\sum_{i=1}^r \ln \ln \frac{1}{1-F_i} \cdot \ln(x_i - \gamma_1) \right] \cdot \sum_{i=1}^r \ln(x_i - \gamma_1)}{r \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(x_i - \gamma_1) - \left[\sum_{j=1}^r \ln(x_j - \gamma_1) \right]^2} \cdot \frac{1}{\beta_1} \right\} \\ \sum_{i=1}^r \frac{1}{x_i - \gamma_1} \cdot \ln \eta_1 + \sum_{i=1}^r \frac{\ln(x_i - \gamma_1)}{x_i - \gamma_1} \cdot \beta_1 - \sum_{i=1}^r \frac{\ln \ln \frac{1}{1-F_i}}{x_i - \gamma_1} = 0, \end{array} \right. \quad (10.19)$$

unde r este numărul de elemente defecte (dacă eșantionul este epuizat, atunci $r = n$), F_i este estimatorul repartiției empirice a probabilității de defectare

$$F_i = \frac{i-0,5}{n}, \quad (10.20)$$

utilizat pentru determinarea tipului de lege de repartiție.

Observație: Dacă se dorește o acuratețe mai bună a ajustării cu legea de repartiție Weibull, atunci parametrii pot fi determinați pentru varianta triparametrică.

1.b.2) Prin metoda verosimilității maxime se rezolvă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^{\beta^2} \cdot \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^{\beta^2}} + \frac{\sum_{i=1}^n -\ln(x_i)}{n} - \frac{1}{\beta^2} = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^{\beta^2}}{n} - \eta^{\beta^2} = 0. \end{cases} \quad (10.21)$$

Observația 1: Algoritmii de căutare numerică a soluției sistemului au viteză de convergență redusă. Uneori, unii dintre algoritmi nu sunt convergenți și, prin urmare, nu se afișează nici o soluție. Din acest motiv, nu s-au dat expresiile ecuațiilor utilizabile în varianta triparametrică.

Observația 2: Dacă se obține $\beta = 1$, atunci modelul Weibull se reduce la legea de repartiție exponențială negativă cu $\lambda = 1/\eta$.

2) Stabilirea domeniilor de încredere ale parametrilor legilor de repartiție normală și Weibull. Aceste domenii sunt date numai în cazul determinării parametrilor prin metoda verosimilității maxime. (Se calculează limitele domeniilor.)

2.a) pentru repartiția normală:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < m_{\text{populație}} < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}, \quad (10.23)$$

$$\sigma \cdot \sqrt{(n-1)/\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma_{\text{populație}} < \sigma \cdot \sqrt{(n-1)/\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}, \quad (10.24)$$

unde $t_{n-1, \alpha/2}$ și $\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ reprezintă cuantilele repartițiilor Student și Hi-pătrat cu n-1 grade de libertate și nivel de semnificație α ;

2.b) pentru repartiția Weibull:

$$\left(\frac{2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2n}^2} \right)^{\frac{1}{\beta}} < \eta < \left(\frac{2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2n}^2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (10.25)$$

η fiind calculat cu expresia (10.22).

3) Determinarea acurateței aproximării valorilor experimentale cu legile teoretice de repartiție utilizând testul de concordanță Kolmogorov-Smirnov. Acesta

10. Aplicații

permite evaluarea concordanței dintre valorile repartiției teoretice $F(x_i)$ (calculată în punctele x_i cu expresiile date la punctele 1.a și 1.b) și cea empirică dedusă din rezultatele experimentale F_i , determinate cu (10.20) sau o altă expresie din tabelul 10.1.

Dacă se dorește determinarea tipului de lege de repartiție, atunci pentru fiecare repartiție se determină:

a) diferența maximă (în probabilitate) dintre funcția teoretică de repartiție și valorile repartiției empirice

$$d_n = \max (|F(x_i) - F_i|); \quad (10.26)$$

b) parametrul funcției Kolmogorov

$$\lambda = d_n \cdot \sqrt{n}, \quad (10.27)$$

c) valoarea funcției Kolmogorov

$$K(\lambda) = \sum_{k=-10}^{k=10} (-1)^k \cdot \exp(-k^2 \cdot 2 \cdot \lambda^2), \quad (10.28)$$

care reprezintă probabilitatea de neconcordanță a repartițiilor (teoretică și experimentală);

d) nivelul de semnificație sau probabilitatea de acceptare a concordanței

$$\alpha = 1 - K(\lambda). \quad (10.29)$$

Prin comparația valorilor funcției Kolmogorov sau a nivelelor de semnificație se poate stabili care lege de repartiție este mai adecvată.

Observație: Dacă se dorește doar acceptarea sau respingerea (cu un anumit nivel de semnificație α) a legii de repartiție, având parametrii calculați ca la punctul 1, se procedează astfel:

- se calculează abaterea

$$d_n = \max (|F(x_i) - F_i|); \quad (10.30)$$

- pentru nivelul de semnificație α (uzual, $\alpha=0.1$ sau $=0.05$) se calculează

$$K(\lambda) = 1 - \alpha; \quad (10.31)$$

- din ecuația (10.28) se determină parametrul funcției Kolmogorov λ
- se calculează valoarea critică a abaterii

$$d_{na} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}; \quad (10.32)$$

• dacă d_n este mai mic decât valoarea critică a abaterii, d_{na} , atunci se acceptă ipoteza concordantei între funcția teoretică și cea empirică.

4) Trasarea curbei teoretice (a legii de repartiție) și punctelor experimentale pe o rețea probabilistă, în scopul evaluării globale a corectitudinii calculelor realizate.

4.a) Realizarea rețelei de probabilitate de tip Gauss-Laplace (figura 10.2)

Pe abscisă se iau valorile x_i (pentru legea de repartiție normală) sau $\lg x_i$ (pentru legea de repartiție lognormală)

Pe ordonată se introduce probabilitatea de defectare F , însă *pentru liniarizarea legii teoretice* de repartiție scara este dată de cuantila corespunzătoare

a) valorii probabilității aferente repartiției empirice a probabilității de defectare F_i :

$$\text{Cuantila} = \Phi^{-1}(F_i), \quad (10.33)$$

unde Φ^{-1} este inversa distribuției probabilității (adică inversa funcției Laplace);

10. Aplicații

b) valorii funcției teoretice $F(x)$:

$$\text{Cuantila} = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}, \quad (10.34)$$

care reprezintă o dreaptă ca în figura 10.2.

Observație: În general, pe ordonată în locul valorilor cuantilei se trec valorile corespunzătoare ale probabilității de deteriorare (astfel, în figura 10.2 în locul valorii cuantilei 2 ar trebui să se scrie valoarea probabilității 0,97725).

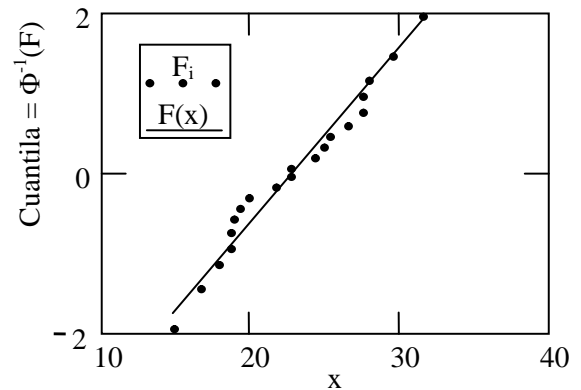


Fig. 10.2. Reprezentarea datelor și modelului în rețea probabilistă de tip Gauss-Laplace

4.b) Realizarea rețelei de probabilitate

Weibull (figura 10.3)

Pe abscisă se dau valorile $\ln(x_i)$.

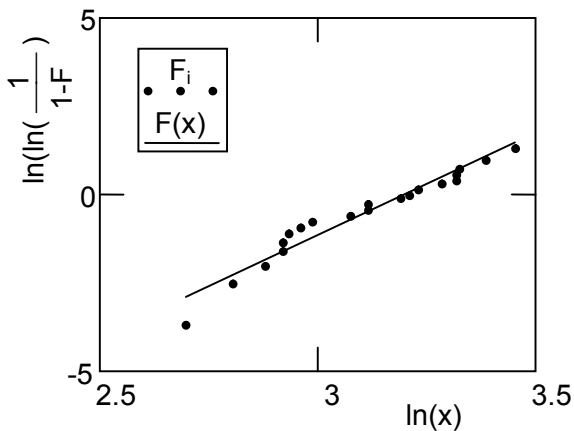
Pe ordonată se dă probabilitatea, însă pentru *liniarizarea legii teoretice de repartiție* scala se obține prin dublă logaritmare a:

a) valorii probabilității aferente repartiției empirice a probabilității de defectare F_i :

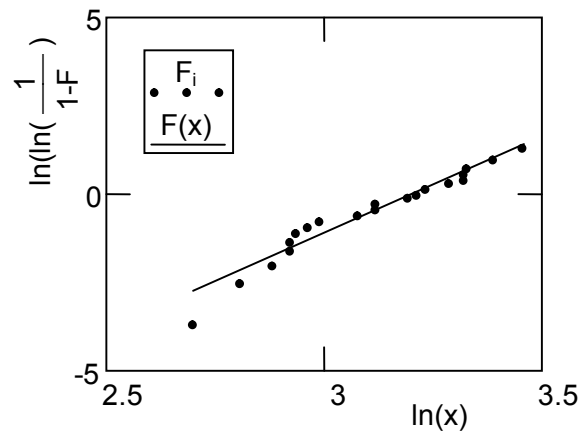
$$\text{Cuantila} = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F_i}\right)\right); \quad (10.35)$$

b) valorii funcției teoretice $F(x)$ care devine:

$$\text{Cuantila} = \beta \cdot \ln\left(\frac{x}{\eta}\right). \quad (10.36)$$



a)



b)

Fig. 10.3. Rețele probabiliste Weibull pentru durabilitățile rulmenților produși de firma 1:

a) pentru modelul obținut prin metoda celor mai mici pătrate;

b) pentru modelul obținut prin metoda verosimilității maxime

5) Concluzii

Se vor compara cele două legi teoretice determinate și se va stabili care ajustează mai bine rezultatele experimentale. Se vor face aprecieri asupra preciziei determinării utilizând nivelele de semnificație. Se vor comenta diagramele obținute făcând aprecieri asupra concordanței punctelor experimentale cu curba teoretică.

Problema 10.2

Să se determine parametrii legilor de repartiție normală și Weibull și să se stabilească legea de repartiție care ajustează cel mai bine șirul durabilităților obținute pentru eșantionul de rulmenți produși de firma 1, șir care a fost dat în problema 10.1.

Rezolvare**1) Determinarea parametrilor pentru legile de repartiție normală și Weibull**

1.a) Pentru parametrii legii de repartiție normală s-au aplicat relațiile (10.1) și (10.10) cu care s-a obținut: media aritmetică: $\bar{x} = 22,738$ ore, abaterea medie pătratică standard $\sigma = 4,593$ ore și abaterea medie pătratică corectată $s = 4,712$ ore.

Astfel, repartiția probabilității teoretice de defectare este:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4,712} \int_{-\infty}^x \text{Exp} \left[-\frac{(x - 22,738)^2}{2 \cdot 4,712^2} \right] \cdot dx = \Phi \left(\frac{x - 22,738}{4,712} \right). \quad (10.37)$$

Observație: Pentru studiul concordanței se recomandă utilizarea modelului în care s-a utilizat abaterea medie pătratică standard σ :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4,593} \int_{-\infty}^x \text{Exp} \left[-\frac{(x - 22,738)^2}{2 \cdot 4,593^2} \right] \cdot dx = \Phi \left(\frac{x - 22,738}{4,593} \right).$$

1.b) Pentru legea de repartiție Weibull, parametrii legii de repartiție au determinați prin **metoda celor mai mici pătrate** și prin cea a **verosimilității maxime**.

1.b.1) Prin metoda celor mai mici pătrate s-a rezolvat sistemul (10.19) în varianta biparametrică (adică pentru parametrul de localizare $\gamma_1 = 0$) și s-au obținut parametrii: $\beta_1 = 5,729$ și $\eta_1 = 24,568$ ore, astfel încât modelul Weibull devine:

$$F(x) = 1 - \text{Exp} \left[-\left(\frac{x}{24,568} \right)^{5,729} \right]. \quad (10.38)$$

1.b.2) Prin metoda verosimilității maxime s-a rezolvat sistemul de ecuații (10.21) și (10.22) luând ca valori inițiale, în procesul de căutare a soluțiilor, valorile obținute anterior prin metoda celor mai mici pătrate și s-au găsit soluțiile: $\beta_2 = 5,525$ și $\eta_2 = 24,631$ ore, cu care rezultă cel de-al doilea model Weibull:

$$F(x) = 1 - \text{Exp} \left[-\left(\frac{x}{24,631} \right)^{5,525} \right]. \quad (10.39)$$

2) Stabilirea domeniilor de încredere ale parametrilor legilor de repartiție normală și Weibull.

2.a) pentru parametrii repartiției normale s-au utilizat valorile cuantilelor repartițiilor Student și χ^2 (cu $20 - 1 = 19$ grade de libertate și nivel de semnificație $\alpha = 0,1$):

10. Aplicații

$$t_{n-1, \alpha/2} = t_{20-1, 0,1/2} = 1,729, \quad \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 = \chi_{19, 0,95}^2 = 30,144 \quad \text{și} \quad \chi_{n-1, \alpha/2}^2 = \chi_{19, 0,05}^2 = 10,117.$$

Introducându-le în relațiile (10. 23) și (10. 24) rezultă:

$$20,962 < m_{\text{populație}} < 24,514$$

și
$$3,647 < \sigma_{\text{populație}} < 6,294.$$

2.b) pentru repartiția Weibull s-a determinat domeniul de încredere pentru parametrul de scară η utilizând cuantilele repartiției χ^2 (cu $2 \cdot 20 = 40$ grade de libertate și nivel de semnificație $\alpha = 0,1$): $\chi_{2n, 1-\alpha/2}^2 = \chi_{40, 0,95}^2 = 55,758$ și $\chi_{2n, \alpha/2}^2 = \chi_{40, 0,05}^2 = 26,509$ cu care din (10. 25) se obține:

$$23,194 < \eta < 26,535,$$

3) Determinarea acurateții ajustării valorilor experimentale cu legi teoretice de repartiție s-a făcut cu ajutorul testului de concordanță Kolmogorov-Smirnov utilizând relațiile (10.26) ... (10.29). Repartiția empirică, evaluată cu (10. 20), a fost comparată cu valorile teoretice calculate în punctele x_i cu expresiile (10.37) ... (10.39). Rezultatele au fost centralizate în tabelul 10.3.

Tabelul 10.3. Evaluarea comparativă a acurateții ajustării durabilităților

Legea de repartiție	d_n	λ	$K(\lambda)$	α
Normală (Gauss) cu $\bar{x} = 22,738$ ore și $\sigma = 4,593$ ore, expresia (10.37)	0,117	0,525	0,054	0,946
Weibull cu $\beta_1=5,729$ și $\eta_1=24,568$ ore, obținuți prin metoda celor mai mici pătrate, expresia (10.38)	0,126	0,563	0,091	0,909
Weibull cu $\beta_2=5,525$ și $\eta_2=24,631$ ore obținuți prin metoda verosimilității maxime, expresia (10.39)	0,119	0,534	0,062	0,938

Analizând rezultatele din tabel, se constată o concordanță bună pentru toate cele 3 modele evaluate. Totuși, nivelul de semnificație al modelului realizat cu ajutorul legii de repartiție normală, expresia (10.37), este cel mai bun, astfel că se poate concluziona că acesta este modelul cel mai adecvat. Întrucât β_1 , respectiv β_2 , diferă foarte mult de 1, nu se pune problema unei repartiții exponențiale negative.

Aplicând procedeul prezentat pentru șirul de date logaritmat (cu logaritmul zecimal) se obțin parametrii $\bar{x} = 1,348$ (adică media este $10^{\bar{x}} = 10^{1,348} = 22,268$ ore) și $\sigma = 0,089$ (respectiv $s = 0,092$). Studiul concordanței, utilizând expresiile (10.26) ... (10.29), conduce la următoarele rezultate: $d_n = 0,095$; $\lambda = 0,425$; $K(\lambda) = 0,0063$ și $\alpha = 0,994$. Se constată o acuratețe mult mai bună a ajustării.

4) Trasarea curbei teoretice (a legii de repartiție) și punctelor experimentale pe o rețea probabilistă, permite evaluarea globală a corectitudinii calculelor realizate. Rețelele de probabilitate de tip Gauss-Laplace și Weibull pe care s-au trasat datele și curbele teoretice sunt prezentate în figurile 10.2 și 10.3. Se constată o bună concordanță între repartițiile teoretice și cea experimentală.

10.3 Eliminarea valorilor aberante dintr-un șir de valori experimentale [1, 17, 25]

Scopul eliminării valorilor aberante dintr-un șir de valori experimentale este obținerea (prin prelucrarea statistică a datelor) de rezultate corecte, care să caracterizeze întreaga populație statistică din care s-a extras eșantionul studiat. Apariția de valori aberante poate avea cauze diverse, ca de exemplu, nerespectarea procedurii de experimentare.

Găsirea valorilor aberante poate fi realizată, în mod global, prin trasarea datelor într-o rețea probabilistă (valorile aberante nu se aliniază cu celelalte date) sau cu ajutorul unui test specializat.

Modul de lucru:

- a) Se ordonează crescător sau descrescător șirul de date, întrucât valorile aberante pot fi prea mici sau prea mari.
Fie x_1 cea mai mică și x_n cea mai mare dintre datele experimentale și susceptibile de a fi aberante
- b) Se determină media

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (10.1)$$

și abaterea medie pătratică

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (10.9)$$

respectiv

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (10.10)$$

pentru toate valorile din șirul de date analizat.

- c) Funcție de testul acceptat se calculează parametrul v , λ sau t cu relațiile din tabelul 10.4.

Tabelul 10.4. Expresiile de calcul ale parametrilor caracteristici v , λ sau t

Testul	Grubbs	Irwin (testul λ)	Romanovski
Parametrul caracteristic calculat pentru valoarea superioară x_n	$v_{\text{sup}} = \frac{ x_n - x_{n-1} }{s}$	$\lambda_{\text{sup}} = \frac{ x_n - x_{n-1} }{\sigma}$	$t_{\text{sup}} = \frac{ x_n - \bar{x} }{s}$
Parametrul caracteristic calculat pentru valoarea inferioară x_1	$v_{\text{inf}} = \frac{ x_1 - x_2 }{s}$	$\lambda_{\text{inf}} = \frac{ x_1 - x_2 }{\sigma}$	$t_{\text{inf}} = \frac{ x_1 - \bar{x} }{s}$

- d) Acest parametru (v sau λ sau t) se compară cu cel critic (v_{cr} , λ_{cr} sau t_{cr}) ale cărui valori sunt tabelate în Anexa 3.

Dacă $v_{\text{sup}} > v_{\text{cr}}$ sau $\lambda_{\text{sup}} > \lambda_{\text{cr}}$ sau $t_{\text{sup}} > t_{\text{cr}}$, valoarea x_n este aberantă și se elimină cu nivelul de încredere α , în caz contrar nu sunt motive suficiente pentru eliminare. Analog se

10. Aplicații

procedează pentru x_1 , cea mai mică valoare din șirul de date. Dacă valoarea x_n sau x_1 a fost eliminată, se recalculează abaterea medie pătratică pentru cele $n-1$ valori rămase și testul se aplică din nou. Procesul continuă până când nu se mai elimină date ale șirului.

Problema 10.3.

Să se analizeze cele două șiruri de valori ale durabilității rulmentului radial cu bile 6204, date în problema 10.1. Probabilitatea aferentă valorilor critice ale testelor este $\alpha = 0,90$.

Rezolvare

Aplicând relațiile (10.10), (10.9) și (10.10) pentru cele două șiruri de date s-au obținut parametrii statistici din tabelul 10.5.

Tabelul 10.5. Parametrii statistici ai șirurilor

Parametru	Firma 1	Firma 2
Media aritmetică \bar{x}	22,7375 ore	22,1625 ore
Abaterea medie pătratică σ	4,59312 ore	3,49757 ore
Abaterea medie pătratică corectată s	4,71244 ore	3,58843 ore

Prin aplicarea expresiilor de calcul date în tabelul 10.4 s-au determinat parametrii caracteristici prezentați în tabelul 10.6

Tabelul 10.6. Valorile parametrilor caracteristici v , λ și t pentru cele două șiruri de date

Testul	Grubbs	Irwin (testul λ)	Romanovski
Pentru rulmenții fabricați de firma 1	$v_{sup} = 0,424$ $v_{inf} = 0,371$	$\lambda_{sup} = 0,435$ $\lambda_{inf} = 0,381$	$t_{sup} = 1,859$ $t_{inf} = 1,695$
Pentru rulmenții fabricați de firma 2	$v_{sup} = 0,836$ $v_{inf} = 1,045$	$\lambda_{sup} = 0,858$ $\lambda_{inf} = 1,072$	$t_{sup} = 2,114$ $t_{inf} = 2,135$

Valorile critice obținute din anexa 3, pentru $n = 20$ și $\alpha = 0,90$, sunt: $v_{cr} = 2,78$, $\lambda_{cr} = 1,03$ și $t_{cr} = 2,15$. Comparându-le cu valorile parametrilor caracteristici dați în tabelul 10.6 se constată că după testul Irwin valoarea cea mai mică a durabilității (14.5 ore) din șirul rulmenților fabricați de firma 2 este aberantă și trebuie eliminată.

După eliminarea valorii aberante se recalculează parametrii statistici ai șirului 2 redus: media aritmetică $\bar{x} = 22,566$ ore, abaterea medie pătratică $\sigma = 3,102$ ore, abaterea medie pătratică corectată $s = 3,187$ ore.

Recalculând parametrii caracteristici ai șirului 2 (redus) pentru testul Irwin, se obține: $\lambda_{sup} = 0,967$ și $\lambda_{inf} = 0,081$, valori mai mici decât cea critică, deci nu mai sunt și alte valori aberante.

10.4 Calculul fiabilității previzionale a elementelor componente

Fiabilitatea previzională a organelor de mașini reprezintă componenta de bază a calculului fiabilității ansamblului unui sistem mecanic. Estimarea fiabilității unui element constructiv poate fi realizată, așa cum s-a arătat în capitolul 9, în general, prin:

- calculul cu ajutorul legii de repartiție exponențială negativă, cu preluarea din tabele a valorii aproximative a ratei defectărilor

$$R(t) = e^{-\lambda t}; \quad (4.2)$$

- calculul durabilității (atunci când se cunoaște colectivul de încărcare și curba Wöhler, în general, sau capacitatea dinamică de încărcare, în cazul particular al rulmenților) și preluarea din literatura de specialitate a caracteristicii dispersive:

$$L = N_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{\sum_{i=1}^j n_i \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_1}\right)^{m_0} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_D}\right)^{m_0-1} \cdot \sum_{i=j+1}^k \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_1}\right)^{2 \cdot m_0-1} \cdot n_i}, \quad (2.8)$$

$$\eta = \frac{L_{10} \cdot [1 - (\gamma / L_{10})]}{(-\ln 0,9)^{1/\beta}}, \quad (9.5)$$

unde parametrii adimensionali ai repartiției Weibull sunt dați în tabelul 9.2, pentru unele organe de mașini.

În cazul componentelor supuse la uzare, se determină:

a) grosimea medie a stratului uzat

$$\bar{U}_h = \bar{U}_{hr} + \bar{v}_{uh} t, \quad (5.17)$$

unde viteza medie de uzare este

$$\bar{v}_{uh} = \frac{\tau_f}{e_f^*} v_f, \quad (10.16)$$

parametrii fiind luați din tabelul 5.6;

b) abaterea medie pătratică se poate estima cu ajutorul coeficientului de variație care poate fi determinat experimental sau, pentru calcule aproximative, este luat din literatura de specialitate, ca valorile din tabelul 10.7 astfel:

$$\sigma_{uh} = c_{vUh} \bar{U}_h. \quad (10.17)$$

Tabelul 10.7. Valori orientative ale coeficientului de variație pentru uzare

Nr.	Materialele cuplei de frecare	Coeficientul de variație
1	Oțel / bronz cu staniu	0,33
2	Oțel / garnitură uscată de ambreiaj	0,11 ... 0,19
3	Angrenaje	0,2 ... 0,3
4	Transmisii cu lanț	0,12
5	Cuzineți pentru motoare cu adere internă	0,31 ... 0,63

Admițând că grosimea statului uzat este repartizată normal, fiabilitatea cuplei este:

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{U_{h \text{ lim}} - \bar{U}_h}{\sigma_{U_h}}\right), \quad (10.18)$$

unde $U_{h \text{ lim}}$ este valoarea limită admisă a grosimii stratului uzat. Aceasta rezultă din analiza preciziei funcționale a sistemului mecanic sau este prescrisă pentru diferite domenii de utilizare.

Problema 10.4

Să se determine fiabilitatea rulmenților și angrenajului unui reductor de turație într-o treaptă de reducere știind:

- turațiile arborilor $n_1=2035$ rot/min și $n_2=400$ rot/min, durabilitatea minimă admisibilă $L_{ha}=15000$ h;
- durabilitățile rulmenților $L_{hA}=30900$ h, $L_{hB}=60005$ h, $L_{hc}=262300$ h, $L_{hD}=82400$ h;
- colectivul de solicitare (tensiuni): $\sigma_{H1}=1550$ MPa, $\sigma_{H2}=1120$ MPa, $\sigma_{H3}=815$ MPa, $\sigma_{H4}=650$ MPa, pentru solicitarea la pitting și $\sigma_{F11}=550$ MPa, $\sigma_{F12}=400$ MPa, $\sigma_{F13}=290$ MPa, $\sigma_{F14}=230$ MPa, $\sigma_{F21}=495$ MPa, $\sigma_{F22}=360$ MPa, $\sigma_{F23}=260$ MPa, $\sigma_{F24}=200$ MPa pentru solicitarea la ruperea piciorului dintelui, $n_1=0,01\%$, $n_2=1\%$, $n_3=5\%$, $n_4=93,99\%$;
- parametrii curbei Wöhler $m_{0H}=13$, $N_{DH}=10^7$ cicluri, $\sigma_{DH}=1450$ MPa, pentru solicitarea la pitting și $m_{0F}=9$, $N_{DF}=3 \cdot 10^6$ cicluri, $\sigma_{DF}=470$ MPa, pentru solicitarea la ruperea dinților.

Rezolvare

a) O estimare globală a fiabilității se poate face cu ajutorul legii de repartiție exponențială negativă. Din tabelul 9.1 se obțin intensitățile medii de defectare: pentru angrenaje $\lambda=0,002 \cdot 10^{-6} \text{ h}^{-1}$ și pentru rulmenții cu role $\lambda=0,50 \cdot 10^{-6} \text{ h}^{-1}$. Introducând aceste valori în expresia (4.2) și luând $t = L_{ha} = 15000$ h, se obțin valorile fiabilității:

Pentru rulmenți $R_{rulm}=0,992528$, iar pentru angrenaj $R_{angr}=0,99997$.

b) Pentru evaluarea mai precisă se va utiliza metoda bazată pe calculul durabilității și preluarea din literatura de specialitate a caracteristicii dispersive.

- calculul durabilității se realizează cu expresia (2.8) în care se introduc numerele de cicluri $N_{1H}=4,2 \cdot 10^6$ și $N_{1H}=0,729 \cdot 10^6$ calculate din curba Wöhler cu expresia:

$$N_1 = N_D \left(\frac{\sigma_D}{\sigma_1} \right)^{m_0}; \quad (10.19)$$

și se obțin durabilitățile: $L_{angr,H}=3,9414 \cdot 10^{10}$ cicluri, $L_{angr,F1}=2,7912 \cdot 10^9$ cicluri, $L_{angr,F1}=4,3039 \cdot 10^9$ cicluri, care cu ajutorul turațiilor se transforma în ore, valorile fiind date centralizat în tabelul 10.8.

În tabel au mai fost dați parametrii adimensionali ai repartiției Weibull obținuți din tabelul 9.2. Introducând valorile medii ale acestor parametri în expresia (9.5) se obțin parametrii de scară η .

Valorile fiabilităților elementelor componente ale reductorului R sunt calculate cu expresia (4.9), rezultatele fiind date de asemenea în tabelul 10.8.

Se observă că valorile obținute sunt apropiate de cele obținute anterior prin utilizarea legii exponențiale negative. rezultatele ar fi putut însă să difere mult, întrucât

10. Aplicații

metoda simplificată nu ia în considerare solicitările efective ale organelor de mașini considerate.

Tabelul 10.8. Calculul fiabilităților componentelor reductorului

Nr.	Componenta	L_h [ore]	β	γ/L_{10}	η [ore]	R
1	Rulmentul A	30900	1,35	0,05	612445	0,996921
2	Rulmentul B	60005	1,35	0,05	1189310	0,999025
3	Rulmentul C	262300	1,35	0,05	5198840	1
4	Rulmentul D	82400	1,35	0,05	1633190	0,999498
5	Angrenajul solicitat la pitting	322803	1,1...1,5	0,4...0,8;	1623620	1
6	Roata dințată 1 solicitată la rupere	116300	1,2...2,2	0,8...0,95	666713	1
7	Roata dințată 2 solicitată la rupere	179330	1,2...2,2	0,8...0,95	1028040	1

Problema 10.5

Să se determine fiabilitatea unui cuzinet din CuSn12 uns cu unsoare știind: forța de apăsare pe lagăr $F=10000$ N, diametrul $D=70$ mm, lățimea cuzinetului $B=50$ mm, turația fusului $n=400$ rot/min, coeficientul de frecare-alunecare $\mu=0,08$, grosimea admisibilă a stratului uzat $U_{h\text{ lim}}=0,15$ mm, grosimea stratului rodat este $\bar{U}_{hr}=0,01$ mm, iar durata de funcționare necesară este 15000 ore.

Rezolvare

a) Se determină tensiunea de frecare

$$\tau_f = \frac{\mu F}{D B} = \frac{0,08 \cdot 10000}{70 \cdot 50} = 0,2286 \text{ MPa}$$

și viteza tangențială de frecare

$$v_f = \pi D n \cdot 60 = 5,2779 \cdot 10^6 \text{ mm/h.}$$

Introducând capacitatea de solicitare tribologică obținută din tabelul 5.6 ($e_f^* = 2,5 \cdot 10^{11}$ MPa) în expresia (10.16) rezultă intensitatea medie de uzare:

$$\bar{v}_{uh} = \frac{\tau_f}{e_f^*} v_f = \frac{0,2286}{2,5 \cdot 10^{11}} \cdot 5,2779 \cdot 10^6 = 4,82611 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{h}},$$

Cu relația (5.17) rezultă grosimea medie a stratului uzat:

$$\bar{U}_h = \bar{U}_{hr} + \bar{v}_{uh} t = 0,1 + 4,82611 \cdot 10^{-6} \cdot 15000 = 0,08239 \text{ mm.}$$

Utilizând coeficientul de variație $c_{vU_h}=0,33$ preluat din tabelul 10.7 se obține abaterea medie pătratică:

$$\sigma_{U_h} = c_v \bar{U}_h = 0,33 \cdot 0,08239 = 0,027189 \text{ mm.}$$

b) Cu expresia (10.18) se determină fiabilitatea cuzinetului:

$$R = 1 - \Phi\left(\frac{U_{h \text{ lim}} - \bar{U}_h}{\sigma_{U_h}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0,15 - 0,08239}{0,027189}\right) = 1 - \Phi(2,48667) = 0,993553.$$

Observație: Dacă grosimea admisibilă a stratului uzat ar fi fost $U_{h \text{ lim}}=0,1$ mm, atunci fiabilitatea ar fi fost: $R=0,741407$, valoare inacceptabilă în condiții normale.

10.5 Calculul fiabilității previzionale a ansamblului unui sistem mecanic

Calculul fiabilității ansamblului se realizează conform celor arătate în capitolul 6. În general, sistemele mecanice sunt neredundante. Excepție fac sistemele de importanță deosebit de mare, a căror defectare are mari implicații economice, de mediu etc. Pentru estimarea fiabilității este necesar să se realizeze schema de calcul a ansamblului și să se cunoască fiabilitățile componentelor.

Problema 10.6

Să se determine fiabilitatea unui reductor de turație într-o treaptă, știind că valorile fiabilității rulmenților și angrenajului sunt cele date în tabelul 10.8, iar fiabilitățile arborilor sunt 1, datorită supradimensionării impuse de limitarea deformațiilor elastice.

Rezolvare

Dacă se deteriorează una din componentele reductorului, acesta se defectează, prin urmare, ansamblul are o schemă structurală cu elemente dispuse în serie, ca în figura 6.2. Defectarea angrenajului se poate face în trei moduri: prin pitting, prin ruperea danturii pinionului (roata 1) sau prin ruperea danturii roții 2. Astfel, angrenajul se consideră format din trei elemente. Aplicând expresia 6.1 se obține:

$$R_s = R_{\text{rulm A}} \cdot R_{\text{rulm B}} \cdot R_{\text{rulm C}} \cdot R_{\text{rulm D}} \cdot R_{\text{angr pitting}} \cdot R_{\text{roata1 rupere}} \cdot R_{\text{roata2 rupere}} \cdot R_{\text{arb1}} \cdot R_{\text{arb2}} = \\ = 0,996921 \cdot 0,999025 \cdot 1 \cdot 0,999498 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0,995449.$$

Practic, valoarea fiabilității ansamblului este dată de valorile fiabilității rulmenților, componente mult mai ieftine decât angrenajul. Prin urmare, dacă este necesară creșterea suplimentară a fiabilității reductorului, aceasta se poate obține relativ ușor prin înlocuirea rulmenților A, B și D la un interval de timp mai mic decât durata impusă de 15000 ore.

Dacă fiabilitățile componentelor sunt modelate cu legea exponențială negativă, atunci fiabilitatea ansamblului, cu elemente dispuse în serie, se determină cu (6.2):

$$R_s = \exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^7 \lambda_i\right) = \exp[-15000 \cdot (4 \cdot 0,5 + 0,002 + 2 \cdot 0) \cdot 10^{-6}] = 0,970416$$

unde s-au considerat valorile medii ale intensității de defectare din tabelul 9.1 pentru cei 4 rulmenți și pentru angrenajul considerat ca un subansamblu iar în cazul arborilor s-au intensitățile de defectare au fost considerate nule.

10.6 Determinarea fiabilității unui sistem cu ajutorul metodei Monte Carlo

Metoda Monte Carlo este utilă pentru calculul fiabilității sistemelor cu structură foarte complicată și componente cu repartiții de probabilitate diferite. Prin această metodă se simulează (numeric) determinarea experimentală a fiabilității sistemului ale cărui componente se defectează aleator, fiecare după legea sa de repartiție.

Problema 10.7

Fiabilitatea componentelor sistemului mecanic din figura 10.4 este modelată cu legea de repartiție exponențială negativă având următoarele rate de defectare: $\lambda := (0.003; 0.0001; 0.0001; 0.0002; 0.0001; 0.0003; 0.0002; 0.0004; 0.0005; 0.0001; 0.0002)$.

1) Pentru durata $L_{lim}=200$ ore să se determine fiabilitatea sistemului prin simularea funcționării cu ajutorul metodei Monte Carlo și să se compare rezultatul cu cel exact, calculat pe baza schemei structurale. Determinarea se va face cu 100; 1000 și 10000 de simulări.

2) Să se traseze graficul repartiției fiabilității determinate pe baza schemei structurale în domeniul $t \in [1; 300]$.

3) Să se determine durata după care fiabilitatea sistemului devine 80%.

4) Să se determine elementul cu influența cea mai mare asupra fiabilității sistemului, pentru care mărirea cu 10 % a fiabilității ar determina cea mai mare creștere a fiabilității ansamblului.

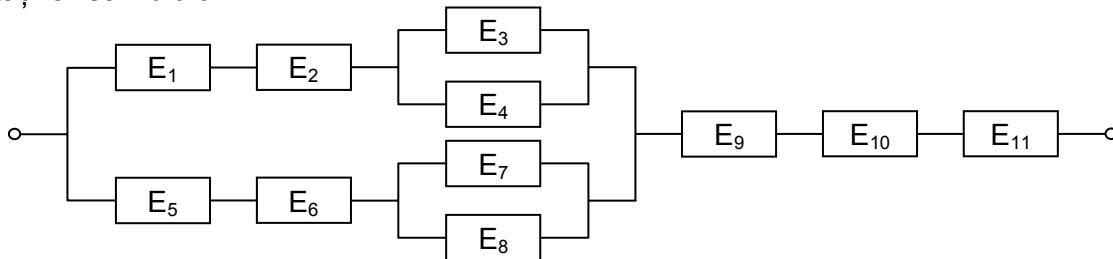


Fig. 10.4. Schema sistemului de analizat

Rezolvare

1) Determinarea fiabilității sistemului

- Se observă că elementele E_1, \dots, E_4 și $E_5 \dots E_8$ sunt dispuse în structuri identice.

Se definește funcția de structură parțială: $SA(e_1, e_2, e_3, e_4) := e_1 \cdot e_2 \cdot [1 - (1 - e_3) \cdot (1 - e_4)]$

- Se calculează fiabilitatea ansamblului pe baza schemei structurale:

$$s1 := SA(e^{-\lambda_1 t}, e^{-\lambda_2 t}, e^{-\lambda_3 t}, e^{-\lambda_4 t}) \quad s2 := SA(e^{-\lambda_5 t}, e^{-\lambda_6 t}, e^{-\lambda_7 t}, e^{-\lambda_8 t}) \quad s3 := e^{-\lambda_9 t} \cdot e^{-\lambda_{10} t} \cdot e^{-\lambda_{11} t}$$

Se observă că ansamblul poate fi descris de asemenea prin funcția SA (prin adăugarea în serie cu subsistemul S3 a unui element cu fiabilitatea $R=1$) astfel:

$$R_{st} = SA(s3, 1, s1, s2).$$

Se obține: $R_{s1} = 0,53753$; $R_{s2} = 0,92033$; $R_{s3} = 0,85214$; $R_{st} = 0,82075$.

- Se determină fiabilitatea ansamblului utilizând metoda Monte Carlo astfel:

- cu durata $L_{lim} = 200$ ore se calculează fiabilitățile componentelor:

$$r_i = r_i(L_{lim}) = \exp(-\lambda_i \cdot L_{lim});$$

- pentru fiecare element i se generează valori aleatoare ale fiabilității $r_{i,j}$ cuprinse între 0 și 1 și repartizate uniform;

- se determină stările componentelor;

$$\text{starea}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } r_{i,j} \leq r_i \\ 0 & \text{pentru } r_{i,j} > r_i \end{cases}$$

10. Aplicații

Observația 1: $r_{i,j}$ reprezintă valoarea efectivă a fiabilității populației formate elemente i (identice) în cadrul simulării j ($j=1 \dots nrs$); dacă $r_{i,j} \leq r_i$ atunci $L_{i,j} \geq L_{lim}$ și elementul este în stare de funcționare.

Observația 2: Starea sistemului poate fi determinată și prin utilizarea de numere aleatoare repartizate corespunzător (în cazul de față repartiția este exponențială negativă cu rata de defectare λ_i). Acestea au semnificația durabilităților efective $L_{i,j}$ iar starea sistemului este:

$$\text{starea}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } L_{i,j} > 200 = L_{lim} \\ 0 & \text{pentru } L_{i,j} \leq 200 = L_{lim} \end{cases}$$

- se calculează starea subansamblelor și sistemului:

$$sm_{1j} := SA(\text{starea}_{1,j}, \text{starea}_{2,j}, \text{starea}_{3,j}, \text{starea}_{4,j}); \quad sm_{3j} := \text{starea}_{9,j} \cdot \text{starea}_{10,j} \cdot \text{starea}_{11,j}$$

$$sm_{2j} := SA(\text{starea}_{5,j}, \text{starea}_{6,j}, \text{starea}_{7,j}, \text{starea}_{8,j}); \quad \text{StareSistem}_j := SA(sm_{3j}, 1, sm_{1j}, sm_{2j});$$

- fiabilitatea sistemului se obține din raportul numărului de cazuri când sistemul nu este defect la numărul total de simulări, nrs :

$$Rs = \frac{\sum_{j=1}^{nrs} \text{StareSistem}_j}{nrs};$$

Se obține: $Rs=0,78$ (pentru $nrs=100$); $Rs=0,816$ (pentru $nrs=1000$) și $Rs=0,829$ (pentru $nrs=10000$). Se constată că rezultatul tinde către valoarea exactă, calculată pe baza schemei structurale, $R_{st}=0,82075$. Se observă că valorile Rs diferă, dacă se repetă calculul însă diferențele scad treptat cu creșterea numărului de simulări nrs .

2) Graficul repartiției fiabilității este prezentat în figura 10.5.

3) Durata după care fiabilitatea sistemului devine 80% este: $t = 222,478$ ore.

4) Determinarea elementului cu influența cea mai mare asupra fiabilității sistemului, pentru care mărirea cu 10 % a fiabilității ar determina cea mai mare creștere a fiabilității ansamblului, se realizează prin creșterea, pe rând, cu 10 % a fiabilității fiecărui element și calculul fiabilității ansamblului. S-au obținut următorul șir de valori: {0,8244; 0,8244; 0,82089; 0,82082; 0,85702; 0,85702; 0,82344; 0,82206; 0,90282; 0,90282; 0,90282}. Se constată că influența cea mai mare o au elementele 9, 10 și 11 a căror creștere (individuală) cu 10 % determină mărirea fiabilității ansamblului de la 0,82075 la 0,90282.

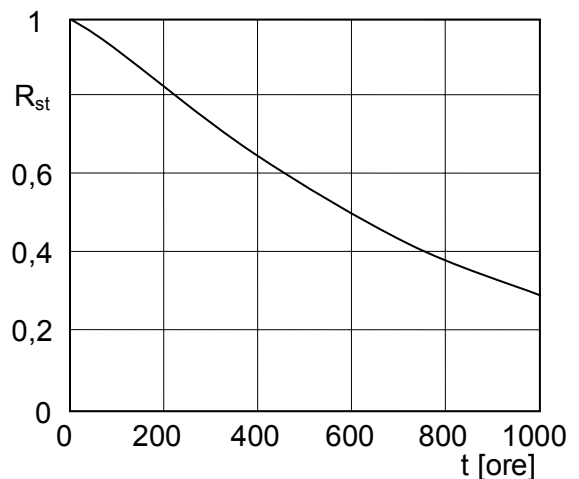


Fig. 10.5 Graficul repartiției fiabilității sistemului din fig. 10.4

10.7 Probleme propuse [2, 7, 8, 10, 13, 14, 24, 25]

Problema 1

Să se determine parametrii funcției de repartiție Weibull pentru zece componente electrice ($n=10$) care sunt supuse unei încercări de durabilitate. Experimentul este considerat încheiat la căderea a $r = 7$ elemente. Durabilitățile obținute (exprimate în 10^3 h) sunt:

$X1 := (1.5; 2.25; 3; 3.45; 4.4; 5.1; 5.8)$

Problema 2

Din producția curentă a două strunguri automate au fost prelevate câte două eșantioane de $n=100$ de bolțuri care au fost măsurate cu un ortotest având diviziunea de $1 \mu\text{m}$, rezultatele fiind rotunjite la valoarea unei jumătăți de diviziune. În șirul de rezultate sunt date valorile abaterilor de la cota nominală. Să se determine parametrii repartiției normale și să se testeze concordanța modelului stabilit utilizând valorile experimentale. Să se determine domeniul în care se găsesc 90% din piesele realizate.

$X1 := (1; 1.5; -2.5; 0; -1.5; 1; 1; 15; -1; -2; 2; 3; 11; -1; 5; 4.5; 0.5; 3.5; 8; 5; 4.5; 3.5; 9.5; 12; 7.5; 7.5; 10; 8.5; 10; 11; 14; 11; 11; 13; 16; 14.5; 19; 14; 18; 19; 19; 23.5; 22; 18.5; 19.5; 17.5; 18; 19.5; 17.5; 25.5; 19.5; 22; 13.5; 18.5; 21.5; 30.5; 21; 13.5; 11.5; 10; 7.5; 8.5; 6.5; 8.5; 5.5; 26; 12.5; 6.5; 8.5; 7.5; 2.5; 7; 4.5; -0.5; 4; 5.5; 1; 4; 6.5; 5; 4.5; 5; 7.5; 5; 15.5; 6; 6.5; -3; 5; 3.5; -3; -14; 17; -9; -13; -12; 8.5; 12; 6; 8.5)$

$X2 := (0; 7; -1; -3; 0.5; 0; -2; -4.5; 2; -10; -8.5; -3.5; -11.5; -11.5; -7.5; -11.5; -6.5; 2; -11; -17.5; -15; -15.5; 1.5; -18; -20; -15; -3; -8; -1; -6.5; -8; -13.5; -12; -17; -10.5; 14.5; 10; 9.5; 7; 0.5; 21; 10.5; 5; 0.5; 4; 0; 0.5; 3.5; 9; 2.5; 2; 7; 7.5; 3.5; 7; 4.5; -4; 11; 4; 9; 4.5; 11.5; 14; 10; 20; 13; 7; 12; 7.5; 2; 1; 25; 0.5; -3; -4.5; 6; 9.5; 12.5; 19; 13; 1.5; 0.5; 12; 4; 6.5; -9.5; -8; -4.5; 7.5; -4; -9; -9; 2; -0.5; 3.5; 10.5; -5.5; -6; -6.5; -8)$

Problema 3

La un eșantion de $n=50$ osii produse pe un strung automat este măsurată abaterea de la valoarea nominală a unei cote importante utilizând un comparator cu diviziunea de $1 \mu\text{m}$, rezultatele fiind rotunjite la valoarea unei jumătăți de diviziune. Să se determine parametrii repartiției normale și să se testeze concordanța modelului stabilit pe baza valorilor experimentale. Să se determine probabilitatea ca piesele realizate să se găsească în domeniul de toleranțe $\pm 25 \mu\text{m}$.

$X1 := (-14; -1; 0.5; 14.5; -11.5; -17; -6.5; 8.5; -3; 11; 3.5; 0.5; 7; 7; 5; 4; 1; 18; 2; 10; 19.5; -20; -8; 4.5; -9; -5.5; 2.5; 8.5; 10.5; -1.5; 6; 13; -4; 9.5; 0; 14; 7.5; 12; 23.5; -10.5; 2; 19; 21; 7.5; 1.5; 4; 5; 12.5; 6.5; 17)$

Problema 4

Diametrul unui cablu blindat se supune legii de repartiție normale cu media $\mu=7,75$ mm și abaterea medie pătratică $\sigma = 0,1$ mm. Să se determine probabilitatea ca diametrul cablului să fie superior valorii 7,9 mm. Ce diametru mediu ar trebui să aibă cablul pentru ca probabilitatea de a se întâlni o porțiune de cablu mai groasă decât 7,9 mm să fie 1% ?

Problema 5

Abaterile diametrului interior al unei bucșe sunt repartizate normal cu media $\mu=30$ μm și abaterea medie pătratică $\sigma = 10$ μm . Să se determine probabilitatea ca diametrul bucșei să aibă abaterile cuprinse între 10 μm și 50 μm .

Problema 6

Pentru studiul durabilității unui burghiu elicoidal cu $\Phi=6$ mm a fost analizat un eșantion format din $n=14$ elemente pentru care s-au determinat durabilitățile efective exprimate în minute. Să se determine parametrii repartiției normale și să se verifice ipoteza de normalitate.

$X_1 := (16.10; 19.18; 19.25; 22.44; 22.58; 23.20; 24.58; 26.50; 27.22; 30.26; 32.18; 33.58; 26.58; 39.55)$

Problema 7

Să se determine parametrii repartiției Weibull și să se testeze concordanța repartiției teoretice cu cea empirică în cazul rezultatelor unor încercări de fiabilitate realizate în laborator pe un eșantion de 68 componente electronice. Duratele de funcționare până la defectare, exprimate în ore, sunt:

$X_1 := (241; 1179; 553; 733; 612; 1297; 134; 344; 1092; 909; 1292; 371; 829; 566; 765; 572; 814; 1277; 242; 812; 233; 1051; 153; 788; 42; 169; 827; 892; 36; 1118; 1245; 1199; 123; 121; 1045; 809; 1207; 1223; 493; 305; 319; 460; 353; 621; 390; 541; 1239; 781; 113; 17; 677; 788; 498; 1077; 681; 31; 1279; 266; 1122; 1145; 911; 944; 873; 988; 886; 1281; 15; 1045).$

Problema 8

S-au supus încercărilor de laborator un număr de 15 componente electronice. Să se determine parametrii repartiției exponențiale negative și să se testeze concordanța repartiției teoretice cu cea empirică. Valorile în ore ale timpului de funcționare până la cădere se prezintă în continuare.

$X_1 := (310; 1110; 233; 155; 2095; 415; 1970; 205; 1790; 466; 287; 605; 898; 1460; 820)$

Indicație: Parametrul repartiției exponențiale negative λ se determină ca și parametrul η al repartiției Weibull cu $\beta=1$, știind că $\lambda=1/\eta$.

Problema 9

Au fost efectuate probe de fiabilitate asupra unui număr de 9 tuburi fluorescente tip PW, putere 65 W, U 220 V/50 Hz. Să se estimeze și să se testeze modelul teoretic obținut, comportamentul unor produse similare făcând plauzibilă ipoteza de exponențialitate. Duratele de funcționare până la cădere, exprimate în ore, sunt:

$X_1 := (2050; 3450; 2975; 2700; 4700; 3100; 2575; 5950; 2300)$

Problema 10

Rezultatele încercărilor de laborator privind fiabilitatea produsului „aspirator de praf AP x 9” sunt date sub forma duratelor de funcționare până la defectare. Eșantionul a fost format aleator utilizând unul dintre procedeele clasice. A rezultat prin utilizarea STAS 3160/72 un volum al eșantionului $n = 15$. Se cere estimarea parametrilor modelului

10. Aplicații

exponential negativ și testarea concordantei cu repartiția empirică. Eșantionul obținut, exprimat în ore este:

$X_1 := (820; 898; 1460; 415; 605; 287; 310; 466; 1110; 2095; 1790; 1970; 205; 155; 233)$

Problema 11

S-au supus observației în funcționare un număr de 15 sisteme mecanice pentru prelucrarea metalelor. S-au înregistrat duratele, în zile, până la defectare. Tipologia acestei clase de produse face plauzibilă ipoteza unei repartiții lognormale a duratelor de funcționare până la apariția căderilor. Valorile duratelor obținute experimental sunt:

$X_1 := (47; 178; 562; 105; 132; 118; 324; 96; 159; 213; 157; 77; 235; 148; 192)$

Indicație: Parametrii repartiției lognormale se determină ca și în cazul celei normale însă se utilizează logaritmi zecimali ai valorilor durabilităților.

Problema 12

Să se determine parametrii repartiției Weibull și să se testeze concordanța acesteia cu cea empirică în cazul a cinci eșantioane de câte $n = 30$ anvelope. Rezultatele, exprimate în km rulați, sunt.

$X_1 := (61409; 92188; 92188; 100136; 80332; 61300; 115772; 115772; 54183; 56232; 92188; 88766; 103898; 103898; 54394; 55002; 60049; 60049; 128435; 128435; 51397; 51305; 62041; 57987; 116611; 51856; 57879; 109000; 109000; 54697)$

$X_2 := (70545; 57004; 66457; 62047; 53863; 100750; 105750; 54133; 76532; 70802; 71209; 92715; 92715; 92715; 59946; 107335; 107335; 59946; 59946; 59946; 61784; 50081; 57536; 95282; 95282; 95282; 95282; 56923; 54616; 70800)$

$X_3 := (55946; 50000; 84057; 84057; 72463; 50000; 69789; 50235; 76750; 76750; 109545; 55715; 55715; 61129; 55033; 89322; 53197; 51198; 59567; 76623; 52887; 52887; 62951; 52887; 52887; 52228; 81440; 81440; 81440; 81440)$

$X_4 := (88730; 53684; 54813; 61269; 89450; 58817; 120286; 120286; 54576; 52228; 61409; 80005; 53684; 75221; 75221; 134450; 54813; 119179; 58817; 60753; 85500; 85500; 54576; 56875; 79500; 79500; 67066; 72359; 51651; 50624)$

$X_5 := (57799; 100475; 52205; 71193; 71193; 53272; 61269; 51291; 77254; 51323; 66457; 57033; 125575; 55979; 81700; 81700; 59455; 59455; 60753; 53630; 98890; 55400; 63353; 60231; 57600; 129400; 53755; 53755; 88733; 88733)$

Problema 13

S-au supus încercărilor de fiabilitate un număr de $n = 55$ întrerupătoare de rețea pentru TV, experimentul fiind sistat la 50000 comutări. S-au defectat $r = 12$ elemente, restul nu. Se cere să se verifice ipoteza privind la natura exponențială a procesului defectărilor. Rezultatele încercărilor, sub forma numărului de comutări până la cădere sunt:

$X_1 := (4500; 5750; 11455; 12775; 14130; 16300; 21460; 30055; 34916; 37103; 41665; 48214)$.

Problema 14

S-au observat un număr de 74 autovehicule pe durata a 25000 km. Să se determine parametrii repartiției Weibull și să se testeze concordanța modelului teoretic cu cel empiric. Să se determine și să se compare indicatorii de fiabilitate empirici și teoretici. Datele, exprimate în km parcurși sunt:

$X_1 := (5140; 12450; 12800; 200; 8430; 17600; 11300; 6012; 430; 2040; 540; 9710; 2830; 15870; 1635; 9000; 15700; 5400; 9111; 23130; 1000; 8200; 19300; 2280; 14080; 7510; 16102; 412; 17120; 21320; 16600; 23900; 17090; 11091; 4380; 5611; 2400; 23130; 22040; 965; 19400; 750; 17100; 7200; 12010; 12450; 9613; 15190; 15980; 2901; 16540; 228; 830; 1434; 7200; 19400; 15700; 9060; 2901; 10410; 22040; 1981; 130; 12450; 15910; 2040; 17600; 5900; 750; 13600; 19130; 12600; 22800; 11600)$

Problema 15

Un eșantion de $n = 20$ componente mecanice de același tip ale unor sisteme hidraulice sunt supuse unei încercări de fiabilitate pe o perioadă de $T_0 = 1500$ ore. În decursul perioadei respective s-au defectat $r = 15$ elemente. Să se determine parametrii repartiției Weibull și să se testeze concordanța modelului teoretic cu cel empiric. Duratale până la defectare exprimate în ore sunt:

$X_1 := (1050; 150; 90; 1260; 575; 1200; 330; 820; 1150; 280; 460; 1100; 210; 1000; 680)$.

Problema 16

Să se determine parametrii modelului Weibull și să se testeze concordanța acestuia cu repartiția empirică pentru un eșantion epuizat format din $n=90$ cilindri hidraulici. Duratale de funcționare până la defectare, exprimate în ore sunt:

$X_1 := (105; 118; 128; 129; 147; 149; 150; 187; 193; 213; 227; 488; 497; 499; 517; 527; 529; 530; 548; 548; 550; 551; 571; 585; 587; 597; 607; 608; 612; 614; 615; 616; 618; 622; 627; 639; 641; 650; 660; 661; 671; 683; 687; 690; 691; 691; 727; 747; 748; 749; 751; 751; 757; 759; 761; 767; 772; 778; 781; 793; 800; 815; 818; 847; 851; 865; 868; 874; 884; 892; 901; 914; 919; 925; 937; 948; 948; 952; 1005; 1027; 1034; 1048; 1051; 1052; 1058; 1181; 1183; 1221; 1281; 1334)$.

Problema 17

S-au efectuat încercări de laborator asupra comportamentului produsului „releu contact” pentru un eșantion de $n = 30$ elemente. Să se determine parametrii repartiției Weibull și să se testeze concordanța acesteia cu cea empirică. Rezultatele încercărilor (exprimate prin acționări $\times 10^3$) sunt:

$X_1 := (7.5; 6.3; 9.; 8.1; 6.2; 11.2; 8.3; 9.4; 8.7; 8.5; 8.8; 10.1; 9.8; 8.8; 9.9; 7.; 8.7; 10.5; 8.3; 11.9; 9.2; 4.; 7.6; 7.9; 9.5; 12.2; 8.6; 9.1; 6.6; 12.5)$.

Problema 18

Pe timpul experimentărilor unui lot de 10 autocamioane de teren s-au înregistrat ruperi la axa planetară din dreapta față. Să se determine parametrii legii Weibull care modelează această distribuție a defectărilor. Momentele defectărilor sunt exprimate în km parcurși.

$X_1 := (48203; 28427; 42913; 45218; 38033; 33871; 40102; 31175; 24791; 35338)$.

10. Aplicații

Problema 19

Să se determine parametrii repartiției normale și să se testeze cu ajutorul criteriului χ^2 concordanța modelului cu repartiția empirică a timpului maxim de utilizare a unui lot de 110 autocamioane. Rezultatele sunt centralizate în tabelul următor.

Rulaj mașini în ani	1	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0
Număr auto casate	2	2	7	6	13	16	16	16	14	11	4	3	1	1

Problema 20

Un eșantion format din $n=20$ arbori au fost încercați la încovoiere rotativă cu tensiunea $\sigma_i=380$ MPa. Să se determine parametrii repartițiilor log-normală și Weibull și, utilizând testul Kolmogorov-Smirnov, să se afle care repartiție modelează mai bine rezultatele experimentale:

$X_1 := (100000; 117000; 125000; 132000; 90000; 177000; 118000; 97000; 59000; 98000; 99000; 87000; 80000; 158000; 186000; 69000; 126000; 107000; 66000; 109000)$.

Problema 21

Să se determine parametrii repartițiilor lognormală și Weibull și să se stabilească utilizând testul Kolmogorov-Smirnov, repartiția care modelează mai bine rezultatele experimentale în cazul unei încercări la pitting cu $\sigma_H=1528$ MPa:

$X_1 := (10.; 7.9; 17.3; 30.5; 18.2; 15.1; 24.6; 12.2; 14.3; 13.5)$.

Problema 22

Dintr-un eșantion de $n=22$ elemente supuse la o încercare de fiabilitate au fost obținute $r =$ defectări până la sistarea experimentului. Să se determine parametrii repartițiilor lognormală și Weibull și să se testeze concordanța celor două modele cu repartiția empirică.

$X_1 := (15 \ 33.8; 23.1; 32.7; 19.5; 23.5; 24.5; 33.9; 17.5; 15.5; 20.6; 16.5; 22.8; 26.5; 26.5; 15.6)$

Problema 23

Pentru determinarea parametrilor repartiției normale care modelează distribuția rezistenței la oboseală a oțelului carbon XC 60 s-a utilizat metoda „probits”, rezultatele fiind centralizate în tabelul următor.

Tensiunea palierului de încercare σ_i [MPa]	Număr de epruvete		Ponderea rupturilor [%]
	încercate	rupte până la $17 \cdot 10^6$ cicluri	
320	50	10	20
330	50	15	30
340	50	26	52
350	50	32	64
360	50	41	82

Problema 24

S-au supus observației privind funcționarea în timp a 16 baterii auto tip 12 R-45. Să se verifice ipoteza cu privire la repartiția căderilor presupusă a fi, în baza fizicii procesului de degradare a bateriilor, de tip lognormal. Rezultatele probelor de funcționare exprimate în $\text{km} \times 10^3$ față de momentul căderii au fost următoarele:

$X_1 := (85, 115, 75, 53, 114, 89, 147, 92, 111, 156, 109, 77, 122, 99, 132, 94)$.

Problema 25

Pentru un eșantion compus din $n=20$ de componente identice supuse la uzare s-a studiat ieșirea din uz ca urmare a depășirii uzurii admisibile. Să se determine parametrii repartiției Weibull care modelează procesul de defectare al acestor componente și să se studieze concordanța modelului cu repartiția empirică. Duratele în ore până la ieșirea din uz sunt:

$X_1 := (1200; 2700; 1950; 1300; 1600; 2000; 520; 1000; 800; 1500; 680; 1700; 900; 1200; 1400; 920; 1600; 1350; 1100; 1700)$.

Problema 26

Pentru un eșantion format din $n=36$ de cuple de frecare a fost determinată experimental uzura în funcție de timp pentru cuple cu formă și materiale identice, în aceleași condiții de funcționare. Să se determine parametrii repartiției normale și să se verifice concordanța modelului astfel obținut cu repartiția empirică. Jocul maxim admisibil, condiționat funcțional, a fost atins în următoarele durate de timp (în ore):

$X_1 := (288; 345; 370; 316; 310; 330; 360; 350; 340; 334; 330; 290; 365; 316; 345; 350; 390; 380; 370; 350; 310; 380; 360; 355; 318; 345; 338; 330; 350; 325; 334; 338; 342; 335; 370; 335)$