3. INDICATORII DE FIABILITATE AI SISTEMELOR MECANICE

3.1. Expresia generală a fiabilității [6, 8, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 27]

Timpul T (durată, cicluri, manevre etc.) până la apariția unui defect sau intervalul între două defectări succesive este o variabilă aleatoare. Acesta reprezintă durata de viață a fiecărui element, considerat în mod individual. Aşa cum s-a arătat în capitolul 1, fiabilitatea este probabilitatea P ca timpul T să fie mai mare ca timpul dat (durata) t, considerat ca variabilă continuă. Expresia (1.1) se poate scrie şi sub forma:

$$R(t) = P(T > t). \tag{3.1}$$

Expresia analitică a fiabilității se obține pornind de la următoarele considerații. Fie un număr n_o de elemente în stare de funcționare la timpul $t = 0$. La un moment oarecare t, înaintea unui interval $(t, t + \Delta t)$ mai sunt în stare de funcționare n elemente. Numărul de elemente care se defectează pe durata Δt (fig. 3.1) este Δn. Considerând un factor de proporționalitate $\lambda > 0$, constant, $\Delta n = - \lambda \cdot n \cdot \Delta t$. Semnul minus arată că $n - \Delta n < n$ (fig. 3.2). Trecând la limită $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$, se obține următoarea ecuație diferențială:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n, \tag{3.2}$$

a cărei soluție obținută prin integrare este

$$\frac{n}{n_o} = e^{-\lambda t}. \tag{3.3}$$

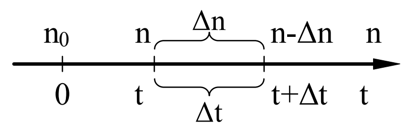

Fig. 3.1. Căderile corespunzătoare unui interval

Raportul n/n_o reprezintă proporția (frecvența) de elemente în stare de funcționare la momentul t, adică fiabilitatea:

$$R(t) = \frac{n}{n_o} = e^{-\lambda t}. \tag{3.4}$$

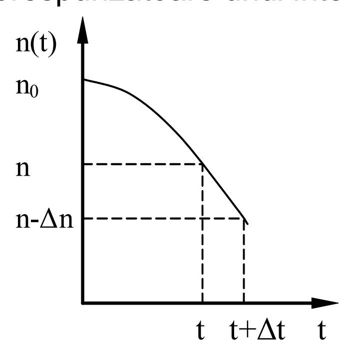

Fig. 3.2. Variația numărului de elemente în stare de funcționare

Astfel, fiabilitatea R(t) reprezintă probabilitatea ca un element să funcționeze fără defectare în intervalul (0, t) în condiții determinate. Relația (3.4) s-a obținut în ipoteza că λ = const. În realitate acest factor poate să varieze în timp şi atunci expresia (3.2) trebuie scrisă:

$$\frac{dn}{dt} = -n\,\lambda(t), \tag{3.5}$$

de unde rezultă expresia generală a fiabilității:

$$R(t) = \frac{n}{n_o} = \exp\left[-\int_o^t \lambda(t)dt\right]. \tag{3.6}$$

Se observă că funcția fiabilității R(t) este de tip exponențial având valorile extreme $R(0) = 1$ şi $R(\infty) = 0$.

Variația fiabilității este prezentată în fig. 3.3.

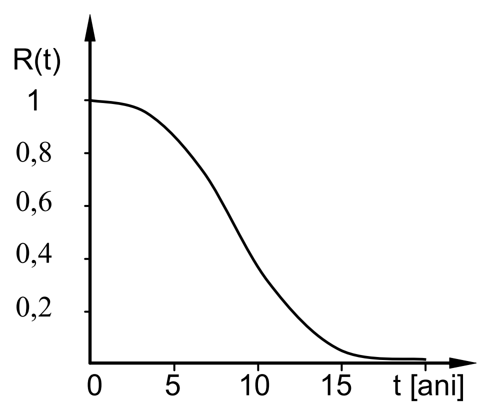

Fig. 3.3. Variația fiabilității

În unele cazuri se ignoră momentul punerii în funcțiune, interesând numai fiabilitatea pe un interval (t_0, t_1). Se consideră evenimentul A - buna funcționare în intervalul $(0, t_0)$ şi evenimentul B - buna funcționare în intervalul (t_o, t_1). Buna funcționare în intervalul $(0, t_1)$ este dată de evenimentul $A \cap B$. Probabilitatea acestui eveniment este $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Dar $P(A \cap B) = R(t_1)$ - fiabilitatea la sfârşitul intervalului $(0, t_1)$; $P(A) = R(t_o)$ şi $P(B/A) = R(t_o/t_1)$ este fiabilitatea rezultată în intervalul (t_o, t_1) denumită şi *fiabilitate condiționată*. Această relație se poate pune şi sub forma:

$$R(t_1) = e^{-\int_0^{t_1} \lambda dt} = e^{-\int_0^{t_0} \lambda\, dt} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t_1} \lambda\, dt} = R(t_o) \cdot R(t_1/t_o). \qquad (3.7)$$

Fiabilitatea pe un interval oarecare este o fiabilitate condiționată de bună funcționare la începutul intervalului, reprezentând astfel probabilitatea ca elementul care a funcționat la $t = t_o$ să funcționeze şi în intervalul (t_o, t_1). Dacă λ = const., fiabilitatea condiționată are expresia

$$R(t_1/t_o) = e^{-\lambda\,(t_1 - t_o)} = e^{-\lambda\,\theta}, \qquad (3.8)$$

unde θ este durata (intervalul de timp t_1-t_0). Se observă că pentru λ = const., fiabilitatea pe un interval oarecare nu depinde de durata funcționării anterioare $t_{o,}$ sau fiabilitatea misiunii nu depinde de momentul începerii misiunii.

3.2. Funcția de repartiție (funcția căderilor) [6, 8, 12, 15, 17, 19, 22]

Dacă A reprezintă buna funcționare la timpul t iar $\overline{A}$ defectarea, rezultă:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - R(t) = P(T < t) = F(t). \qquad (3.9)$$

Funcția $F(t)$ este funcția de repartiție a căderilor (defectărilor) şi conform (3.6) este

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda\,(t)\,dt}. \qquad (3.10)$$

Pe baza considerațiilor anterioare

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \frac{n}{n_o} = \frac{n_o - n}{n_o} = \frac{r}{n_o}, \qquad (3.11)$$

unde r este numărul elementelor defecte. Funcția căderilor este funcția de repartiție a duratei până la defectare. Aceasta poate fi scrisă şi pe baza densității de probabilitate $f(t)$:

$$F(t) = \int_o^t f(t)dt. \qquad (3.12)$$

Relația (3.9) mai poate fi scrisă şi astfel:

$$R(t) = 1 - F(t) = \int_o^\infty f(t)dt - \int_o^t f\,(t)dt = \int_t^\infty f\,(t)dt, \qquad (3.13)$$

sau

$$F(t) = 1 - R\,(t) = 1 - \int_o^\infty f(t)dt. \qquad (3.14)$$

Densitatea de probabilitate a căderilor

Conform definiției, densitatea de probabilitate $f(t) = \dfrac{dF}{dt}$ a repartiției timpului până la defecare se obține astfel:

$$f\,(t) = \frac{d(1 - R)}{dt} = -\frac{dR}{dt}. \qquad (3.15)$$

În fig. 3.4 sunt reprezentate funcțiile $R(t)$, $F(t)$, şi $f(t)$. Cu ajutorul diferențelor finite densitatea de probabilitate pe un anumit interval Δt se poate scrie astfel:

$$f(t) = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta n}{n_o} \cdot \frac{1}{\Delta t}. \tag{3.16}$$

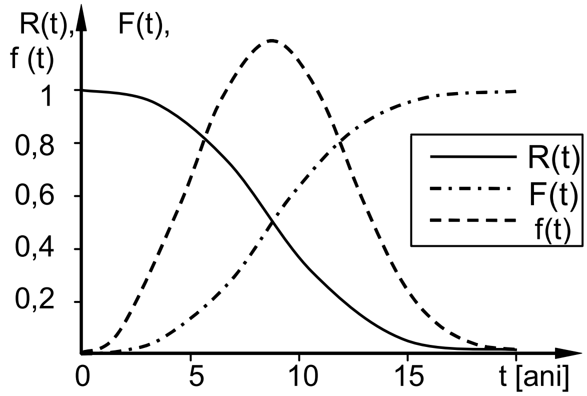

Fig.3.4. Graficul funcțiilor R(t), F(t) şi f(t)

3.3. Rata căderilor [1, 2, 3, 6, 12, 15, 16, 17, 19, 22, 30]
3.3.1. Aspecte teoretice fundamentale

Factorul de proporționalitate $\lambda(t)$ reprezintă unul dintre parametrii cei mai importanți ai fiabilității şi poartă denumirea de *rata căderilor* (*rata defectărilor* sau *intensitatea de defectare*). Considerând relația fundamentală (3.6) rezultă:

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda(t) e^{-\int_o^t \lambda(t)dt} = -\lambda(t) R(t), \tag{3.17}$$

de unde:

$$\lambda(t) = -\frac{dR}{dt} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dt} = \frac{f(t)}{R(t)}. \tag{3.18}$$

Cu această relație, fiabilitatea poate fi scrisă şi astfel:

$$R(t) = \frac{f(t)}{\lambda(t)}. \tag{3.19}$$

Relația (3.17) arată că densitatea de probabilitate poate fi definită pe baza ratei căderilor astfel:

$$f(t) = \lambda(t) e^{-\int_o^t \lambda(t)dt}. \tag{3.20}$$

Utilizând diferențele finite, rata căderilor capătă forma:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\Delta n}{n_o} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{n_o}{n} = \frac{\Delta n}{n} \cdot \frac{1}{\Delta t}. \tag{3.21}$$

Observație: Dacă intervalul Δt este foarte mic, atunci:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\text{Probabilitatea ca elementul care a functionat în intervalul } (0,t) \text{ sã se defecteze în intervalul } (t, t+\Delta t)}{\Delta t} \right].$$

Rata defectărilor poate fi definită şi cu ajutorul probabilităților condiționate considerând evenimentele:

A - buna funcționare în intervalul (0, t);

B - apariția unui defect în intervalul (t, t + Δt).

Probabilitatea unei defectări pe durata Δt la cele n elemente în stare de funcționare la începutul intervalului $(t, t + \Delta t)$ este:

$$\lambda(t) = P(B / A) = P(A \cap B) / P(A). \tag{3.22}$$

Probabilitatea $P(A \cap B)$ reprezintă densitatea căderilor în intervalul considerat iar $P(A) = R(t)$. Se ajunge astfel la relația anterioară (3.17).

Observații:

a) Rata căderilor (rata defectărilor sau intensitatea de defectare) este o caracteristică locală a fiabilității.

b) Densitatea de defectare se calculează ca raportul dintre numărul defectărilor înregistrate într-un interval de observație şi lungimea acestui interval. În cazul în care intervalul de observație are aceeaşi lungime pe tot parcursul timpului, această lungime se poate lua drept unitate de timp şi atunci densitatea defectărilor se confundă cu numărul defectărilor. Dacă intervalele de observație au lungimi diferite, densitatea defectărilor va arăta câte defectări (produse în cadrul intervalului) revin pe unitatea de timp elementară (oră, zi, mie de cicluri etc.) şi devine analogă cu densitatea de repartiție experimentală.

3.3.2. Caracteristica experimentală a ratei căderilor

Curba experimentală a ratei căderilor pentru orice produs industrial are în general forma din fig. 3.5 care a făcut să fie denumită şi caracteristica în formă de “cadă de baie”. Modul de variație a ratei defectărilor delimitează trei perioade tipice din viața produsului pentru care sunt specifice anumite defecte astfel:

a) perioada infantilă (a defectelor precoce);
b) perioada maturității (a defectelor accidentale);
c) perioada bătrâneții (a defectelor de uzură).

Perioada infantilă, a defectelor precoce sau a mortalității infantile, este etapa în care rata defectărilor are o valoare ridicată care descreşte permanent. Această etapă cuprinde defectele care apar la începutul punerii în funcțiune a produsului. Ele sunt datorate în cea mai mare parte unor defecte de fabricație “ascunse” pe care un control oricât de riguros nu reuşeşte să le îndepărteze. Aceste tipuri de defecte nu trebuie să se producă, în general, la beneficiar şi se caută să se elimine prin “punerea în probe” a produsului sau prin rodaj. În cazul unui produs complex conținând mai multe elemente (componente) şi a cărui încercare ridică anumite probleme se poate efectua un rodaj pe subansambluri cu condiția stabilirii regimului corect de lucru.

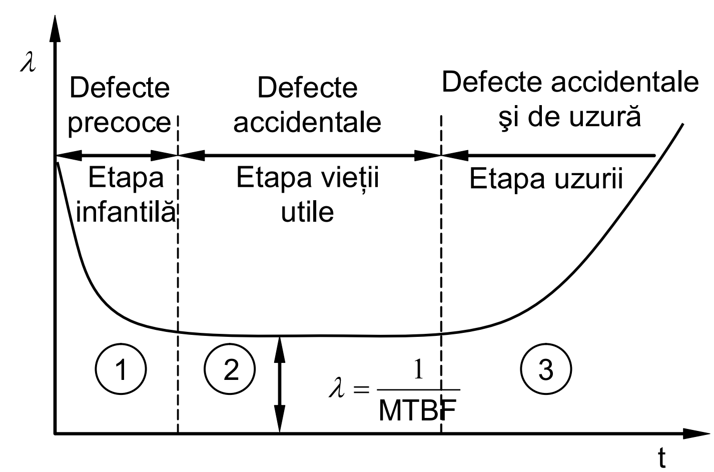

Fig. 3.5. Alura curbei ratei căderilor tipică pentru produse industriale

Panta caracteristicii pe porțiunea a - b, figura 3.6 a, poate servi ca indicator al nivelului tehnic al producției. Intervalul de timp până la b defineşte durata necesară a rodajului. În cazul echipamentelor sau sistemelor caracteristica ratei defectărilor λ_s se obține printr-o simplă însumare a caracteristicilor componente λ_i (fig. 3.6, b). Dacă elementele componente ale unui sistem sunt omogene, rata căderilor poate să depăşească limita admisibilă (fig. 3.7, a). Dacă sistemul este format din componente eterogene, rata defectărilor poate fi mai mică însă perioada rodajului este mai lungă (fig. 3.7, b).

Perioada maturității (a vieții utile) produsului este caracterizată numai de defectele accidentale. Aceste defecte având aceeaşi probabilitate de a se produce în orice moment al acestei etape, fără a le putea evita, determină o rată a defectărilor constantă.

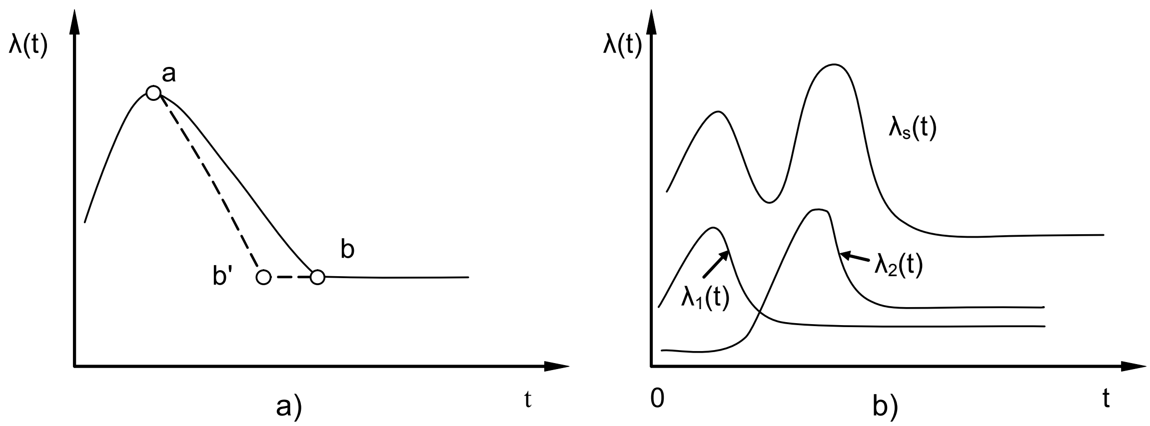

Fig. 3.6. Graficul caracteristicii ratei căderilor pentru perioada defectelor precoce:
a – panta rodajului; b – cazul unui sistem cu mai multe componente

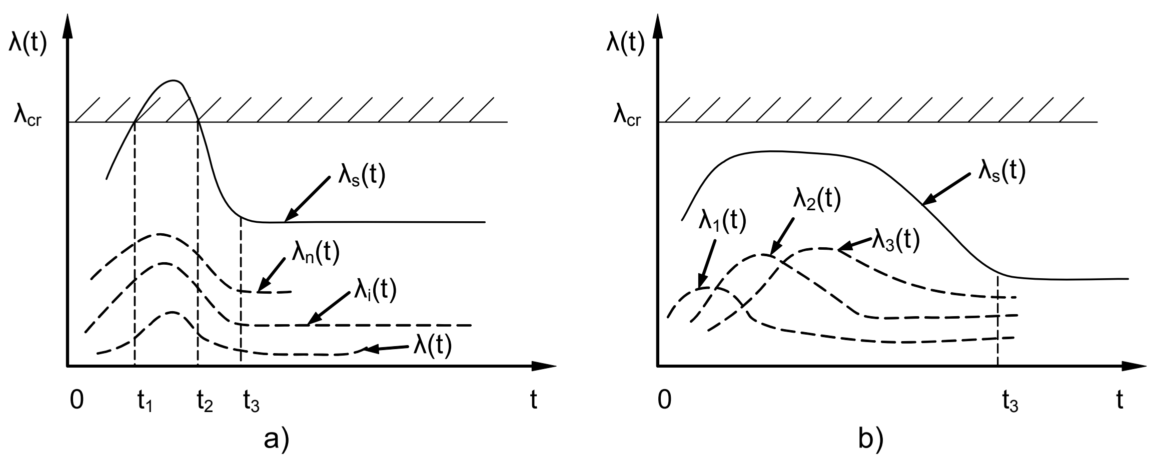

Fig. 3.7. Graficul caracteristicii ratei defectărilor unui sistem în perioada rodajului:
a – sistem cu componente omogene; b –sistem cu componente eterogene

Durata vieții utile este cea mai importantă în funcționarea unui produs şi, în cazul când acesta este cu întreținere, corespunde perioadei celei mai economice de exploatare, fiind cea care caracterizează rata defectării unui produs. Caracteristica $\lambda(t)$ indică şi momentul când înlocuirea unui produs cu altul nou este rațională sau nu (fig. 3.8, a şi b).

Perioada bătrâneții unui produs este acea etapă în care rata căderilor creşte rapid din cauza defectelor de uzură. Etapa poate fi subdivizată (fig. 3.9) în etapa 3' la începutul bătrâneții sau uzurii, când se pot produce atât defecte de uzură cât şi defecte accidentale, şi etapa 3'' în care materialul îmbătrânit are evidente semne de oboseală şi defectele sunt provocate numai de uzură.

Caracteristica ratei căderilor este legată şi de natura sistemului. Pentru sistemele electromecanice perioada maturității reprezintă o suprapunere a perioadei defectelor

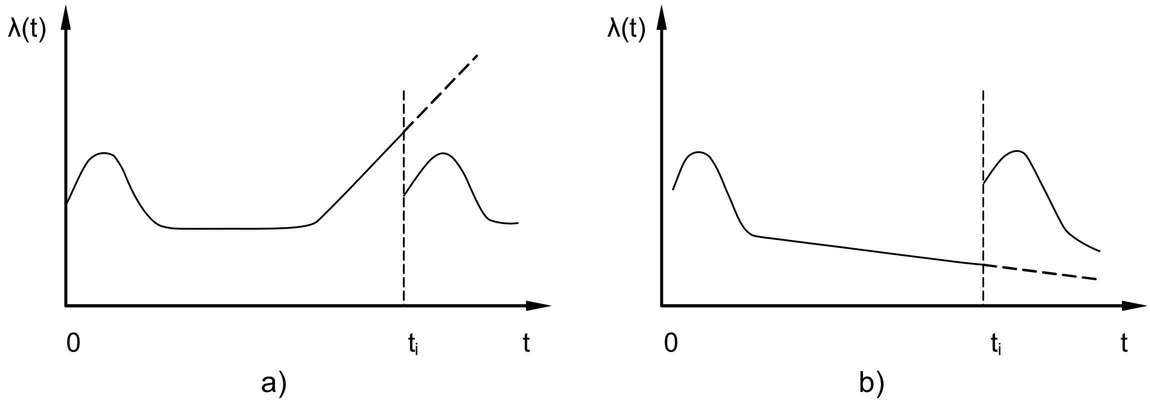

Fig. 3.8. Stabilirea momentului t_i al înlocuirii cu un produs nou:
a – înlocuire rațională; b – înlocuire nerațională

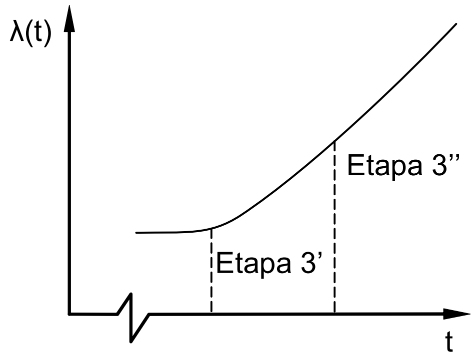

Fig. 3.9. Graficul ratei căderilor în etapa defectelor cauzate de uzură

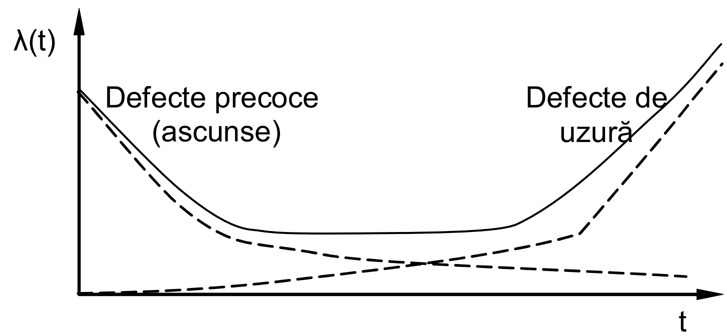

Fig. 3.10. Rata căderilor în cazul unui sistem electromecanic

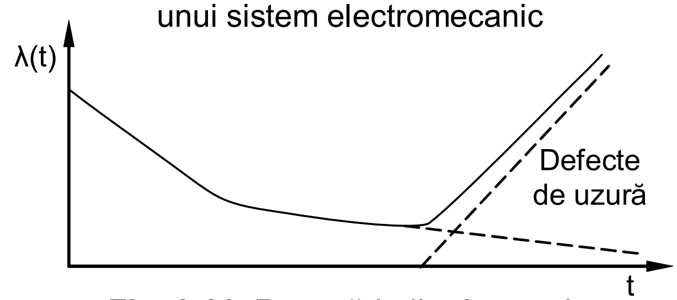

Fig. 3.11. Rata căderilor în cazul unui sistem mecanic

precoce cu aceea a uzurii care se instalează din momentul inițial (fig. 3.10).

La sistemele mecanice etapa a doua a caracteristicii este inexistentă. Defectele precoce scad permanent iar cele de uzură apar mai târziu cu o creştere mai rapidă (fig. 3.11).

3.4. Media timpului de bună funcționare [1, 6, 12, 15, 16, 17, 19, 22, 30]

3.4.1. Definire

Expresia analitică a *timpului de bună funcționare*, MTBF, se poate determina cu relația generală:

$$M(t) = MTBF = \mu = \int_o^\infty t\, f(t)dt\,. \tag{3.23}$$

Înlocuind cu relațiile anterioare se obține:

$$\mu = MTBF = \int_o^\infty (-t\frac{dR}{dt})dt\,. \tag{3.24}$$

Integrând (3.24) prin părți (- dR = du; t = v) rezultă

$$MTBF = -Rt\Big|_o^\infty + \int_o^\infty Rdt = \int_o^\infty Rdt\,. \tag{3.25}$$

În cazul când λ = const.,

$$\mathrm{MTBF} = \int_o^\infty R\,dt = \int_o^\infty e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_o^\infty = \frac{1}{\lambda} \tag{3.26}$$

În acest caz particular se observă legătura dintre MTBF şi rata defectărilor.

În cazul elementelor reparabile MTBF reprezintă durata medie între căderi sau până la prima cădere iar pentru elementele nereparabile reprezintă durata medie până la apariția unui defect.

MTBF este un indicator direct, deoarece mărimea lui este direct proporțională cu gradul de fiabilitate a produsului. Un grad de fiabilitate mai ridicat însemnă un MTBF mai mare şi invers.

Se mai foloseşte şi indicatorul invers al MTBF (k = 1 / MTBF), definit ca frecvența medie a defectărilor pe un interval de observație.

3.4.2. Considerații asupra indicatorului MTBF

Durata medie de viață a unui produs este foarte frecvent utilizată ca parametru de fiabilitate datorită probabil şi semnificației care pare mai uşor de intuit. Această noțiune prezintă aspecte diferite depinzând de faptul dacă produsul respectiv este reparabil sau nu (cu sau fără restabilire).

Se consideră 9 lămpi puse în funcțiune în condiții identice. Prima lampă se arde după un timp t_1, a doua la t_2 ş.a.m.d. conform diagramei căderilor din figura 3.12. Dacă τ_i este timpul care separă două defectări consecutive, atunci timpul dintre defectări notat cu TBF ("time between failures") pe care-l putem denumi şi timpul bunei funcționări va fi definit de valorile $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$. Dacă piesa defectă se înlocuieşte sau se repară, timpul bunei funcționări, TBF, capătă o altă semnificație de durată medie, simbolizată prin MTBF ("mean time between failures") sau media timpului de bună funcționare. Menționăm că atunci când o piesă defectă este înlocuită sau reparată, echipamentul este considerat (cu aproximație) ca nou la fiecare punere în serviciu. În cazul unei populații foarte mari, de exemplu constituită din lămpi cu incandescență, se fac următoarele constatări: dacă lămpile arse nu se înlocuiesc, atunci curba duratei de viață are o repartiție normală N (MTBF, σ^2_o) (fig. 3.13) iar dacă se înlocuiesc pe măsură ce se ard, prima generație de lămpi începe să dispară având aceeaşi medie μ_o = MTBF (fig. 3.14).

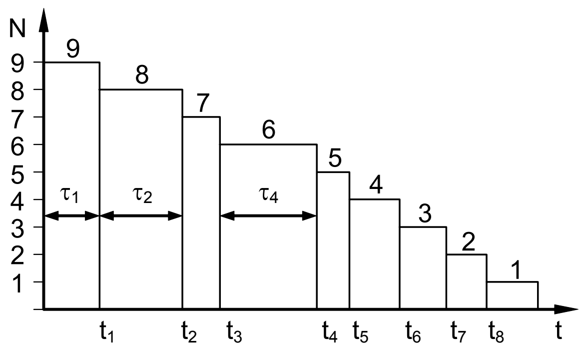

Fig. 3.12. Graficul momentelor defectării lămpilor

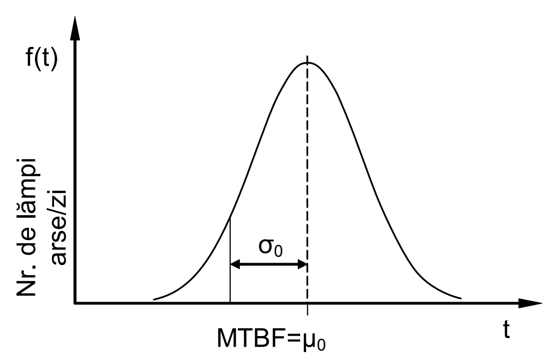

Fig. 3.13. Densitatea de probabilitate la un sistem fără restabilire

Lămpile din a doua generație nu sunt puse simultan în serviciu şi, prin urmare, curba de repartiție a arderilor se obține aplatizată ($\sigma_2 \cong 2\ \sigma_o$) cu un maxim la $\mu = 2\ \mu_o$. În continuare, încep să intre în funcție şi lămpile din a 3-a generație având o curbă de repartiţie şi mai aplatizată ($\sigma_3 \cong 3\ \sigma_o$) cu un maxim la 3 μ_o. Procesul continuă în acelaşi mod şi după un timp $t = n \cdot \mu_0$ practic pentru $t = (4\text{-}5) \cdot \mu_0$ se obţine o stabilizare a frecvenţei căderilor. Rata căderilor lămpilor de vârstă inegală capătă o valoare constantă ($\lambda_3 = 1/\mu$) cauzată numai de uzură. Durata medie, μ, în acest caz va fi egală cu timpul mediu între defectările unei populaţii de amestec.

Rata defectărilor este constantă. Acestea nu sunt defecte pur accidentale, ci din contră sunt numai defecte de uzură. Dacă elementele sunt nereparabile (neînlocuibile), se ia în consideraţie timpul până la defectare TTF (“Time to failure”). Media acestor valori denumită *durată medie de funcţionare* reprezintă o medie a timpului până la prima defectare - MTTF (“mean time to failure”), fiind deci media aritmetică a duratelor de viaţă (de funcţionare).

$$MTTF = \frac{1}{n_o} \sum_{1}^{n_o} t_1 \,. \tag{3.27}$$

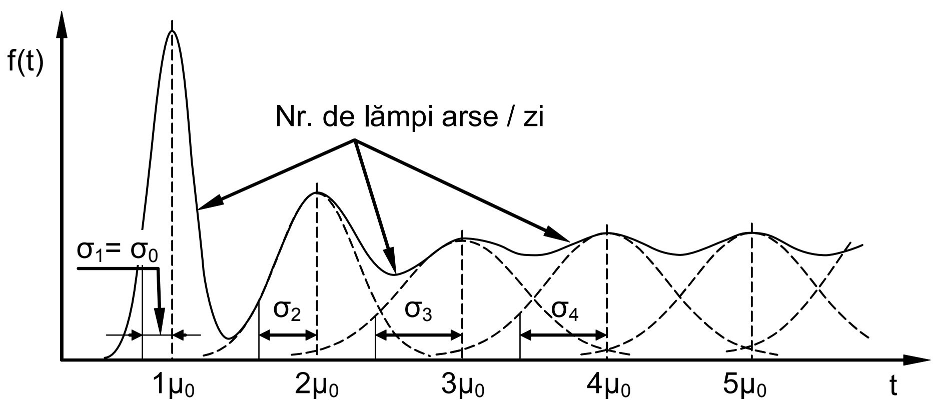

Fig. 3.14. Densitatea de probabilitate a unui sistem cu restabilire

În cazul elementelor reparabile, după înlocuirea tuturor elementelor, MTBF reprezintă exact aceeaşi valoare ca şi “durata medie de funcţionare” până la prima defectare (MTTF). Din acest motiv, MTBF poate fi utilizat atât la elementele reparabile (cu înlocuire) cât şi la cele nereparabile (fără înlocuire) cu semnificaţia mai sus menţionată.

După cum s-a văzut (3.26), media timpului de bună funcţionare pentru λ = const. este egală cu $1/\lambda$. Această valoare, care se referă numai la defectele pur accidentale, poate să depăşească cu mult durata vieţii utile a unui produs. În studiul practic al fiabilităţii se urmăreşte în general să se prevadă probabilitatea de supravieţuire a unei misiuni pe o durată dată. Dacă durata misiunii este egală cu $MTBF = 1/\lambda$, atunci fiabilitatea misiunii este $R(MTFB) = e^{-1} = 0{,}37$. În cazul când durata misiunii t este foarte mică în raport cu MTBF-ul ($t/MTBF \ll 1$), expresia fiabilităţii (3.4) se poate simplifica prin dezvoltarea în serie, neglijând termenii de ordin superior:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \cong 1 - \lambda \cdot t \,. \tag{3.28}$$

Pentru $t = \mu/10$, fiabilitatea este $R = 0{,}9$. Pentru $t = \mu/100$, fiabilitatea este 0,99 şi pentru $t = \mu/1000$, $R = 0{,}999$. Fiabilitatea de 0,999 arată că dintr-o 1000 de produse identice puse în funcţiune în timp de $t = \mu/1000$ ne putem aştepta ca 999 să rămână în stare de funcţionare, iar unul să se defecteze. În acelaşi mod se găsesc pentru fiabilitate valorile: $R = 0{,}9999$ pentru $t = \mu/10000$, $R = 0{,}99999$ pentru $t = \mu/100000$. Aceste rezultate sunt valabile pentru orice produs industrial care se supune legii exponenţiale (fig. 3.15, a), deoarece se poate trasa o curbă de fiabilitate tip, unică pentru toate materialele, luând ca unitate a variabilei aleatoare timpul redus (t/μ) (fig. 3.15, b).

Dacă se urmăreşte ca un element să posede pentru o oră o fiabilitate R = 0,999999, trebuie să aibă MTBF egal cu 1000000 h. Pentru 1000 ore de funcționare acelaşi element ar avea fiabilitatea R = 0,9999. În concluzie, MTBF nu indică decât măsura în care un produs este fiabil pe o perioadă dată de-a lungul vieții utile. Astfel, un element care are MTBF = 100000 ore are o fiabilitate R = 0,999 pentru 100 ore de funcționare.

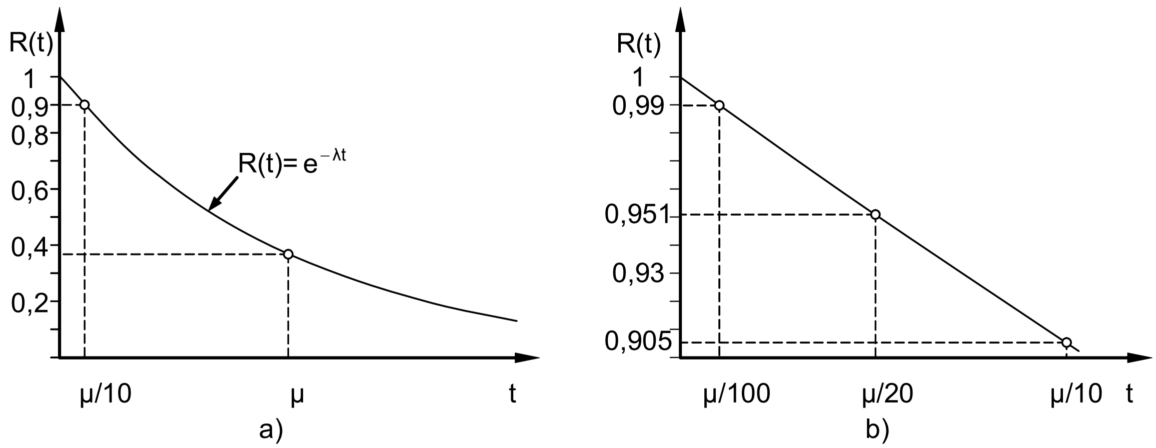

Fig. 3.15. Fiabilitatea corespunzătoare unor submultipli ai MTBF – ului:
a) t > μ/10; b) t є (μ/100, μ/10)