

GEORGE DOBRE

ELEMENTS DE MACHINES

Transmissions mécaniques

2006

Préface

Les transmissions mécaniques de puissance représentent un domaine d'ampleur de l'ingénierie mécanique, par la quantité de composants impliquées, mais aussi par l'importance pratique considérable définie par le nombre très grand des applications industrielles. C'est pourquoi l'étude de cette partie devient très importante dans le processus académique de formation des futurs ingénieurs mécaniciens.

Ce cours est vu comme un prolongement du cours d'éléments de machines proposé antérieurement aux étudiants de la Faculté d'Ingénierie en Langues Etrangères dans le cadre de l'Université POLITEHNICA de Bucarest, la Filière Francophone. Dans cette situation, le cours de transmissions mécaniques ne contient pas des chapitres inclus dans d'autres cours proposés dans le monde académique, mais qui sont abordés dans le cours antécédent d'éléments de machines, par exemple - les arbres et les accouplements. Son objet se limite aux suivants chapitres ;

- la nécessité d'utilisations des transmissions de puissance ;
- les engrenages et les transmissions par roues dentées ;
- les transmissions par courroies.

Les transmissions par chaînes sont regardées moins théoriques, mais plus pratiques, par la sélection pratique pour des applications industrielles en utilisant des catalogues et des standards. C'est pourquoi, le présent cours ne traite pas ce domaine.

Le présent fichier traite seulement les deux premiers chapitres, le troisième sera inclus plus tard.

Le présent cours a la structure d'étude du cours d'éléments de machines : considérations générales, matériaux et procédés technologiques, considérations phénoménologiques, conception, autres recommandations. L'exposé - sans avoir la prétention d'être un traité - est présenté sous la forme des notes de cours enseignées aux étudiants ; ayant les schémas/dessins/figures beaucoup commentés par des textes explicatifs.

Nous remercions beaucoup pour les remarques pertinentes qui pourront contribuer à l'amélioration de l'édition future.

L'auteur

Octobre 2006

Conten

1. TYPES DE TRANSMISSIONS ET LEURS CARACTERISTIQUES	6
<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>	
1.1. DEFINITION	6
1.2. NECESSITE DE L'UTILISATION DES TRANSMISSIONS	6
1.3. TYPES, CLASSIFICATION, PARAMETRES	8
2. ENGRENAGES. TRANSMISSIONS PAR ROUES DENTEES	13
2.1. CONSIDERATIONS GENERALES	13
2.1.1. Définitions de base	13
2.1.2. Classifications	13
2.1.3. Surface primitives et types d'engrenages ordinaires et de roues dentées correspondantes	15
2.1.3.1. Surfaces primitives pour les engrenages cylindriques extérieurs	15
2.1.3.2. Surfaces primitives pour autres types d'engrenages	16
2.1.4. Forme des roues dentées	21
2.1.5. Éléments de la denture	21
2.1.6. Particularités de base des types d'engrenages	25
2.1.7. Avantages, désavantages, domaines d'utilisation	27
2.2. ENGRENAGES PARALLELES	29
2.2.1. Géométrie des engrenages	29
2.2.1.1. Lois géométrique de base de l'engrènement plan frontal	29
2.2.1.2. Développante de cercle	33
2.2.1.2.1. Définition	33
2.2.1.2.2. Équations de la développante de cercle	35
2.2.1.2.3. Propriétés de la développante de cercle	35
2.2.1.2.4. Aspects pratiques	37
2.2.1.3. Hélicoïde développable	38
2.2.1.4. Engrènement frontal en développante du cercle et ses propriétés	40
2.2.1.5. Engrènement d'une paire de dents inclinées (ou hélicoïdales)	43
2.2.1.6. Crémaillère. Crémaillère de référence. Crémaillère génératrice	44
2.2.1.6.1. Mode d'obtention de la crémaillère. Éléments primitifs de l'engrenage à crémaillère	44
2.2.1.6.2. Crémaillère de référence. Crémaillère génératrice	45
2.2.1.6.3. Éléments géométriques des crémaillères	47
2.2.1.7. Roues dentées générées par la crémaillère génératrice	49
2.2.1.7.1. Éléments primitives. Génération d'une dent	49
2.2.1.7.2. Déport de la denture	50
2.2.1.7.3. Forme de la denture engendrée par la crémaillère génératrice	52
2.2.1.7.4. Éléments géométriques de la roue dentée	53
2.2.1.7.5. Roue équivalente	56
2.2.1.8. Éléments géométriques de l'engrenage	58

2.2.1.8.1. Éléments géométriques de base	58
2.2.1.8.2. Rapport de conduite	62
2.2.1.9. Encadrement géométriques dans les limites d'engendrement et d'engrènement	65
2.2.1.9.1. Critères	65
2.2.1.9.2. Evitement de l'interférence de taillage.....	65
2.2.1.9.3. Evitement de l'aiguisement de la dent.....	68
2.2.1.9.4. Evitement de l'interférence en fonctionnement	68
2.2.1.9.5. Existence du jeu à la tête	70
2.2.1.9.5. Existence du rapport de conduit frontal minimal	70
2.2.1.10. Modification de la denture.....	70
2.2.1.10.1. Modalités de modification de la denture	70
2.2.1.10.2. Modification de la denture par le déport de profil	71
2.2.1.10.3. Modification des paramètres de référence de la crémaillère génératrice.....	73
2.2.1.10.4. Modification de la forme de la crémaillère génératrice.....	76
2.2.2. Modes et causes de détérioration de la denture	79
2.2.2.1. Introduction. Modes de détérioration de la denture	79
2.2.2.2. Rupture de la dent	81
2.2.2.2.1. Introduction	81
2.2.2.2.2. Rupture par fatigue de la dent	81
2.2.2.2.3. Rupture statique de la dent	85
2.2.2.3. Usure par piquûres (piquage, pitting).....	86
2.2.2.4. Usure de contact avec le stade limite de grippage.....	90
2.2.2.5. Observation sur la portance relative des engrenage à plusieurs modes de destruction	92
2.2.3. Matériaux de roues dentées.....	93
2.2.4. Forces d'engrenage	94
2.2.4.1. Chargement, chargement nominale	94
2.2.4.2. Facteur d'application (d'utilisation).....	96
2.2.4.2.1. Définition.....	96
2.2.4.2.2. Valeurs recommandées pour le facteur d'application	96
2.2.4.2.3. Collectif de chargement.....	97
2.2.4.3. Facteur dynamique (interne).....	102
2.2.4.4. Facteurs de la répartition frontale de la charge	103
2.2.4.5. Facteurs de la répartition longitudinale de la charge	104
2.2.4.6. Forces nominales dans les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale	105
2.2.4.6.1. Déduction 1.....	105
2.2.4.6.2. Déduction 2.....	108
2.2.5. Calcul de la résistance de la denture	109
2.2.5.1. Tension de contact sur flancs	109
2.2.5.2. Tension au pied de la dent.....	114
2.2.5.3. Tensions limites	119
2.2.5.3.1. Tensions limites à la fatigue des flancs.....	119
2.2.5.3.2. Tension limite à la fatigue par flexion du pied de la dent	121
2.2.6. Méthodologie de conception des engrenages cylindriques	122
2.2.6.1. Etapes	122
2.2.6.2. Données de conception	123

2.2.6.3. Dimensionnement des engrenages cylindriques	124
2.2.6.3.1. Introduction	124
2.2.6.3.2. Etape 1 : calcul de l'entraxe de fonctionnement minimal	125
2.2.6.3.3. Etape 2: calcul du module normal minimal nécessaire	128
2.2.6.3.4. Etape 3 : établissement des nombres de dents	131
2.2.6.3.5. Etape 4 : établissement du module normal final	132
2.2.6.3.6. Etape 5 : établissement des coefficients de déport du profil	133
2.2.6.4. Vérification du trempé du matériau	134
2.3. TRANSMISSIONS PAR ROUES DENTEES.....	135
2.3.1. Introduction.....	135
2.3.2. Transmissions ordinaires par roues dentées	136
2.3.3. Transmissions planétaires par roues dentées	143
2.3.3.1. Introduction. Degré de mobilité	143
2.3.3.2. Rapport de transmission du transmission planétaire proprement dit	144

1. TYPES DE TRANSMISSIONS ET LEURS CARACTERISTIQUES

1.1. Définition

La liaison entre les arbres du moteur M et de la machine de travail MT peut se faire :

1. **directement**, par des accouplements (fig. 1.1, a) ;
2. ou **indirectement** par transmissions (fig. 1.1, b).

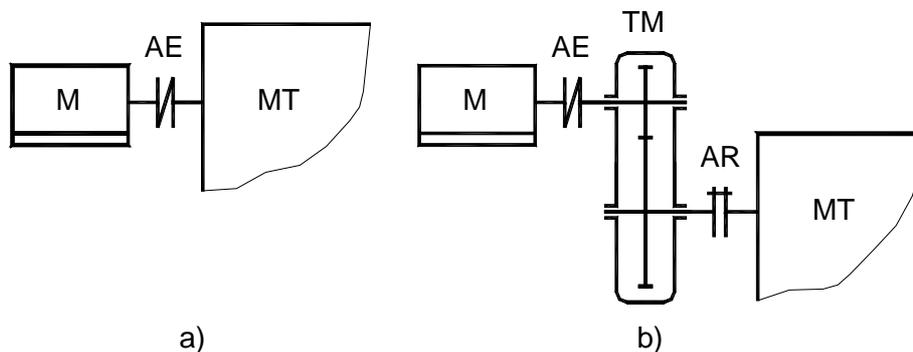


Fig. 1.1. Transmission du mouvement du moteur M à la machine de travail MT

- a) Directement, par un accouplement; b) indirectement, par une transmission mécanique

TM – transmission mécanique (ici un réducteur par roues dentées) ; AR - accouplement rigide; AE - accouplement élastique.

L'accouplement ne modifie pas, en général, les vitesses et les efforts (les moments de torsion)¹; la transmission modifie ces grandeurs comme grandeur, direction et sens.

1.2. Nécessité de l'utilisation des transmissions

La présence d'une transmission est imposée par de nombreux facteurs. Ces facteurs sont discutés en continuation, pour le cas le plus représentatif dans technique, quand les deux systèmes techniques liés sont une machine moteur et une machine de travail.

Il est fréquent que les vitesses nécessaires au fonctionnement des organes d'exécution des machines soient différentes de celles de moteurs normalisés.

¹ L'accouplement angulaire fait exception de cette règle (se voir le chapitre "Accouplements")

Souvent, la vitesse de l'organe d'exécution doit être modifiée (réglée) et même inversée; la réalisation directe de cette opération par le moteur est peu économique ou même impossible.

Il y a des périodes dans les fonctionnement d'une machine lorsque sa commande impose des moments de torsion supérieurs à celui (ou à ceux) fourni (fournies) par l'arbre du moteur.

Il arrive qu'un seul moteur doive entraîner plusieurs mécanismes animés de vitesses différentes.

Les moteurs normalisés courants sont animés d'un mouvement de rotation uniforme; or, il arrive souvent que les mouvements des organes d'exécution des machines doivent être rectiligne et s'effectuer à des vitesses variables ou même à arrêts périodiques.

Parfois pour des raisons sécurité, de commodité d'entretien ou d'encombrement imposés par la machine il serait impossible de réaliser une liaison directe de l'arbre d'un moteur à l'organe d'exécution.

La réalisation directement par moteur des demandes différentes de mouvement de la machine de travail n'est pas économique et même impossible. Quelques-unes des considérations antérieures peuvent être mieux comprises si on analyse les caractéristiques mécaniques représentées sur les fig. 1.2 et 1.3. La caractéristique mécanique d'une machine (moteur ou machine d'exécution) est la variation du couple (moteur, résistant) en fonction d'un paramètre cinématique caractéristique, qui est les plus souvent le nombre de tours (la vitesse); analytiquement, lui expression peut être écrit sous la forme de $M_t = M_t(\omega)$ ou $M_t = M_t(n)$, ou inversement $\omega = \omega(M_t)$ ou $n = n(M_t)$, M_t étant le moment de torsion, n - le nombre des tours, ω - la vitesse angulaire.

On voit que les machines d'exécution ont des caractéristiques mécaniques totalement différentes, par exemple:

1. les moments résistants de torsion apparaissent aux rotations réduites des machines outils (fig. 1.2, a) ;
2. contrairement, des grands tours des pompes centrifuges ou des turbocompresseurs (fig. 1.2, b).

Mais un moteur électrique est projeté pour qu'il fonctionne d'une façon optimal en régime nominal (c'est-à-dire au couple nominal M_{tn} et à la vitesse angulaire ω_n (fig. 1.3, a) ¹. Un moteur à combustion interne peut travailler

¹ Le fonctionnement sur la branche instable peut conduire à l'arrêt du moteur, puisque le moment moteur se peut réduit sous la valeur maximale M_{tmax} (fig. 1.3, a) à l'augmentation de la résistance qui détermine la diminution de la vitesse.

dans un champ plus large de nombre de tours, mais optimalement il doit travailler dans la zone de puissance maximale P_{\max} (fig. 1.3, b) ¹.

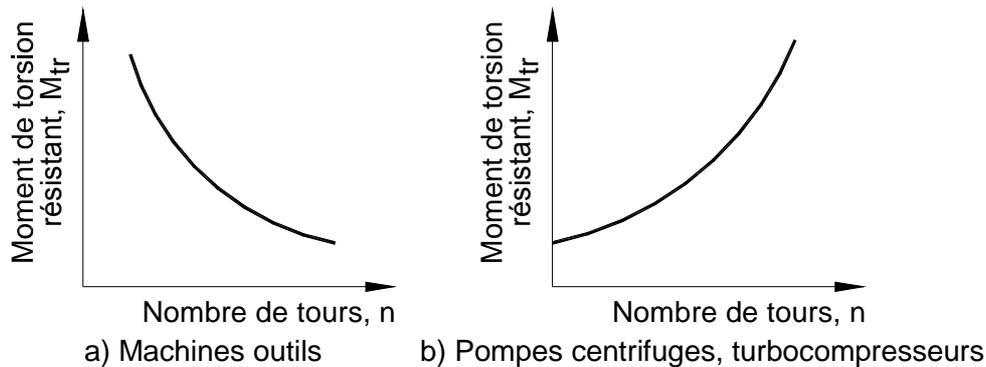


Fig. 1.2. Formes de caractéristiques mécaniques des machines d'exécution

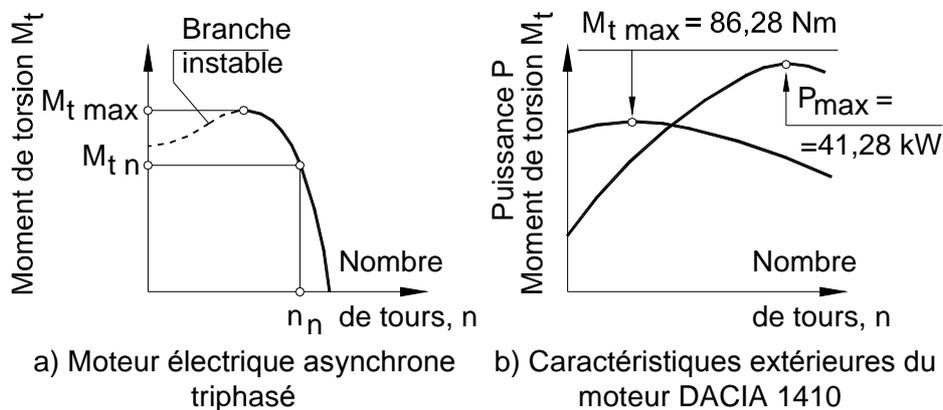


Fig. 1.3. Formes de caractéristiques mécaniques des machines motrices

Il en résulte l'impossibilité que les moteurs assurent les paramètres fonctionnels quantitatifs (moment, tours) constants ou variables ou même de sens inverse. Il en résulte aussi la nécessité d'utiliser des transmissions pour ces buts.

1.3. Types, classification, paramètres

En technique, les plus utilisées transmissions sont celles mécaniques, qui emploient des corps solides. Mais la construction mécanique utilise encore des transmissions **électrique, hydrauliques, pneumatiques**.

¹ Les caractéristiques extérieures s'obtiennent expérimentalement au stand d'essai, la clapette d'accélération étant complètement ouverte et les réglages étant optimaux pour obtenir l'entière puissance (la variation du nombre de tours est obtenue par la modification du freinage)

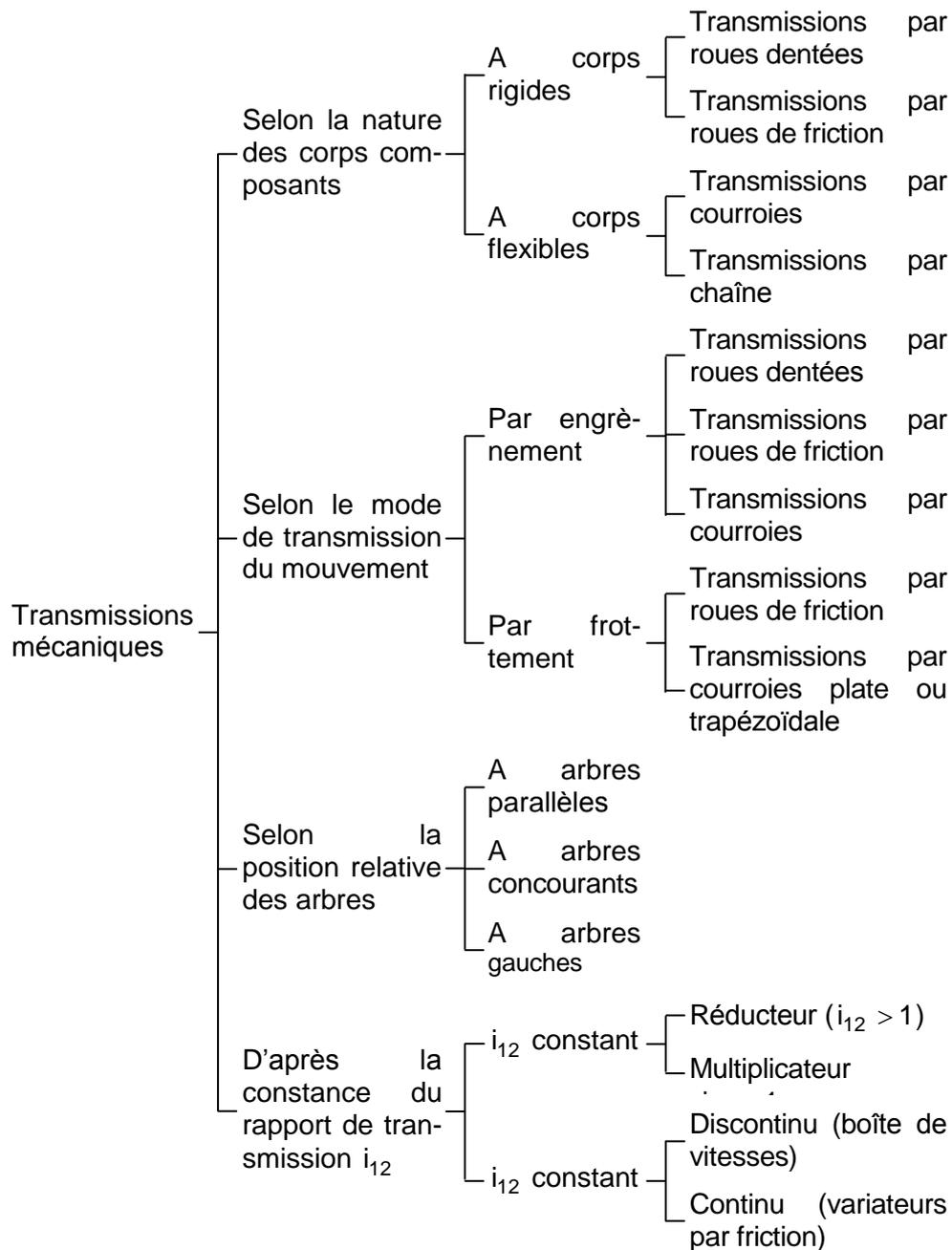


Fig. 1.4. Classification des transmissions mécaniques

L'objectif du cours d'éléments de machines est l'étude des transmissions mécaniques ayant mouvements circulaires uniformes. Les transmissions mécaniques d'autres types et les autres transmissions sont examinées dans des cours spéciaux.

Une **classification des transmissions mécaniques** est donnée dans le schéma de la fig. 1.4. Cette classification sera mieux comprise en analysant chaque élément.

Le rapport de transmission est défini par le rapport direct des vitesses de l'arbre menant et mené:

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (1.1)$$

ou : $n_{1(2)}$ est le nombre de tours de l'arbre menant (mené) ; $\omega_{1(2)}$ - la vitesse angulaire de l'arbre menant (mené).

Si on propose de réaliser le projet d'une transmission à rapport de transmission constant, on dispose généralement au moins **des données (paramètres)** suivantes:

1. la puissance à transmettre, P , ou le moment de torsion, M_{t2} , à l'arbre mené;
2. le nombre de tours de l'arbres mené, n_2 , et menant n_1 (en tr/min) ou une de ces vitesses et le rapport de transmission;

la position relative des arbres et, éventuellement, leur entraxe;

3. conditions du service de la transmission, qui sont définies par les fonctions de temps : $M_t = M_t(t)$ et $n = n(t)$.

Par exemple, le chargement variable en temps est caractéristique à chacun système technique. Il est relevé par **le diagramme de fonctionnement du système**. Un exemple de tel diagramme avec une variation aléatoire prononcée est donné sur la fig. 1.5, a. Cette forme de variation est caractéristique pour un grand nombre de systèmes techniques, par exemple les systèmes de transport (avions, automobiles, locomotives, wagons de chemin de fer). Ce diagramme peut être assimilé pour les calculs de résistance à fatigue ou de durabilité par la séquence de chargement caractéristique pour de conditions de fonctionnement données (la séquence donnée sur la fig. 1.4, b est en marches). Cette séquence se répète d'un nombre k de fois sur la durée de vie du produit. On dit que la séquence de chargement répétable caractérise suffisamment d'exacte le chargement variable aléatoire du produit sous l'aspect de la sollicitation et de la durée de vie. Comme résultat, la considération des aspects de calcul basés sur la séquence caractéristique de chargement détermine l'obtention des dimensions plus réduites des pièces sollicitées variablement ¹.

¹ On ne discute pas ici la modalité de passage du diagramme de fonctionnement à la séquence caractéristique. La problématique est extrêmement complexe. Elle est spécifique au calcul modern de la résistance de matériaux (Buzdugan, 1980).

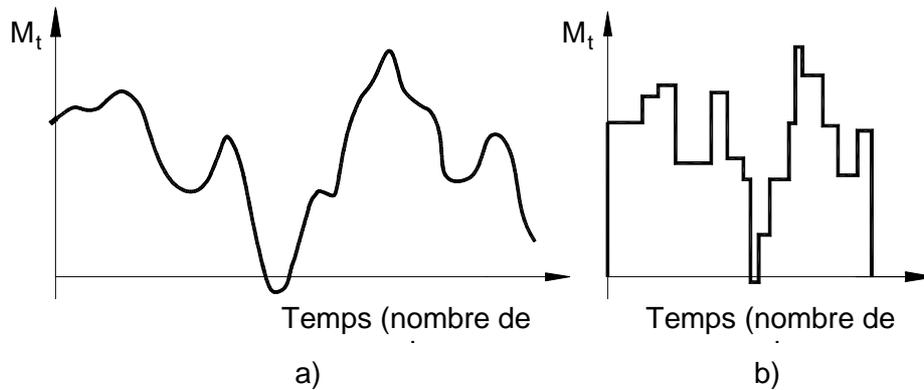


Fig. 1.5. Exemple du part du diagramme de fonctionnement d'un système (a) et le séquence de chargement (b)

Il y a de nouveaux paramètres pour **les transmissions à vitesses variables (variateurs de vitesse)**. Quand la variation de la vitesse est continue, le rapport des limites de vitesses de l'élément à vitesse variable (noté par 2 dans notre discussion) est appelé **gamme de réglage**:

$$G = \frac{n_{2 \max}}{n_{2 \min}} \quad (1.2)$$

Tableau 1.1. Caractéristiques principales des transmissions de différents types résultées de suivantes données de conception: $P = 74 \text{ kW}$; $i_{12} = 4$ (Dobrovolski, 1971)

Transmission	Entraxe, a [mm]	Largeur de la roue dentée ou de la poulie, b [mm]	Vitesse périphérique adoptée [m/s]	Poids (approximatif) [N]
Courroie plate	5000	350	23,6	5000
Courroie plate à galet tendeur	2300	250	23,6	5500
Courroie trapézoïdale	1800	130	23,6	5000
Chaîne	830	360	7	5000
Transmission par engrenage cylindrique	280	160	5,85	6000
Transmissions par engrenage à vis	280	60	5,85	4500

En général, le projet d'établissement une transmission pour données de conception présente plusieurs solutions. C'est-à-dire les conditions

imposées permettent d'établir des transmissions de types variés. Les variantes éventuelles doivent être comparées pour apprécier leur rendement, poids, encombrement ², frais d'exécution et d'exploitation, et pour en choisir la plus avantageuse. La littérature technique donne certaines considérations d'ordre général et surtout basées sur l'expérience accumulée dans le domaine des transmissions ce qui permet d'ébaucher les domaines et les limites d'application préférentielle des transmissions de types variés.

Un exemple des caractéristiques principales des différentes transmissions obtenues pour un set de données de conception est indiqué sur le tableau 1.1. On voit que les transmissions par engrenages ont le gabarit le plus réduit par rapport aux autres types de transmissions mécaniques.

² L'encombrement des transmissions est "caractérisé par l'entraxe "a" ainsi que par la largeur "b" des poulies et de roues, se voir le tableau 1.1.

2. ENGRENAGES. TRANSMISSIONS PAR ROUES DENTEES

2.1. Considérations générales

2.1.1. Définitions de base

L'**engrenage** est la transmission constituée par deux roues dentées conjuguées, mobiles autour de deux axes de rotation qui ont des positions relatives invariables; les roues dentées transmettent les mouvements de l'une à l'autre par engrènement (fig. 2.1 donne une image 3D qui indique les axes de rotation par lignes continues).

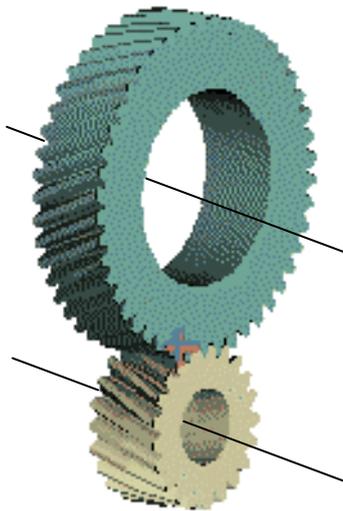


Fig. 2.1. Image 3D d'un engrenage (cylindrique)

La **roue dentée** est un élément de machine prévu avec des dents disposées régulièrement par rapport à une surface théorique caractéristique de la roue, en général de révolution (surface primitive) ou une autre surface.

La **roue dentée conjuguée** est chacune des deux roues qui peuvent constituer un engrenage par rapport à sa paire, dans l'acception que l'engrenage ainsi constitué assure une certaine loi d'engrènement (plus tard on présentera la loi de base de l'engrènement plan frontal)¹⁾.

Les dents sont les proéminences des roues, séparées par des espaces qui s'appellent des entredents. La totalité des dents et des entredents forme la denture de la roue dentée.

L'**engrènement** représente le processus de contact entre les dents de la roue dentée.

2.1.2. Classifications

On présente sur la fig. 2.2 le schéma d'une classification restreinte (seulement à certains points de vue) **des engrenages à rapport de transmission constant** (celles à rapport de transmission variable ont une utilisation extrêmement restreinte) **et avec un entraxe constant**. Les points de vue de classification considérés sont très représentatifs :

- a) la position relative des roues dentées ;

- b) la position relative des surfaces caractéristiques ;
- c) la possibilité des mouvements relatifs des axes de roues dentées.

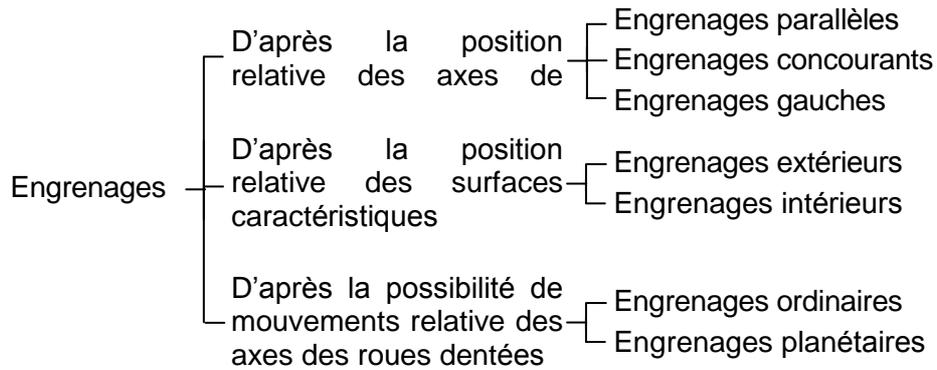


Fig. 2.2. Classification générale des engrenages

Une présentation plus large de ces types d'engrenages d'après les premiers deux types de point de vue sera faire après la définition des surfaces primitives. Le troisième point de vue de classification sera discutée plus tard (le sous-chapitre 2.3).

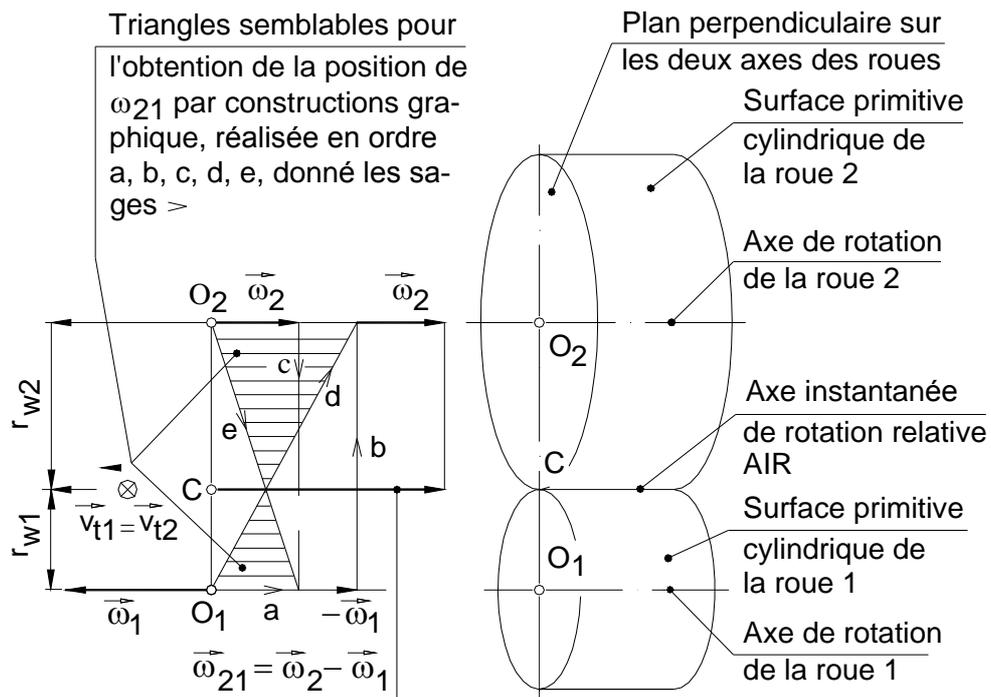


Fig. 2.3. Obtention de l'axe instantané de rotation et des surfaces primitives cylindriques à l'engrenage parallèle extérieur

2.1.3. Surface primitives et types d'engrenages ordinaires et de roues dentées correspondantes

2.1.3.1. Surfaces primitives pour les engrenages cylindriques extérieurs

On fait une discussion analytique seulement sur surfaces primitives de **engrenages cylindriques extérieurs**. Pour les autres types d'engrenages nous voulons présenter seulement les formes des surfaces primitives.

Soit deux axes parallèles que nous voulons relier par des roues dentées de telle sorte que leurs vitesses angulaires $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ soient de sens contraires (fig. 2.3). Nous voulons démontrer que dans ce cas il existe deux surfaces cylindriques qui roulent sans glissement l'une sur l'autre.

Considérons pour cela le mouvement relatif de la roue future 2 par rapport à la roue future 1 (nous avons utilisé le terme "futur" puisque les roues ne sont pas définies encore). Ce mouvement résulte de la composition des deux rotations:

- a) $\bar{\omega}_2$ et $-\bar{\omega}_1$ à la roue 2, ce qui donne la résultante (vitesse angulaire relative de la roue 2 par rapport à la roue 1):

$$\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1; \quad (2.1)$$

- b) $\bar{\omega}_1$ et $-\bar{\omega}_1$ à la roue 1, qui devient évidemment fixe.

Trouvons la position de la vitesse angulaire relative de la roue 2 par rapport à la roue 1, $\bar{\omega}_{21}$. On voit que l'expression (2.1) conduit à la composition des vecteurs $\bar{\omega}_2$ et $-\bar{\omega}_1$. On sait du cours de "Mécanique" que la position de la résultante de ces vecteurs est donnée par l'expression:

$$\omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2}, \quad (2.2)$$

où r_{w1} et r_{w2} sont les bras correspondants de $\bar{\omega}_{21}$ par rapport aux directions des vecteurs $\bar{\omega}_2$ et, respectivement, $-\bar{\omega}_1$. La fig. 2.3 montre la construction graphique de l'expression (2.2) par des triangles semblables. Il en résulte le vecteur $\bar{\omega}_{21}$.

Chaque point sur l'axe de $\bar{\omega}_{21}$ (par exemple, C) a une vitesse relative nulle perpendiculaire sur cet axe. Vraiment, les vitesses absolues de ce point sont des vecteurs perpendiculaires sur la ligne des centres des roues, O_1O_2 , donc ces vecteurs ont la même direction; leurs grandeurs sont:

$$\begin{aligned} v_{t1} &= \omega_1 r_{w1}; \\ v_{t2} &= \omega_2 r_{w2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mais l'expression (2.2) montre que ces deux vitesses sont égales :

$$\begin{aligned}V_{t1} &= V_{t2}; \\ \vec{V}_{t1} &= \vec{V}_{t2}.\end{aligned}$$

D'où on obtient la vitesse tangentielle relative nulle :

$$\vec{V}_{t21} = \vec{V}_{t2} - \vec{V}_{t1} = 0. \quad (2.4)$$

Voilà pourquoi les lieux géométriques produits par la rotation de l'axe de $\vec{\omega}_{21}$ par rapport à chaque axe de $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ sont deux cylindres de rayons r_{w1} et r_{w2} , qui roulent sans glissement l'un sur l'autre sur l'axe de $\vec{\omega}_{21}$. Cet axe porte le nom **d'axe instantané de rotation relative** (AIR sur la fig. 2.3) et les cylindres sont dénommés des **surfaces primitives**.

Il en résulte aussi le rapport de transmission en fonction des éléments géométriques, si on utilise (2.2):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \quad (2.4)$$

2.1.3.2. Surfaces primitives pour autres types d'engrenages

Vue générale. Les surfaces primitives (de roulement) pour différents types d'engrenages peuvent être définies conformément de la discussion antérieure. Elles sont représentées sur la fig. 2.4 pour les suivantes engrenages:

1. parallèle cylindrique extérieur (fig. 2.4, a) et intérieur (fig. 2.4, b);
2. concurrent conique extérieur (fig. 2.4, c);
3. gauche (théorique) (fig. 2.4, d).

Sur la fig. 2.4 non été pas représentés aussi les surfaces primitives dans le cas de l'engrenage concurrent conique intérieur qui est moins utilisé dans la pratique industrielle.

En ce qui concerne l'engrenage hyperboloïdal extérieur – qui a été représenté en projection sur la fig. 2.4, d - on fait de suivantes observations :

1. l'axe instantané de rotation relative AIR se trouve (comme on a été démontré antérieurement) entre les axes de rotation des roues dentées composants, ayant par rapport à eux des angles différentes qui sont définies par le rapport de transmission ;
2. l'engrenage hyperboloïdal ne s'utilise pas en pratique à cause de deux raisons de base :
 - difficultés technologiques de taillage des dentures sur une surface hyperboloïdale ;
 - dans le cas du cet engrenage apparait une vitesse de glissement \vec{V}_{21} le long de AIR.

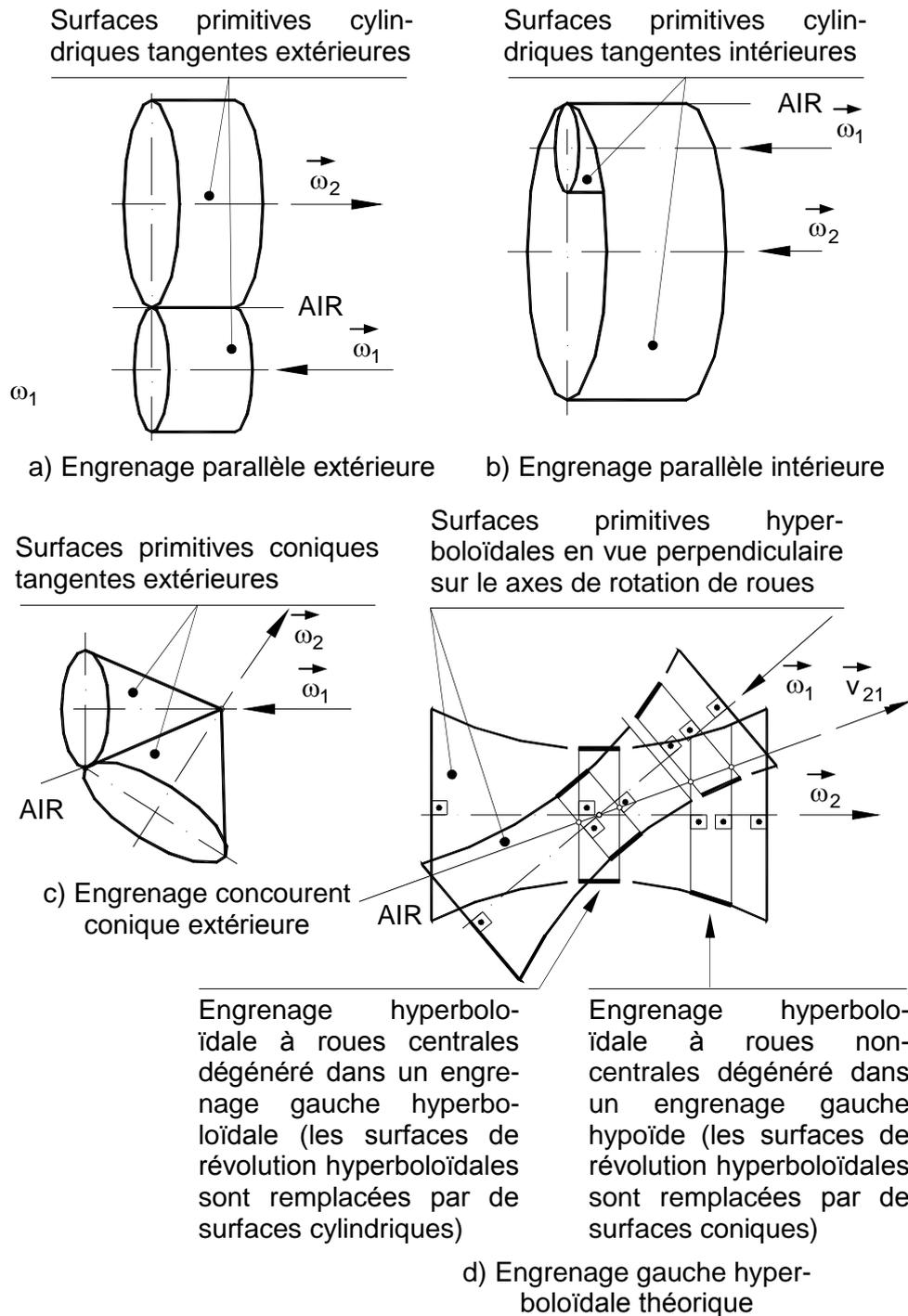


Fig. 2.4. Surfaces primitives et types d'engrenages correspondants

AIR - axe instantané de rotation relative

Mais - comme on va voir plus tard - ce glissement apparait et est accepté comme existence dans le cas des autres types d'engrenages très utilisés: les engrenages hypoïdes et les engrenages à vis. Le glissement n'apparaît pas aux engrenages parallèles. C'est pourquoi ces dernières engrenages ont le plus grand rendement et sont les plus utilisés.

Surfaces primitives ou de références pour des engrenages obtenues par la dégénération de l'engrenage hyperboloïdal théorique. Parce que l'engrenage hyperboloïdal définit antérieurement (fig. 2.4, d) est seulement technique (il n'est pas utilisé dans la technique dans cette forme), il se remplace en pratique par des engrenages qui ont des surfaces primitives obtenues par la dégénération des surfaces primitives hyperboloïdales :

1. des roues centrales ; les surfaces hyperboloïdales se remplacent par des surfaces primitives cylindriques ;
2. des roues non centrales : les surfaces hyperboloïdales se remplacent par des surfaces primitives coniques.

Les **engrenages dégénérés de l'engrenage hyperboloïdal** sont représentés sur la fig. 2.5. Le premier engrenage dégénéré à roues centrales est **l'engrenage gauche cylindrique hélicoïdal** (ou plus simple, **l'engrenage hélicoïdal**, fig. 2.5, a). Il est un engrenage gauche cylindrique (à dents inclinées ou hélicoïdales ¹; la définition de ce type de denture sera faite plus tard). Ses surfaces primitives sont cylindriques, elles étant tangentes dans un seul point. A cause de sa tangence désavantageuse des deux surfaces primitives, qui se transmet similairement vers le contact des dents, l'engrenage hélicoïdal a une portance réduite.

Le deuxième type d'engrenage dégénéré avec roues centrales est **l'engrenage gauche cylindrique orthogonal** (fig. 2.5, b). Comme l'engrenage hélicoïdal, cet engrenage a aussi une portance réduite et il n'est pas utilisé dans la technique. L'engrenage a une denture hélicoïdale et la suivante particularité spécifique: une roue dentée a le diamètre très petit par rapport à l'autre. Comme résultat, on peut obtenir à ce diamètre petit un angle d'inclinaison (primitive) qui assure l'autofreinage entre les dents, donc l'engrenage travaille comme un frein (on évite ainsi l'utilisation d'un frein supplémentaire dans le système).

Parce que l'engrenage gauche orthogonal (fig. 2.5, b) a une portance réduite, on a cherché la modification de ses surfaces primitives cylindriques. Dans cette idée, la surface primitive de la roue grande est dégénérée dans une surface toroïdale, qui embrasse la surface cylindrique de la roue petite dans la section axiale de cette roue (fig. 2.5, c). On obtient ainsi

¹ Le terme « hélicoïdal » est lié du type des dents : hélicoïdales. Ce terme est utilisé traditionnellement dans la littérature, mais il est impropre, parce qu'il existe aussi des autres engrenages à dents inclinées ou hélicoïdales.

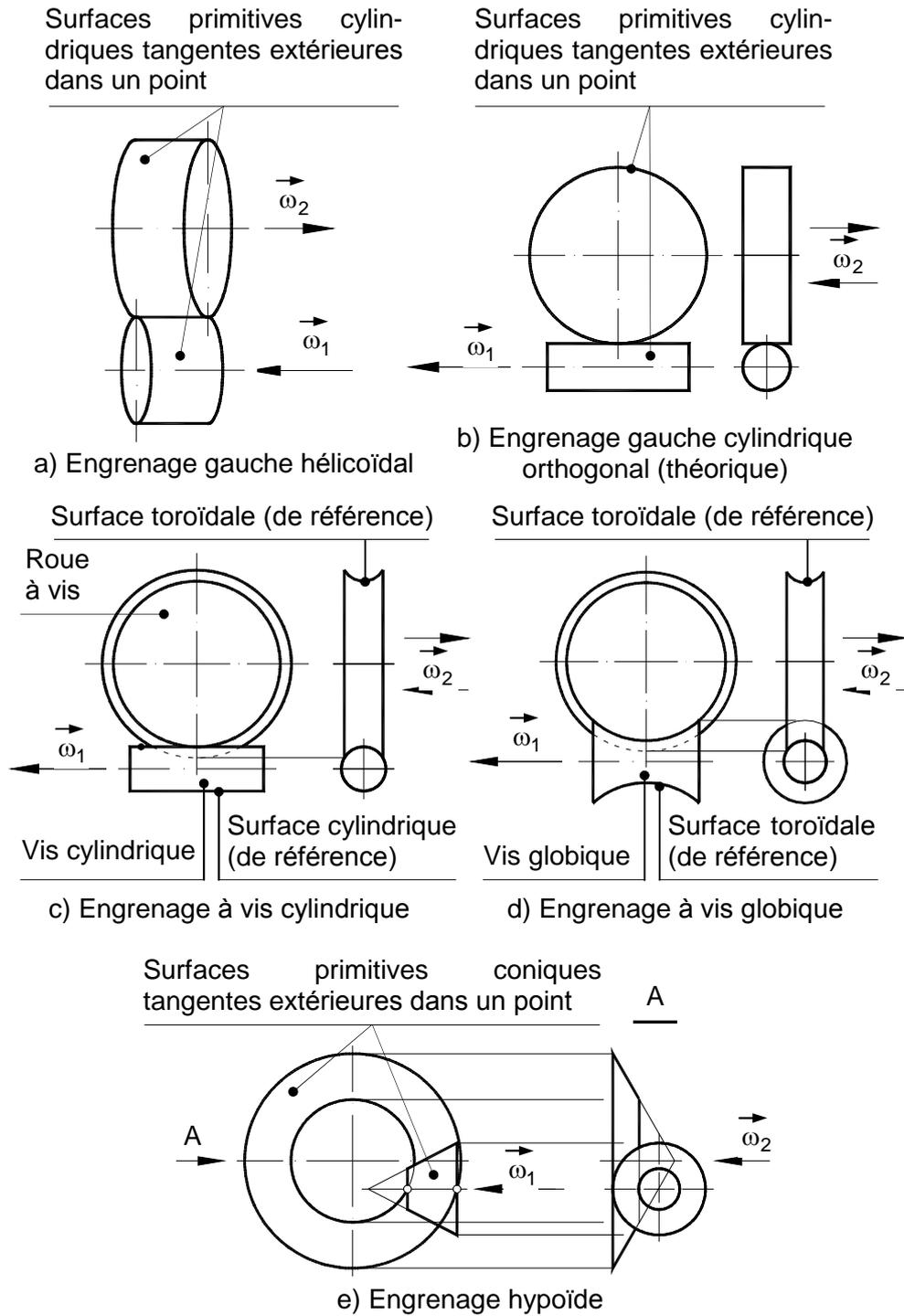


Fig. 2.5. Surfaces primitives ou de références pour des engrenages dégénérés de l'engrenage gauche hyperboloïdal

l'engrenage à vis cylindrique, auquel on ne peut pas définir les surfaces primitives conformément à leur définition, mais seulement des *surfaces de références* ou *caractéristiques* :

- a) surface cylindrique de la roue petite qui est appelée *vis cylindrique* ;
- b) surface toroïdale de la roue grande qui est appelée *roue à vis*.

On a dit que l'engrenage à vis cylindrique a des dents hélicoïdales. C'est pourquoi le sens de rotation de la roue à vis peut être différent au même sens de rotation de la vis (fig. 2.5, c), en fonction de sens d'inclinaison de la denture.

On peut faire l'augmentation de la portance de l'engrenage à vis par application d'une mesure supplémentaire (fig. 2.5, d) : la surface de référence cylindrique du vis cylindrique peut être remplacée par une surface de référence toroïdale, qui embrasse l'autre surface de référence toroïdale de la roue à vis, dans la section axiale de la vis. On obtient ainsi *l'engrenage à vis globique*.

On discute maintenant *l'engrenage gauche conique*. Les surfaces hyperboloïdales des roues non centrales de l'engrenage hyperboloïdal théorique sont dégénérées dans des surfaces primitives coniques (fig. 2.4, d). En pratique on utilise *l'engrenage gauche conique orthogonal*, qui est appelé *engrenage hypoïde* (fig. 15/5, e).

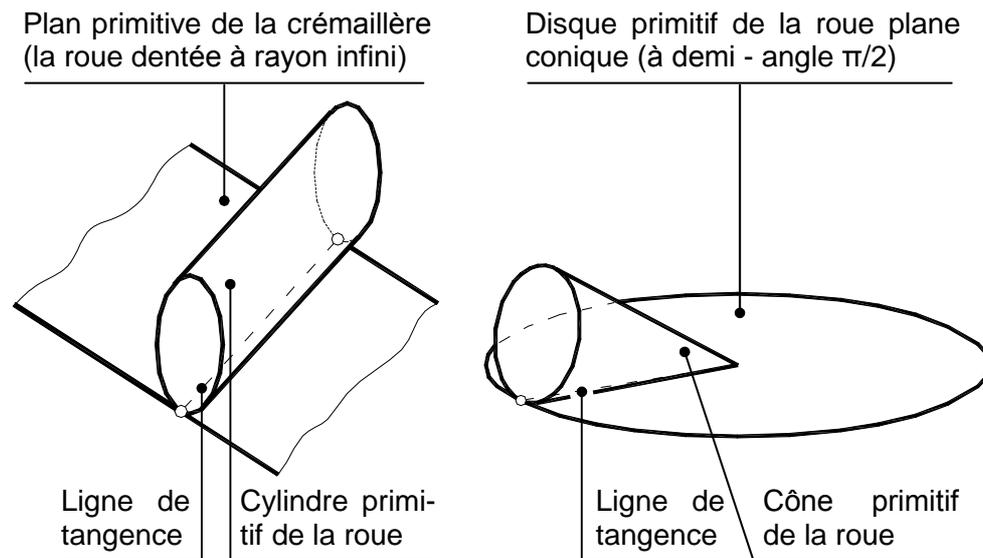


Fig. 2.6. Surfaces primitives pour des engrenages dégénérés obtenues de l'engrenage parallèle cylindrique (a) et concurrent conique (b)

Surfaces primitives des engrenages obtenues par la dégénération de l'engrenage parallèle cylindrique ou concurrent

conique. On sait que les engrenages cylindriques à l'engrènement extérieur ou intérieur ont des surfaces primitives cylindriques (fig. 2.4, a et b). Quand un des cylindres primitifs a le rayon infini, il se transforme en plan primitive (fig. 2.6, a). On obtient ainsi *l'engrenage cylindrique à crémaillère*.

Ainsi on sait que les engrenages concourants coniques ont des surfaces primitives coniques (fig. 2.4, c). Si l'angle à vif de l'une des surfaces devient égale à $\pi/2$, elle se transforme dans un disque (plan) primitif (fig. 2.6, b). On obtient ainsi *l'engrenage conique à roue plane*.

2.1.4. Forme des roues dentées

La forme des roues dentées est définie en général par la forme des surfaces primitives spécifiques à l'engrenage dont elles font partie. Ainsi il existe :

1. roues cylindriques - à l'engrenage parallèle cylindrique (fig. 2.4, a) ou à l'engrenage gauche hélicoïdal (fig. 2.5, a) ;
2. roues conique – à l'engrenage concourant conique (fig. 2.4, b) ou à l'engrenage hypoïde (gauche pseudo conique) (fig. 2.5, e) ;
3. roue plane – à l'engrenage conique à roue plane (fig. 2.6, b).

Dans les autres cas, les dénominations des roues dentées sont spécifiques, elles n'étant liées de la forme de la surface de référence (caractéristique) :

1. à l'engrenage à vis :
 - a) vis cylindrique (fig. 2.5, c) ;
 - b) vis globique (fig. 2.5, d) ;
 - c) roue à vis (fig. 2.5, c et d) ;
2. à l'engrenage cylindrique à crémaillère : la crémaillère (fig. 2.6, a) .

2.1.5. Éléments de la denture

Quelques éléments de la denture sont représentés dans la fig. 2.7. À cause de la simplicité de l'exposition et de compréhension, ces éléments sont représentés à une roue cylindrique.

Les dents sont limitées par les surfaces de la tête et du pied. **La surface de la tête** est celle (cylindrique et coaxiale de la surface primitive à la roue cylindrique) qui contient les bouts des dents.

La surface du pied est celle (cylindrique et coaxiale à la surface primitive de la roue cylindrique) qui contient les fonds des entredents.

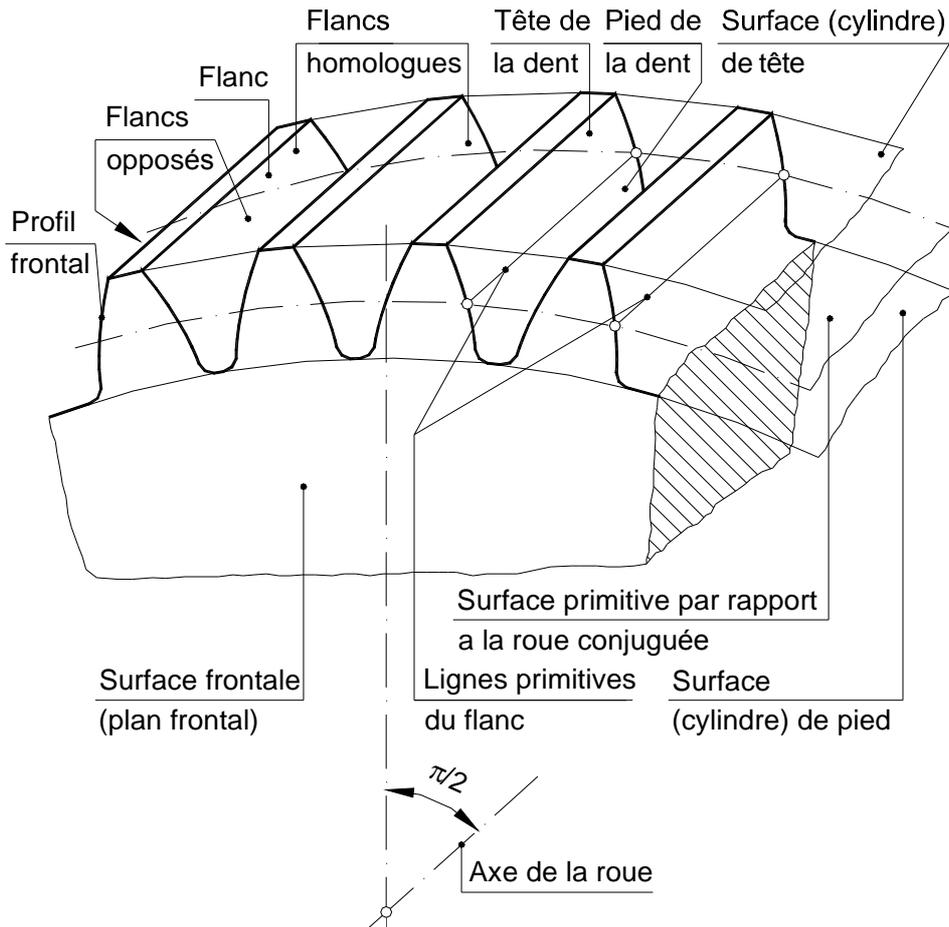


Fig. 2.7. *Éléments généraux de la denture marqués sur une roue cylindrique*

Les dénominations correspondantes de la roue cylindrique sont données entre parenthèses

La tête de la dent est la portion de la dent renfermée entre la surface de la tête et celle primitive.

Le pied de la dent est la portion de la dent renfermée entre la surface du pied et celle primitive.

Les flancs sont les surfaces latérales le long de la dent renfermées entre la surface de la tête et celle du pied, sur lesquelles on réalise le contact des dents de roues conjuguées. La transmission du mouvement vers un sens de rotation se réalise par les **flancs homologues**, qui se superposent l'un à l'autre à leur rotation autour à l'axe de la roue; pour l'autre sens de rotation il existe une autre paire de flancs homologues.

La ligne du flanc sur une surface caractéristique de la roue est l'intersection du flanc avec cette surface. La ligne du flanc porte la dénomination de la surface qui croise le flanc. Par exemple, **la ligne primitive du flanc** est l'intersection du flanc avec la surface primitive de la roue.

La forme de la ligne du flanc détermine la forme longitudinale de la dent. Analysons cet aspect utilisant les exemples de la forme de la ligne primitive du flanc données par la fig. 2.8. L'analyse est généralisable pour la ligne du flanc sur quelque surface caractéristique.

On distingue:

1. **les dents droites** (fig. 2.8, a, b), si la ligne (primitive) du flanc coïncide avec la génératrice de la surface (primitive) sur laquelle se trouve cette ligne;
2. **les dents inclinées** ou **hélicoïdales** (fig. 2.8, c, d), si la ligne (primitive) du flanc est l'hélice de la surface (primitive) sur laquelle se trouve cette ligne (primitive);
3. **les dents courbes** (fig. 2.8, f), si la ligne du flanc est différente de génératrice ou d'hélice de la surface sur laquelle se trouve cette ligne.

On remarque aussi l'existence d'une **denture cylindrique en V**, composée par deux dents inclinées ayant des inclinaisons différentes (fig. 2.8, e). Cette denture élimine la force axiale sur l'arbre qui apparaît à la denture inclinée simple (l'aspect sera compris aisément à l'étude des forces dans le sous-chapitre dédié).

La fig. 2.8 permet aussi la définition des surfaces différentes de celles caractéristiques de la roue (comme est celle primitive):

1. **la surface frontale**, qui est orthogonale sur les génératrices de la surface primitive. Elle est :
 - a) un plan dans le cas de la roue cylindrique (fig. 2.8, a) ;
 - b) une sphère dans celui de la roue conique (fig. 2.8, b);
2. **la surface normale**, qui est orthogonale (dans un point courant) sur la ligne (primitive) du flanc. Elle est :
 - a) un plan dans le cas de dents droites et hélicoïdales de la roue cylindrique (fig. 2.8, a, c);
 - b) une sphère dans celui des dents droites (fig. 2.8, b) et un plan dans celui des dents hélicoïdales (fig. 2.4, d) ou courbes à la roue conique (pour ce dernier cas) ;
3. **la surface axiale** qui est la surface (un plan) qui contient l'axe de la roue (cette surface n'est pas représentée dans la fig. 2.8, parce que la compréhension de sa signification est très facile).

Surface plane ou sphérique: a) frontale (normale à la génératrice);

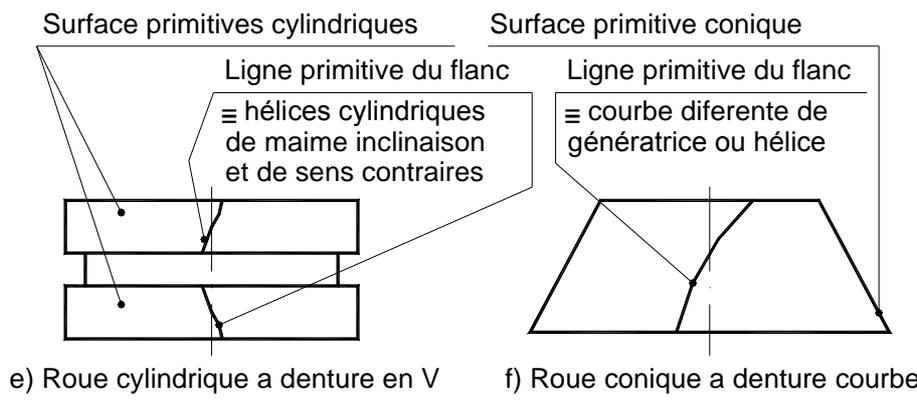
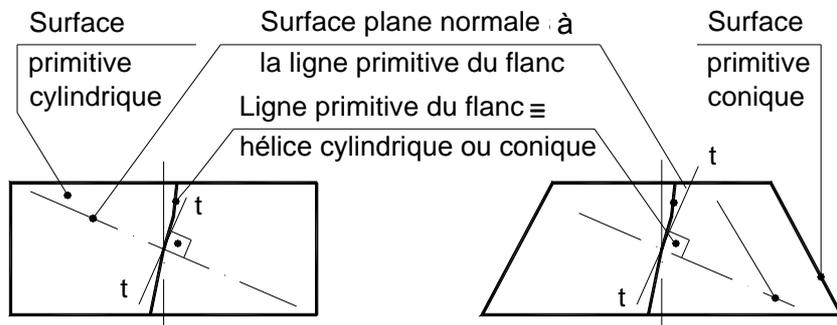
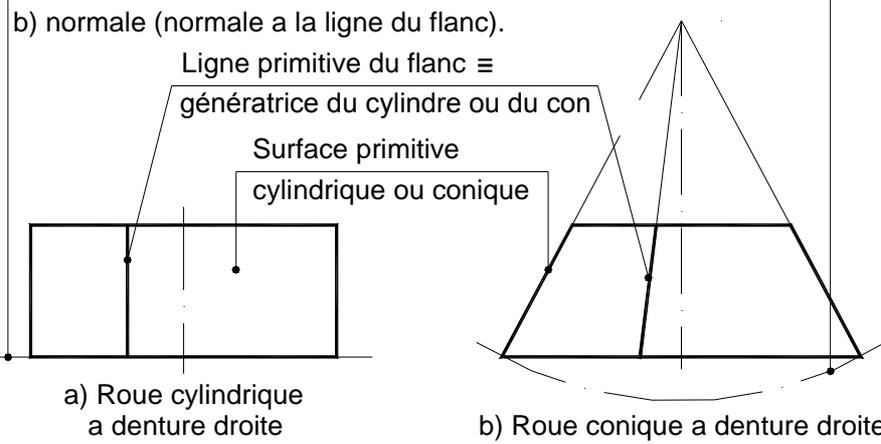


Fig. 2.8. Formes des lignes primitives du flanc

Observations: 1. sur les figures est tracée seulement une seule ligne du flanc; 2. les surfaces frontales sont représentées seulement sur les figures a et b; 3. t-t – tangente à l'hélice.

Le **profil** de la dent est l'intersection du flanc avec une surface frontale, normale, axiale, d'où il résulte le **profil frontal** (fig. 2.7), et respectivement, **normal** ou **axial** (se voir la fig. 2.3 où est représenté le profil frontal). Les plus utilisées profils dans la théorie des engrènement sont ceux frontal et normal.

D'autres considérations sur la terminologie des engrenages seront présentées ultérieurement.

2.1.6. Particularités de base des types d'engrenages

Sur la fig. 2.9 est donnée une classification synthèse de principaux types d'engrenages utilisés en pratique en tenant compte de la classification antérieure des engrenages (fig. 2.1). On constate la mention à cette occasion des types de dentures associés pour les engrenages précisés.

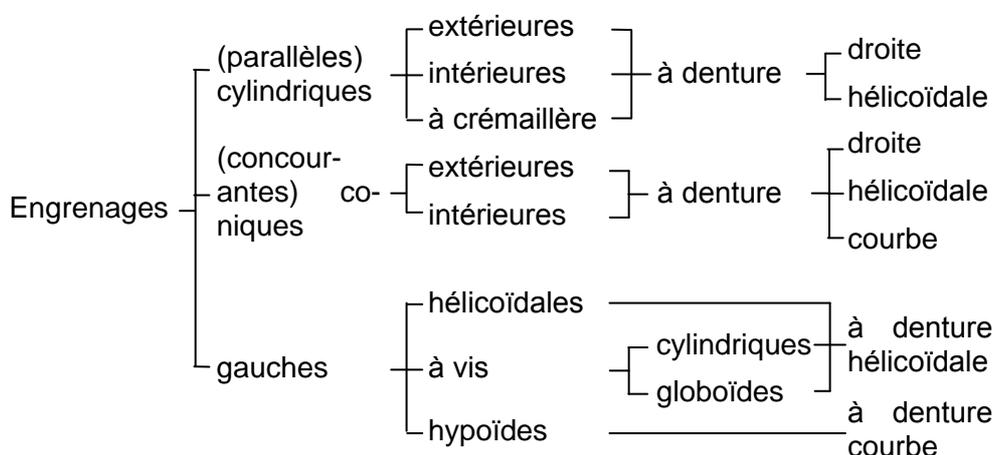


Fig. 2.9. Dénominations des principaux types des engrenages utilisés en pratique, d'après la classification de la fig. 2.1

Les engrenages parallèles ont une utilisation extrêmement large par comparaison aux autres engrenages. Mais ils ont le rapport maximal de transmission de 6...8 (10), pour éviter les disproportions entre les deux roues. Les engrenages cylindriques à dentures hélicoïdale ont deux roues à sens d'inclinaison différente ; elles sont très utilisés par rapport aux engrenages à denture droite, parce qu'elles apportent des avantages multiple (portance plus grand, comportement dynamique plus bonne etc.), sans difficultés technologiques supplémentaires. Ces avantages apparaissent en principal à cause de l'existence d'une engrènement plus favorable entre les paires de dents (un nombre agrandi de lignes de contact entre les paires de dents et de leurs longueurs plus grand à un moment, de telle sorte que des positions plus favorable des lignes de contact sur flanc). Comme résultat, les avantages principaux des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale sont :

1. portance relative plus grand aux même matériaux et éléments géométriques de base ;
2. une rigidité plus grand et une variation plus réduite de lui pendant l'engrènement, ce qui détermine vibrations réduites (la deuxième cause d'agrandissement de la portance et, dans le même temps, de la fiabilité) ; l'aspect est nécessaire notamment aux nombres de tours plus grands.

Les engrenages concourants coniques ont des types différents de dentures selon la forme de la ligne primitive du flanc, du profil frontal et de l'hauteur de la denture. Les dentures coniques droites et hélicoïdales (se voir aussi la fig. 2.8, b, d) sont le plus souvent octoïdales selon la forme du profil déterminé par roues plates conjuguées, qui ont des flancs plans; les engrenages correspondants (octoïdales) sont plus sensibles aux défauts d'exécution et de montage et s'obtiennent par des procédés technologiques de productivité très réduite (l'exécution dent à dent). Les dentures coniques courbes (se voir aussi la fig. 2.8, f) permettent par leur forme des avantages relatifs:

1. un contact plus grand entre dents et moins influencé par les erreurs technologiques, ce qui conduit à un gabarit plus restreint de l'engrenage;
2. l'exécution par les procédés technologiques de grand productivité (par usinage continu) ; comme résultat, ces engrenages sont recommandés pour séries grands de fabrication, cas qui conduit à une prix de coût plus réduit.

Les engrenage gauche cylindrique ou **hélicoïal** (fig. 2.5, a) ont un contact ponctuel entre les dents hélicoïdales, de sorte que la puissance transmise est moins importante (quelques kilowatts tout au plus). C'est pourquoi ces engrenages sont moins répandus par rapport aux autres engrenages et ils sont utilisés plutôt cinématiquement.

Les engrenage hypoïde (se voir aussi la fig. 2.5, e) ont toujours une denture courbe, ce qui permet la transmission d'un chargement important (à plusieurs dizaines de kilowatts). On signale ici un avantage très important de ce type d'engrenage: la possibilité d'appuyer l'arbre de chaque roue sur des paliers placés des deux parties de roue (une chose impossible à réaliser aux engrenages concourants extérieurs). Dans ce cas les déformations des arbres sont diminuées (les déformations des arbres montés en console sont au contraire plus grandes). En outre, l'emplacement des paliers dans l'appropriation des roues conduit à une rigidité augmentée de l'ensemble ; on obtient ainsi un fonctionnement de l'engrenage à vibrations réduites et, respectivement, une portance et fiabilité augmentés des causes dynamiques. On connaît l'utilisation de cet engrenage dans les transmissions des ponts

arrière des automobiles, de telle sorte que dans certaines machines textiles (pour transmettre la rotation d'un arbre à plusieurs fuseaux).

Lorsque le rapport de transmission est important et le chargement est considérable (de l'ordre des plusieurs dizaines et centaines de kilowatts) on recourt aux **engrenages à vis** (se voir aussi les fig. 2.5, c, d). Parmi les avantages que les engrenages à vis présentent il y a :

1. un rapport de transmission important pour un encombrement relativement réduit de l'engrenage. Des rapports de transmission de 1 à 200 sont considérés comme normaux. Il existe également des rapports de transmissions très élevés, de l'ordre de 500 à 1000, qui s'emploient pour les transmissions de faible puissance; la raison est le décroissement du rendement avec l'augmentation du rapport de transmission (le rendement est d'environ 0,75 à une rapport de transmission de 100) ;
2. comme un engrenage à filet, il peut assurer l'autofreinage. Par conséquent il peut être utilisé comme frein aux systèmes de levage des charges, dans l'absence d'un frein comme system distinct.

Parmi les désavantages de ce type d'engrenage on compte:

1. les rendements faibles (et par conséquent les pertes de puissances importantes) déterminés par la glissement des dents d'après les tangents du filet à la vis;
2. la nécessité d'employer des bronzes de haute qualité (très chers) pour la fabrication de la roue à vis, pour réaliser une combinaison avec l'acier trompé de la vis d'un couple de matériaux d'antifricion.

On mentionne que l'engrenage à vis globique (fig. 2.5, d) est plus portant que l'engrenage à vis cylindrique, puisque on produit un embrassement réciproque des dentures conjuguées. Mais la technologie d'exécution de la vis globique est plus difficile et chère ; c'est pourquoi ces engrenages s'utilisent économiquement aux séries grandes de fabrication, pour réduire le prix de coût/l'unité de transmission.

2.1.7. Avantages, désavantages, domaines d'utilisation

Les avantages des engrenages par rapport aux autres transmissions mécaniques sont les suivantes:

1. Ils assurent une portance très grande ; donc on peut obtenir des gabarits restreints à la même charge ou on peut transmettre des charges très grandes ayant le même gabarit.
2. On réalise à la majorité des engrenages des rendements très grands (exception: les engrenages gauches). Par exemple, le rendement des engrenages parallèles est autour de 0,99 au graissage à l'huile. Par

différence, aux engrenages à vis le rendement peut être autour de 0,75 dans les mêmes conditions de graissage.

3. On assure le rapport de transmission constante, c'est-à-dire qu'on élimine le glissement élastique et le patinage spécifique aux autres transmissions. Par conséquent, les engrenages s'utilisent dans les liens de précision cinématiques (de mesure, de division aux machines-outils).
4. Les durabilités des engrenages sont très grandes pour certains matériaux, aussi les traitements thermiques et précisions d'exécution. La fiabilité normale est également est très grande (la fiabilité normale est de 0,99) par rapport aux autres éléments de machines mis aux sollicitations variables (aux paliers à roulement, cette fiabilité normale est plus petite, de 0,9).
5. L'exploitation et l'entretien en sont simples, par conséquent les engrenages ne nécessitent pas une surveillance permanente.

Comme **désavantages** on mentionne:

1. Le prix de coût est très élevé à cause de la technologie spécialisée d'exécution.
2. Les vibrations et le bruit sont importants, surtout aux roues métalliques. C'est pourquoi ces engrenages nécessitent des mesures pour la protection vibro-acoustique, qui détermine aussi l'agrandissement du prix de coût.
3. Les engrenages ne représentent pas des éléments d'assurance dans les liens de transmission dans le sens d'éviter la rupture d'un élément aux surcharges (se voir les transmissions par courroie, à friction).

Les avantages sont pourtant essentielles, de sorte que les engrenages sont utilisés dans la technique dans **les diverses domaines** (depuis les montres jusqu'aux grands turbogénérateurs), dans **un large champ de dimensions** (celle de diamètres des roues qui peuvent avoir des fractions de millimètre et aller jusqu'à dix mètres) et **de pouvoirs** (des plus petits nécessaires à vaincre les frottements jusqu'aux des pouvoirs énormes de dizaines de milliers de kilowatts).

Il en résulte que l'étude des engrenages est très utile à la pratique industrielle. C'est pourquoi nous les ferons plus loin plus largement en étudiant les engrenages parallèles, dans le cadre restreint de nos cours. Par conséquent, jusqu'à la présentation de ces sujets nous mentionnerons quelques particularités de base pour chaque type d'engrenage.

2.2. Engrenages parallèles

2.2.1. Géométrie des engrenages

2.2.1.1. Lois géométrique de base de l'engrènement plan frontal

On met le problème d'établissement de la *loi de base de l'engrènement*. Cette loi définit la géométrie qui doit être remplie par les profils des dents des deux roues, de telle sorte que l'engrènement réalise des conditions imposées. On analyse cet aspect dans le cas de l'engrènement plan frontal (qui se développe dans le plan frontal des engrenages parallèles cylindriques). Les conclusions établies pour cet engrènement pourront être utilisées pour des autres types de surfaces frontales (celles sphériques aux engrenages concourantes coniques, qui ne sont pas discutées dans notre cours).

Les conditions d'engrènement qui doivent être accomplies sont souvent :

1. *la condition géométrique* : que l'engrènement soit continu ;
2. *la condition cinématique* : que l'engrènement ait un rapport de transmission constant.

Les hypothèses d'établissement par calcul de cette loi sont :

1. l'engrènement n'a pas d'erreurs technologiques;
2. les roues et les dents sont non déformables.

La loi sera établie pour l'engrenage parallèle extérieur. La fig. 2.10 définit la section frontale d'un pareil engrenage, où sont représentés seulement deux profils frontaux en contact dans le point courant K. On constate que les vitesses linéaires du point K qui appartient aux deux profils sont différentes:

$$\vec{v}_{K1} \neq \vec{v}_{K2} . \quad (2.5)$$

Mais, pour que la première condition de l'engrènement (de continuité) se réalise, les projections normales sur la normale commune n-n de ces vitesses doivent être égales:

$$\vec{v}_{K1}^n \equiv \vec{v}_{K2}^n . \quad (2.6)$$

Vraiment, si $\vec{v}_{K1}^n > \vec{v}_{K2}^n$, la dent 1 pénétrerait dans la dent 2, fait impossible dans le cas de corps solides. Inversement, si $\vec{v}_{K1}^n < \vec{v}_{K2}^n$, les deux dents ne seraient plus en contact (en engrènement).

L'expression (2.6) peut être écrite scalairement par des transformations successives dans les formes (fig. 2.10):

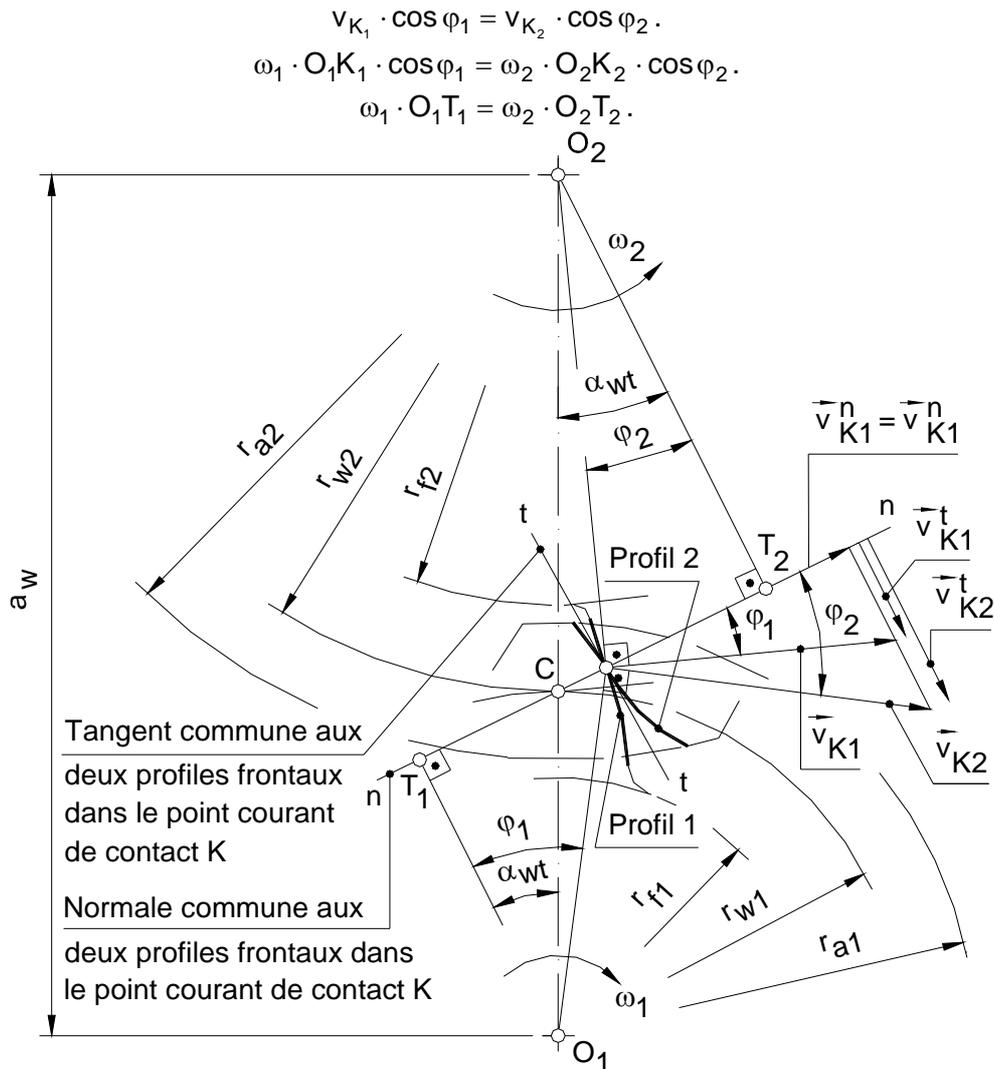


Fig. 2.10. Représentations d'un engrenage parallèle cylindrique extérieur dans sa section frontale, pour établir la loi de base de l'engrènement plan frontale

K – point courant de contact des profils frontaux 1 et 2, qui appartiennent aux roues 1 et, respectivement, 2; $\vec{v}_{K1}, \vec{v}_{K2}$ - vitesses linières courantes du point de contact à chaque roue; $\vec{v}_{K1}^n, \vec{v}_{K2}^n, \vec{v}_{K1}^t, \vec{v}_{K2}^t$ - composants normales (n) et, respectivement, tangentiels (t) des vitesses linières courantes du point de contact à chaque roue; $r_{a1}, r_{a2}, r_{f1}, r_{f2}$ - rayons de tête (a) et, respectivement, de pied (f) des deux roues dentées; r_{w1}, r_{w2} - rayons primitives des deux roues dentées; a_w – entraxe de fonctionnement; α_{wt} - angle de pression de fonctionnement frontal.

De la dernière expression résulte même le rapport de transmission, en considérant que la roue menant est 1 :

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2T_2}{O_1T_1}. \quad (2.7)$$

La normale n-n croise la ligne des centres des roues O_1O_2 dans le point C. On obtient les triangles semblables ΔO_1T_1C et ΔO_2T_2C . Par la suite la nouvelle valeur du rapport de transmission sera:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2T_2}{O_1T_1} = \frac{O_2C}{O_1C}. \quad (2.8)$$

Dans ce moment on impose la deuxième condition cinématique d'engrènement : le rapport de transmission doit être constant :

$$i_{12} = \frac{O_2C}{O_1C} = \text{ct.} \quad (2.9)$$

L'entraxe de fonctionnement est constant :

$$a_w = O_1C + O_2C = \text{ct.} \quad (2.10)$$

Pour accomplir cette constance, le pont C qui se trouve sur la ligne de centres O_1O_2 doit être le même (ou fixe), indifféremment de la position d'engrènement.

On peut énoncer **la lois géométrique de base de l'engrènement plan frontal** aux engrenages parallèles: l'engrènement s'effectue continuellement et à un rapport de transmission constant si les profils frontaux ont une telle forme de telle sorte que leur normale commune dans chacun point de contact croise la ligne des centres des roues dans le même point fixe (immobile) dénommé la pôle de l'engrènement.

Comme nous l'avons mentionné antérieurement (sous chapitre 2.1.1), on dit que les roues, les dentures, les flancs et les profils (frontaux) qui satisfont une loi d'engrènement sont **conjugués**.

Observation 1. On démontre facilement que le point C partage la ligne de centres O_1O_2 dans les rayons primitifs des deux roues dentées. On utilise pour démonstration la fig. 2.1. On voit que les vitesses linéaires du point C à chaque roue, \vec{v}_{C1} et \vec{v}_{C2} , sont perpendiculaires sur la même droite O_1O_2 (sur laquelle on superpose les rayons vectoriels du point C, r_{C1} și r_{C2}). Pour remplir le demande d'égalité $\vec{v}_{C1}^n \equiv \vec{v}_{C2}^n$ des composants normales des deux vitesses est nécessaire que ces vitesses linaires coïncident, $\vec{v}_{C1} \equiv \vec{v}_{C2}$. Comme résultat on peut écrire :

$$v_{C1} = \omega_1 \cdot O_1C = v_{C2} = \omega_2 \cdot O_2C.$$

D'ici il en résulte que les segments divisés par le point C sur la ligne de centres O_1O_2 sont juste les rayons primitifs des roues :

$$\begin{aligned} r_{w1} &= O_1C; \\ r_{w2} &= O_2C. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aussi comme résultat, les composants tangentiels des deux vitesses dans le point C sont identiques, $\vec{v}_{C1}^t \equiv \vec{v}_{C2}^t$. Il en résulte que la vitesse relative tangentielle de glissement du profil 2 par rapport au profil 1 devient nulle en C : $\vec{v}_{C12(21)}^t = \vec{v}_{C2(1)}^t - \vec{v}_{C1(2)}^t = 0$. Ça signifie que le point C est situé sur l'axe instantané de rotation relative en plan frontal, d'où la dénomination de **centre instantané de rotation relative**. Dans la théorie de l'engrènement on utilise aussi couramment la dénomination de **pôle de l'engrènement** pour le point C.

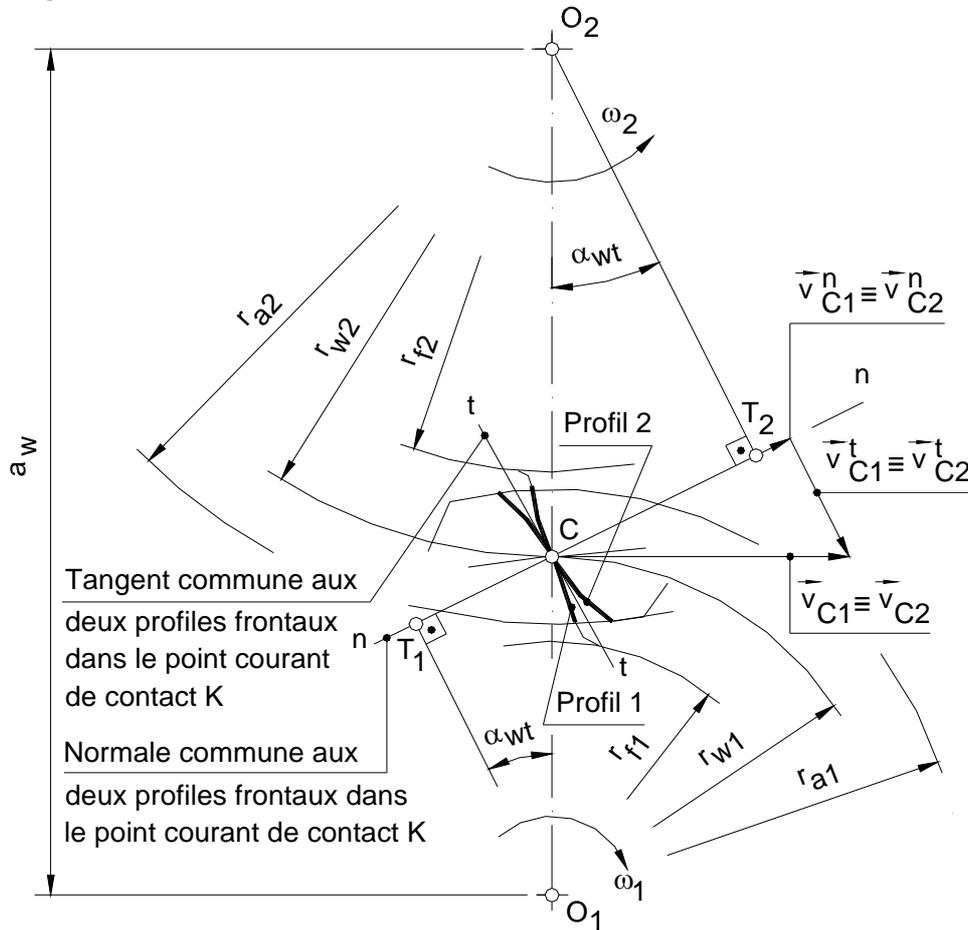


Fig. 25.1. Schéma de vitesses linaires dans le pôle d'engrènement C

Observation 2. On démontre dans la théorie d'engrènement qu'on peut construire le profil conjugué si on donne :

1. les centres des deux roues et le rapport de transmission, donc on connaît les rayons primitifs des roues ;
2. le profil frontal quelconque de la denture d'une roue.

Il en résulte d'ici que le choix de la courbe profil a une infinité de solutions. Pratiquement, le nombre des courbes profils se restreint extrêmement si on tient compte de l'accomplissement des autres exigences. La courbe profil qui réalise d'une manière décisive nombreuses exigences par rapport à d'autres courbes est *la développante de cercle*.

2.2.1.2. Développante de cercle

2.2.1.2.1. Définition

Pour définir la développante de cercle il est utile de définir premièrement **la courbe cyclique**: c'est le lieu géométrique décrit dans un point fixe du plan par un cercle dénommé *roulette* qui roule sans glissement sur une courbe quelconque qui est appelée *base* (fig. 2.12).

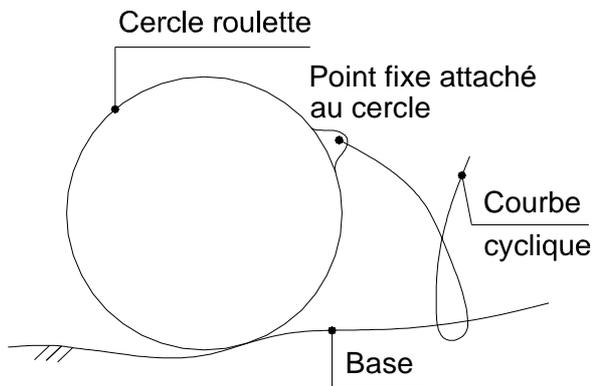


Fig. 2.2. Courbe cyclique

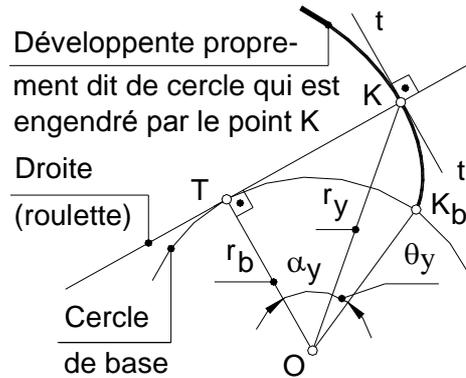
La développante de cercle est une courbe cyclique particulière: la base est un cercle et la roulette devient une droite (fig. 2.13). Autrement dit, la développante de cercle est le lieu géométrique décrit par un point fixe attaché à une droite qui roule sans glissement sur un cercle (de base) dans le

même plan.

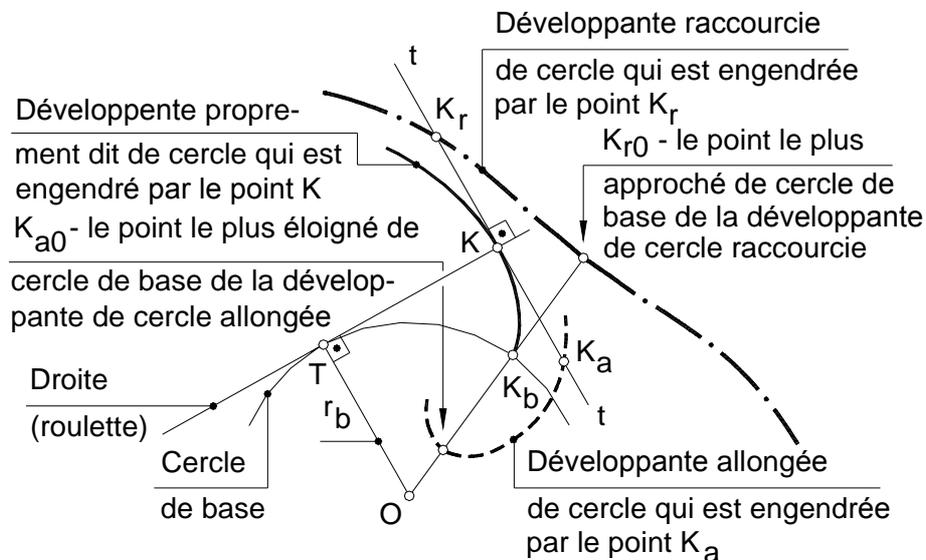
Comme on voit sur la fig. 2.13, il y a trois types de développantes de cercle d'après la position du point qui se trouve dans le plan du droit engendrant :

1. la développante proprement dit de cercle, qui est engendrée par le point K qui se trouve même sur le droit ;
2. la développante allongée de cercle, qui est engendrée par le point K_a qui se trouve dans le plan attaché de droit dans une telle position de telle sorte que la développante obtenue croise le cercle;

3. la développante raccourcie de cercle, qui est engendrée par le point K_r qui se trouve dans le plan attaché de droit dans un cette position de telle sorte que la développante obtenue ne croisse pas le cercle.



a) Développante de cercle proprement dit



b) Développante allongée et raccourcie de cercle de base par rapport a la développante proprement dit de cercle

Fig. 2.13. Types de développantes de cercle

On fait l'observation que les points K , K_a et K_r des trois types de développantes de cercle (proprement dit, allongée et, respectivement, raccourcie) sont choisis particulièrement sur la fig. 2.13 sur la même perpendiculaire $t-t$ sur la droite roulette TK (de quel ils sont attachés), pour mettre en évidence les positions extrêmes de ces développantes. Ces points extrêmes sont :

- K_b de la développante proprement dit de cercle, qui se trouve sur le cercle de base ;
- K_{a0} de la développante allongée de cercle, qui se trouve radial dans la position la plus éloignée de cercle de base ;
- K_{r0} de la développante raccourcie de cercle, qui se trouve radial dans la position la plus approchée de cercle de base.

L'utilisation de base dans la théorie d'engrènement pour le profil frontal de la dent y a la développante proprement dite de cercle (qui sera appelée bref ci-après comme « développante de cercle ». Cette développante de cercle sera analysée largement de suite. La développante allongée de cercle définit la forme du profil du pied de la dent (elle ne sera discutée dans notre cours).

2.2.1.2.2. Équations de la développante de cercle

Écrivons les équations de la développante en coordonnées polaires paramétriques (fig. 2.13) : $r_y = r_y(\alpha_y)$ et $\theta_y = \theta_y(\alpha_y)$. L'indice « y » est utilisé pour définir les grandeurs courantes. L'angle α_y entre le rayon vecteur et la tangente dans le point courant à la développante est appelé *angle de pression*.

Le rayon vecteur courante a l'expression :

$$r_y = \frac{1}{\cos \alpha_y} = r_y(\alpha_y). \quad (2.12)$$

L'angle polaire θ_y résulte de l'égalité de base conformément à la définition de la développante:

$$TK = \overset{\frown}{TK_b}, \quad (2.13)$$

qui devient par transformations:

$$r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha_y = r_b(\alpha_y + \theta_y).$$

De cette expression résulte la deuxième équation paramétrique, de l'angle polaire :

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y = \theta_y(\alpha_y) = \operatorname{inv} \alpha_y. \quad (2.14)$$

Le symbole "inv" provient de l'anglais "involute". On voit aussi que $\operatorname{inv} \alpha_y$ est une fonction spécifique de la développante.

2.2.1.2.3. Propriétés de la développante de cercle

On peut définir les suivantes propriétés de la développante de cercle.

1. Le rayon de courbure de la développante dans le point courant K est le segment TK (fig. 2.13, a). La démonstration commence de la procédure d'engendrement de la développante, qui permet d'assimiler un arc très petite de développante autour de K par un arc courbe de cercle ayant le rayon TK .

2. La normale dans un point quelconque de la développante est tangente au cercle de base (fig. 2.13, a). Vraiment, le rayon d'arc du cercle de remplacement de l'arc de développante, c'est-à-dire le segment TK , est normal à ce cercle de remplacement. Mais le segment TK est dans le même temps tangent au cercle de base de la développante.

3. Les développantes du même cercle de base sont des courbes parallèles. Soit pour analyse deux développantes de cercle qui sont engendrées par les points K et K' placés sur la même droite (fig. 2.14). On voit que la distance sur la normale commune entre les deux développantes générées par les points K et K' est un segment constant, $KK' = ct.$; donc, les deux développantes du même cercle de base sont courbes parallèles. Une observation corrélée : cette distance se reproduit aussi sur le cercle de base, $KK' = \widehat{K_b K'_b}$; si les deux développantes sont consécutives, cet arc de cercle est appelé le pas de base.

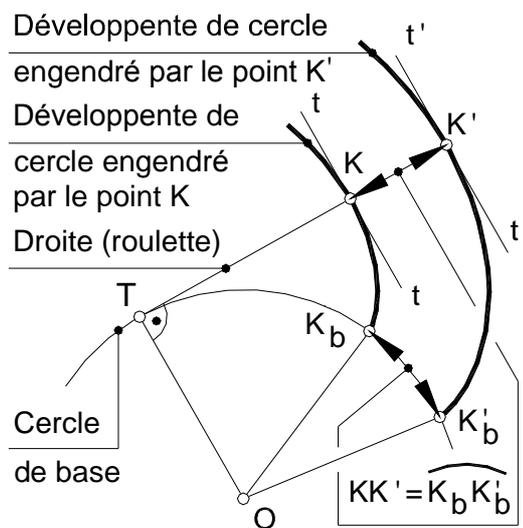


Fig. 2.14. Les développantes du même cercle de base sont parallèles

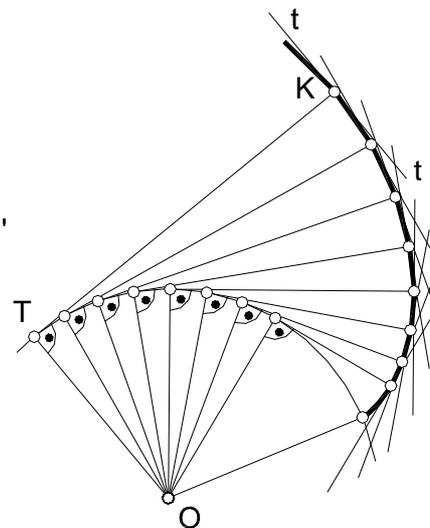


Fig. 2.15. La développante de cercle est l'enveloppement de ces tangents

4. La famille des tangentes à la développante enveloppe la développante. C'est-à-dire la développante résulte comme l'enveloppement de ces tangents (fig. 2.15). L'aspect est important technologiquement : un

outil à profils rectilignes (donc très simple constructivement) 1 réalise la forme apparent complexe de la développante, par deux mouvements : de coupe (relative perpendiculaire sur le plan de la figure) et de roulement (par rapport à la roue demi-produit).

2.2.1.2.4. Aspects pratiques

Les aspects pratiques résultent des considérations antérieures.

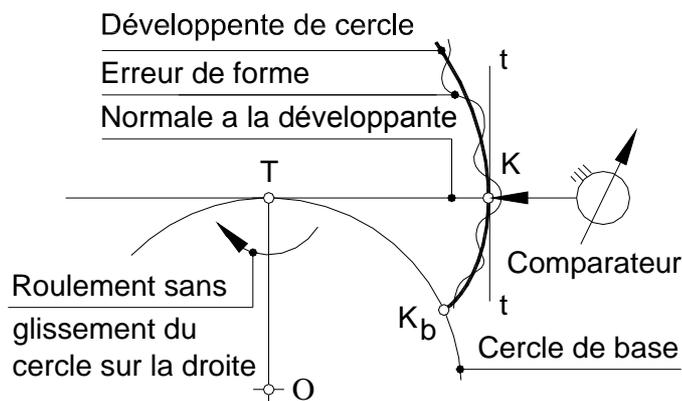


Fig. 2.16. Principe de mesurage de l'erreur de forme

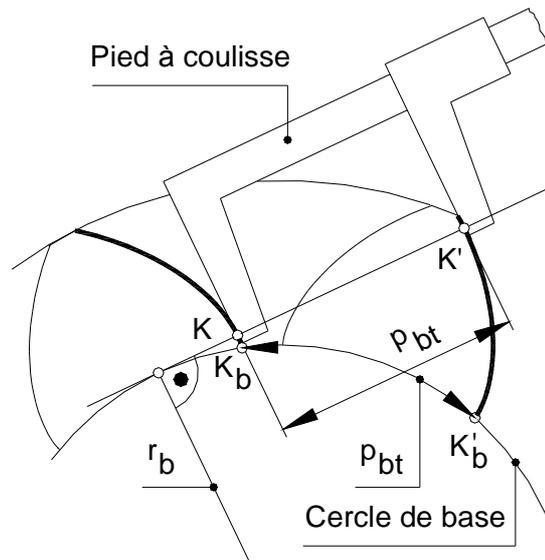


Fig. 2.17. Principe de mesurage du pas de base (en plan frontal)

1. La normale étant tangente au cercle de base, on peut imaginer le système simple de mesure de l'erreur de forme, qui est schématisé sur la fig. 2.16.

Le comparateur a sa tige le long de la normale à la développante. On peut considérer aussi que le cercle (le cylindre) primitif roule sans glissement sur

cette normale, c'est-à-dire est satisfait la condition (2.13). Dans cette situation c'est évident que le comparateur n'indique pas de variations si le profil n'a pas des erreurs de forme; et, inversement, toutes les erreurs de forme seront évidentes par le comparateur.

2. La propriété de parallélisme des développantes sert à réaliser le mesurage du pas de base avec un instrument tel le pied à coulisse. Le principe est montré sur la fig. 2.17. Le pied à coulisse peut être installé indifféremment sur les deux profils consécutifs, puisque la

¹ On va montrer plus tard que cet outil est la crémaillère génératrice pour les roues denture en développante de cercle.

distance de mesure (le pas de base) est constante quel que soit la normale commune sur laquelle on fait le mesurage. Cette distance est même le pas de base (frontal dans le cas général des engrenages à denture hélicoïdale) :

$$p_{bt} = KK' = \widehat{K_b K'_b} \quad (2.15)$$

2.2.1.3. Hélicoïde développable

Considérons sur la fig. 2.18 un cylindre auquel est tangent un plan P suivant la génératrice $T_I T_{II}$, où I et II sont les plans frontaux limitatifs du cylindre. Dans le plan P est tracée une droite Δ qui fait l'angle β_b avec la génératrice du cylindre. Faisons rouler sans glisser le plan P sur le cylindre. La droite génératrice Δ engendre une surface appelée **l'hélicoïde développable**. Cette dénomination est liée au fait que chaque point de la droite Δ décrit une développante de cercle dans le plan frontal où se trouve ce point. Il en résulte que les considérations antérieures sur la développante de cercle se maintiennent pour chaque développante frontale de cette surface.

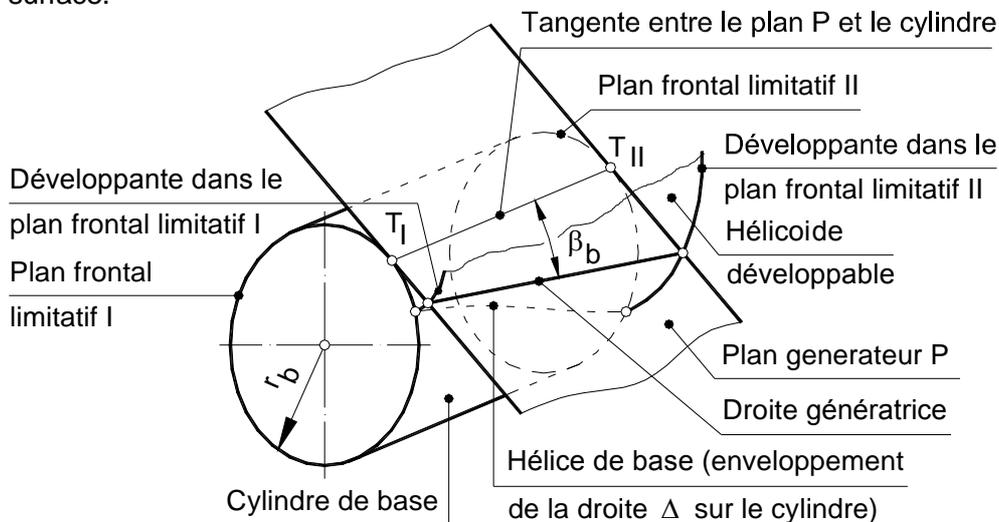


Fig. 2.18. Generation de l'hélicoïde développable

Voyons quelques propriétés intéressantes de cette surface.

1. La droite Δ s'enveloppe sur le cylindre par une hélice cylindrique appelée **hélice de base**. L'angle β_b est même l'angle d'hélice.

2. L'intersection de l'hélicoïde développable avec un cylindre quelconque est aussi une hélice (ce fait n'est pas démontré ici). En outre, le pas p_z de l'hélice de base est reproduit sur une hélice quelconque. Analysons pour une démonstration la fig. 2.19. On voit que les développantes

décrites des points consécutifs X_b et Y_b de l'hélice de base, qui sont distancés par le pas p_z de cette hélice, sont superposés dans la projection frontale. Il en résulte (fig. 2.19):

$$p_z = \frac{2 \pi r_b}{\operatorname{tg} \beta_b} = \frac{2 \pi r_y}{\operatorname{tg} \beta_y},$$

expression dans laquelle a apparu l'angle d'inclinaison de l'hélice quelconque, β_y ; d'où:

$$\operatorname{tg} \beta_y = \frac{r_y}{r_b} \operatorname{tg} \beta_b; \quad (2.16)$$

cette dernière expression sera utilisée par particularisation dans des autres calculs géométriques ultérieures.

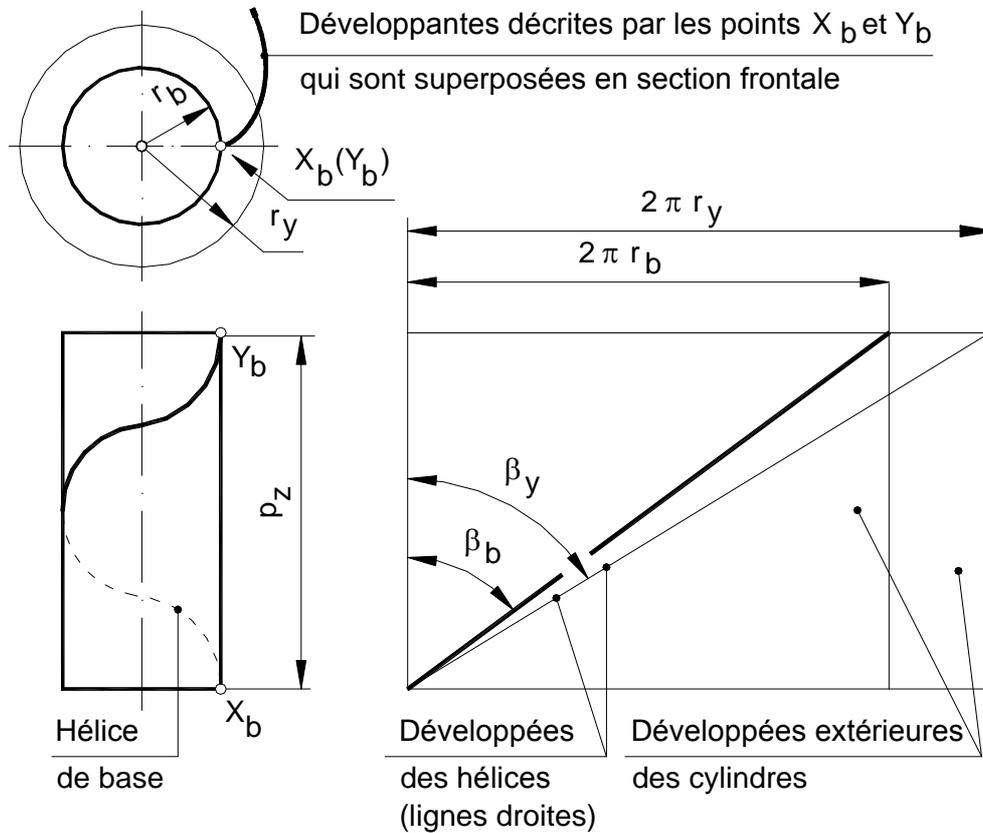


Fig. 2.19. *Éléments géométriques pour l'hélicoïde développable.*

3. Le sens de l'hélice a été défini aux filets. Le sens d'une hélice quelconque définit aussi le sens d'inclinaison de l'hélicoïde. Pour les situations représentées sur les fig. 2.18 et 2.19, le sens de l'hélice est droit.

2.2.1.4. Engrenement frontal en développante du cercle et ses propriétés

Considérons en engrenement deux profils frontaux des roues extérieures (fig. 2.20). Voyons certaines propriétés intéressantes de cet engrenement.

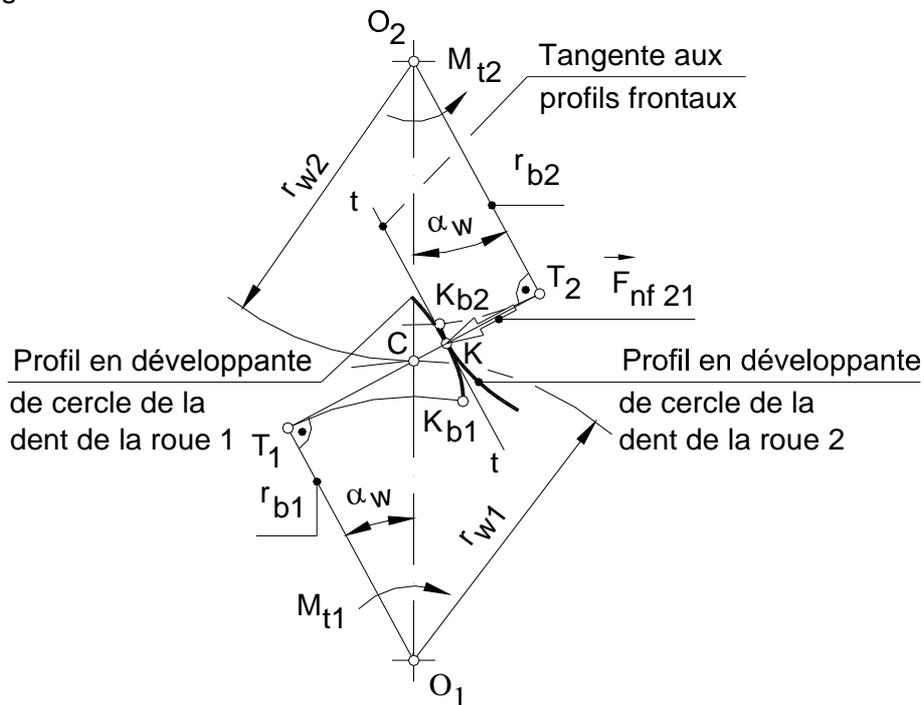


Fig. 2.20. Engrenement frontal en développante du cercle

$\vec{F}_{nf\ 21}$ - force normale en plan frontal d'action de la dent 2 vers la dent 1

1. La normale commune des profils dans le point K est tangente à deux cercles de bases. Pour transmettre du mouvement d'un profil à l'autre par l'action d'un profil à l'autre, cette normale (sur laquelle action la force entre les profils, voyez $\vec{F}_{nf\ 21}$ sur la fig. 2.20) doit avoir la direction de la tangente intérieure à deux cercles de base. Il en résulte que la normale a une direction unique. Par conséquent, elle croise la ligne des centres O_1O_2 dans un point fixe C sur cette ligne. C'est-à-dire **la loi de base de l'engrenement frontal plan est satisfaite**. Donc les deux profils en développante de cercle sont conjugués dans l'engrenement frontal plan.

Observations. a) On observe simplement que la normale est le lieu géométrique des points de contact; c'est pourquoi elle est appelée **ligne d'engrènement**. b) L'angle α_{wt} est appelé **angle d'engrènement** ou **angle de pression de fonctionnement**.

2. L'avantage dynamique. La force qui charge la paire de profils ne se modifie pas comme direction et, par conséquent, sa grandeur conformément à l'expression:

$$F_{nf\ 21} = \frac{M_{t1}}{r_{b1}} = ct. \quad (2.17)$$

3. L'avantage cinématique. A la modification de l'entraxe (possible à cause des erreurs d'exécution et montage) le rapport de transmission reste constant dans l'engrènement en développante de cercle. Vraiment, comme on voit sur la fig. 2.21, les cercles de base ne se modifient pas à la modification de l'entraxe. Et conformément à (2.7):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2T_2}{O_1T_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = ct. \quad (2.18)$$

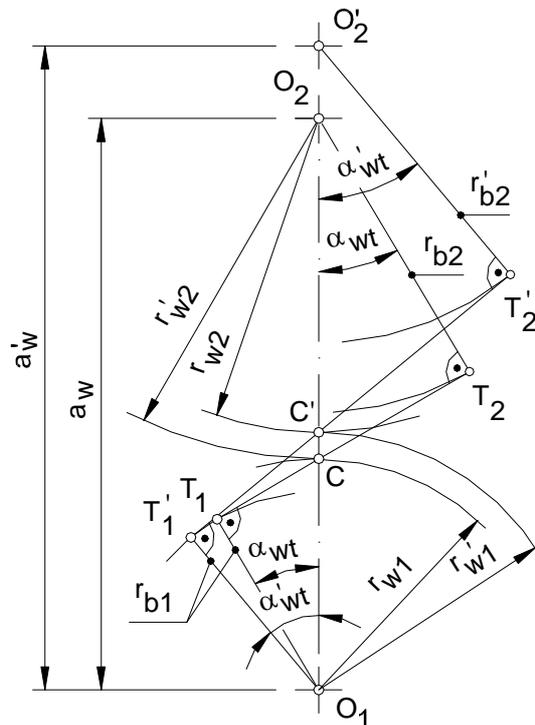


Fig. 2.21. *Insensibilité cinématique de l'engrènement parallèle en développante de cercle à la modification de l'entraxe*

Mais les cercles primitifs se modifient normalement et le rapport de transmission s'écrit:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r'_{w2}}{r'_{w1}}, \quad (2.19)$$

où interviennent: r_{w1} , r_{w2} - les rayons primitifs du fonctionnement des roues à l'entraxe de fonctionnement a_w ; r'_{w1} , r'_{w2} - les nouveaux rayons primitifs pour la nouvelle entraxe de fonctionnement a'_w .

4. Pour que plusieurs paires de profils soient simultanément en contact (théorique) (fig. 2.22), les profils homologues consécutifs doivent être également distancés sur la normale commune. Cette distance est égale avec le pas de base frontal, p_{bt} (l'arc sur le cercle de base entre les points de commencement des développantes), sur quelconque roue.

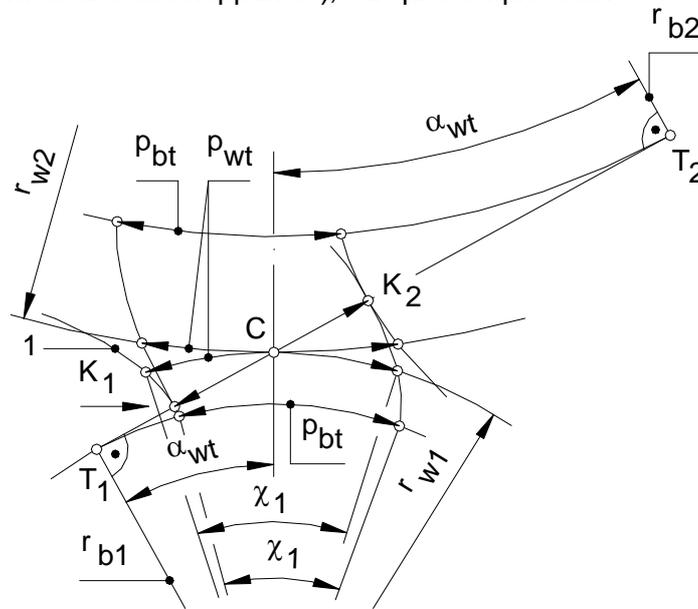


Fig. 2.22. Schéma pour démontrer l'égalité à deux roues des pas de base frontaux, p_{bt} , et des pas primitives de fonctionnement, p_{wt}

On démontre aussi l'égalité à deux roues des pas sur les cercles primitifs p_{wt} (le pas primitif frontal de fonctionnement ou le pas d'engrènement). On utilise pour démonstration seulement la roue 1. On voit simplement que les deux pas, p_{bt} et p_{wt} , tendent le même angle au centre, χ_1 , parce qu'ils sont parcourus simultanément à la rotation de la roue 1, de manière que le profil 1 se superpose sur le profil homologue consécutif 1'. Comme résultat on peut écrire:

Comme on a été montré à la définition de l'hélicoïde développable (le sous-chapitre 2.2.1.3), le plan générateur des deux hélicoïdes développables doit être tangente aux deux cylindres de base de diamètres d_{b1} et d_{b2} (pour la simplification de la figure, ces cylindres n'ont été pas représentés). La ligne génératrice K_1K_{II} des deux hélicoïdes est représentée dans le plan générateur rabattu (à l'angle d'inclinaison β_b par rapport à la direction des génératrices), mais aussi dans une projection frontale. Parce que cette ligne est aussi la ligne de contact entre les hélicoïdes, leur plan générateur est *le plan d'engrènement* dans le cas de l'engrenage parallèle cylindrique à denture hélicoïdale.

Enfin on fait une observation très importante : les sens d'inclinaison des deux hélicoïdes conjugués sont inverses. Les sens des hélicoïdes représentés sur la fig. 2.21 sont : droite – à la roue 1 ; gauche – à la roue 2 (les roues sont notées sur la figure seulement par les indices attachées aux différents grandeurs).

2.2.1.6 Crémaillère. Crémaillère de référence. Crémaillère génératrice

2.2.1.6.1. Mode d'obtention de la crémaillère. Éléments primitifs de l'engrenage à crémaillère

Traçons à l'infini les diamètres d'une roue dentée, par exemple la roue 2 dans la fig. 2.24. Comme résultat, le rayon du courbure d'une quelconque développable de cette roue devient infinie. Cet aspect est relevé pour le rayon de courbure d'une développante dans le plan frontal marginal I :

$$K_1T_2 = K_1C + CT_2 = K_1C + r_{w2} \sin \alpha_{wt} ; \quad (2.22)$$

ce rayon devient à la limite :

$$\lim_{r_{w2} \rightarrow \infty} K_1T_2 = K_1C + \lim_{r_{w2} \rightarrow \infty} r_{w2} \sin \alpha_{wt} = \infty . \quad (2.23)$$

Comme résultat, chaque développante de cercle devient une ligne droite perpendiculaire sur le plan d'engrènement, le long de la ligne de contact entre les deux hélicoïdes développables. Aussi comme résultat, l'infinité de ces droites forme un plan. Ce plan est le nouvel flanc de la denture de la roue dégénérée. Cette roue dégénérée est appelée **crémaillère**. L'engrenage entre la roue dentée et sa crémaillère conjuguée est appelé **engrenage crémaillère**.

Les éléments primitifs (de roulement) de l'engrenage à crémaillère sont (fig. 2.24) :

1. **le cylindre primitif** de la roue non dégénérée 1 (**cercle primitif** en plan frontal), de diamètre d_{w1} ;

2. **le plan primitif (de roulement)** dans lequel dégénère le cylindre primitif de la vieille roue 2 (**ligne primitif dans le plan frontal**), qui est tangente au cylindre (respectivement, cercle dans le plan frontal) primitif de la roue 1.

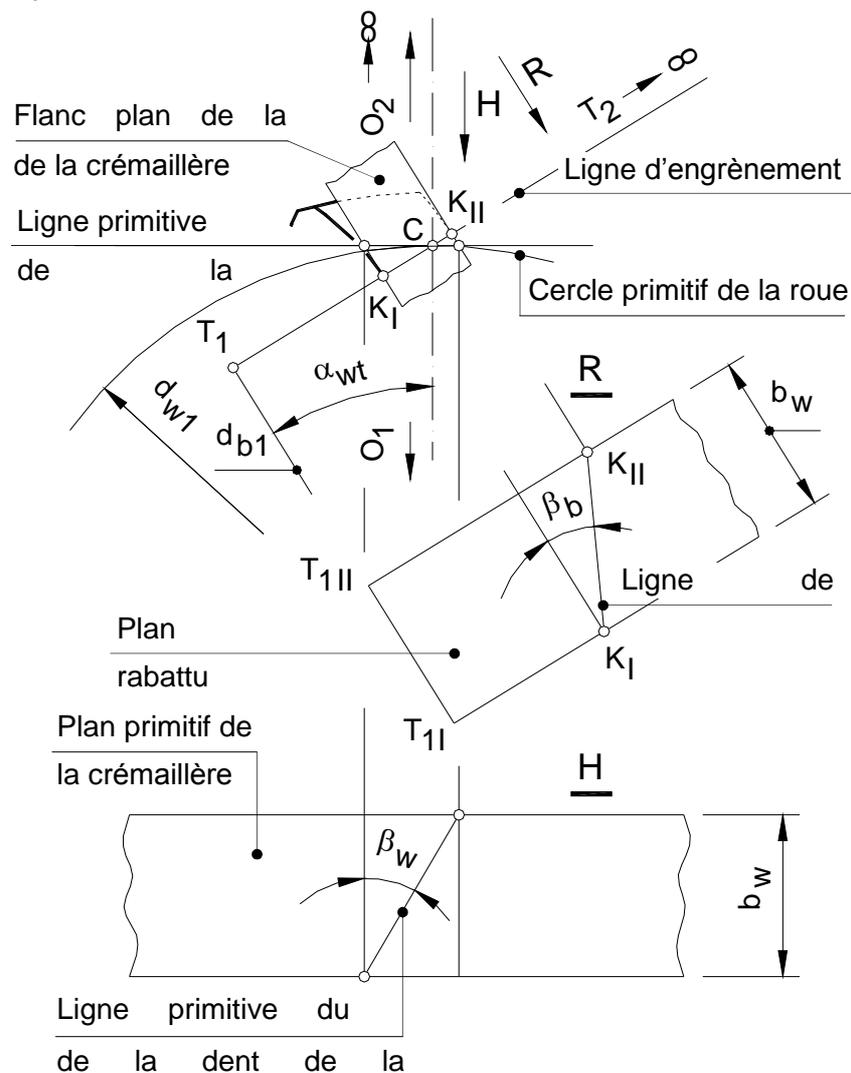


Fig. 2.24. Schéma de l'engrènement d'une roue dentée avec sa crémaillère conjuguée

2.2.1.6.2. Crémaillère de référence. Crémaillère génératrice

On imagine qu'on peut obtenir une infinité de crémaillères, en fonction de l'entraxe initiale, a_w , donc pour angles différents d'engrènement, α_{wt} .

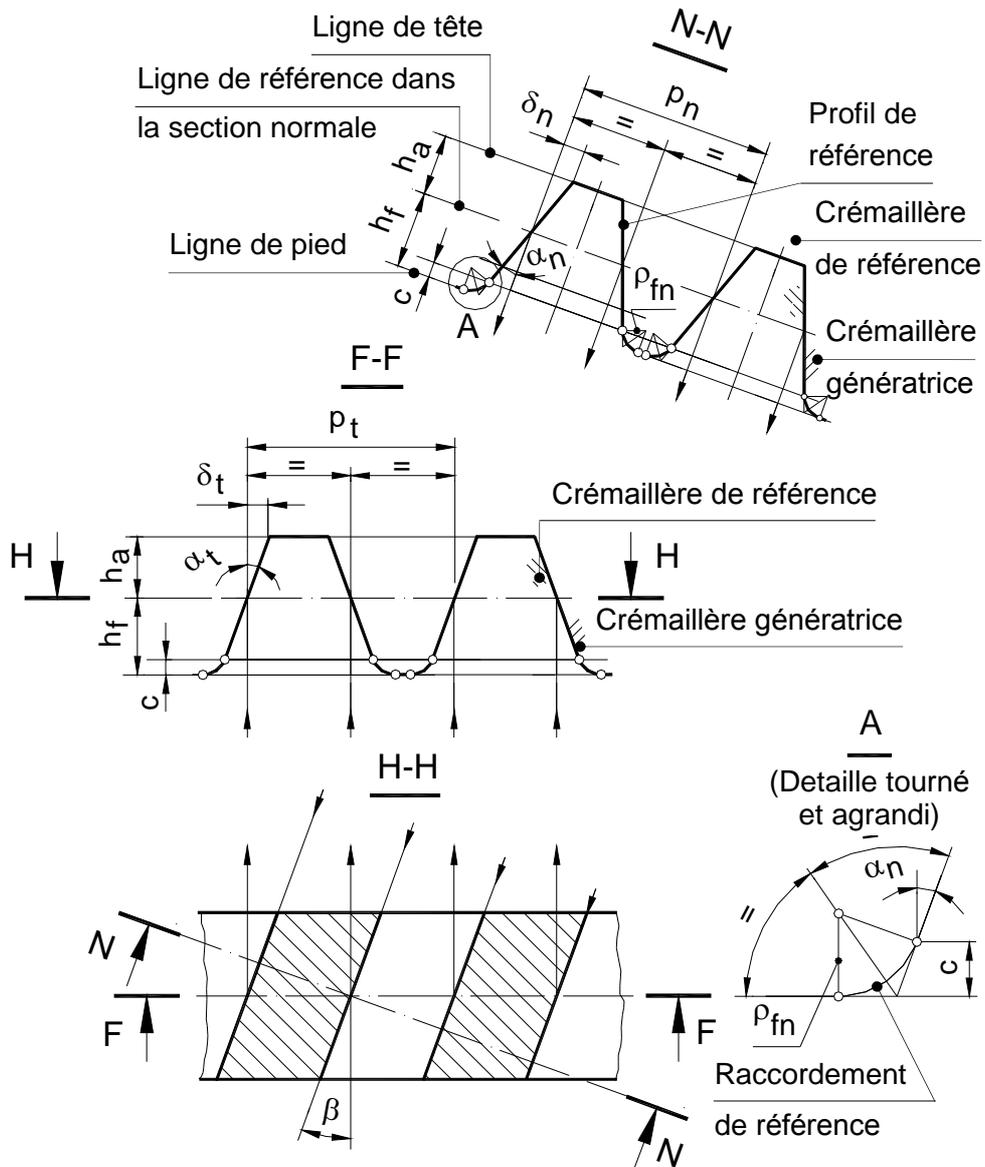


Fig. 2.25. *Éléments géométriques des crémaillères normalisées (de référence et génératrice)*

h_a - hauteur de tête de référence (ou saillie); h_f - hauteur de pied de référence (ou creux); c - jeu de référence à tête/pied; p_n - pas normal de référence; p_t - pas frontal de référence; α_n - angle de pression normal de référence; α_t - angle de pression frontal de référence; β - angle d'inclinaison de référence; ρ_{fn} - rayon de raccordement normal de référence.

puisque cette crémaillère peut représenter un outil (à cause de sa forme simple par les profils frontaux rectilignes), on réduit le nombre de formes et de dimensions des crémaillères associés. Dans cette idée, on normalise deux crémaillères identiques, l'une étant la négative de l'autre (fig. 2.25) :

1. **la crémaillère de référence** dans laquelle se transforme la roue dégénérée;
2. **la crémaillère génératrice**, qui définit géométriquement la denture de la roue conjuguée, par le procès de roulement entre la crémaillère et la roue demi-produit. Vraiment, comme on a été montré au sous-chapitre 2.2.1.2.2, le profil frontal (la développante de cercle) est l'enveloppement de ces tangents, qui sont justement les profils rectilignes de la crémaillère génératrice. Donc, cette crémaillère peut être considérée comme un outil crémaillère.

2.2.1.6.3. Éléments géométriques des crémaillères

Le **profil normalisé** est celui **normal**, par des raisons économiques: l'exécution de la denture inclinée est possible quel que soit son angle d'inclinaison (de référence), β , avec les mêmes outils. On voit que cet outil est utilisé pour la denture droite.

On distingue les **éléments géométriques** suivants à toutes les crémaillères (fig. 2.25):

1. **la ligne de référence** ou **la ligne moyenne du profil**, qui est celle parallèle aux lignes de tête et de pied sur laquelle les largeurs de la dent et de l'entredent sont égales;
2. **les dimensions linéaires** :
 - a) celles constants dans le plan quelconque (normal N-N ou frontal F-F) : h_a - hauteur de tête de référence (ou saillie) ; h_f - hauteur de pied de référence (ou creux); c - jeu de référence à tête/pied;
 - b) cela existant seulement dans le plan normal, qui est le rayon de raccordement normal de référence, ρ_{fn} ¹;
3. **les dimensions angulaires** : α_n - angle de pression normal de référence; α_t - angle de pression frontal de référence; β - angle d'inclinaison de référence.

La limitation des valeurs des dimensions se fait ainsi conformément à STAS 821-82 ainsi:

¹ On peut observer aisément que à l'arc de raccordement de cercle à pied de référence dans la section normale, N-N, correspond un arc d'ellipse dans la section frontale, F-F.

1. les dimensions linéaires sont adoptées adimensionnelles, par les valeurs des facteurs (coefficients) définites par l'intermède d'un grandeur qui sera défini ultérieurement : le module normal, m_n

- a) facteur de l'hauteur de tête de référence (ou de saillie) :

$$h_a^* = \frac{h_a}{m_n} = 1; \quad (2.24)$$

- b) facteur de l'hauteur de pied de référence (ou de creux) :

$$h_f^* = \frac{h_f}{m_n} = 1,25; \quad (2.25)$$

- c) facteur du jeu de référence à tête/pied, avec la valeur la plus recommandée :

$$c^* = \frac{c}{m_n} = 0,25; \quad (2.26)$$

2. l'angle de pression normal de référence: $\alpha_n = 20^\circ$.

Ci-après on calcul quelques dimensions spécifiques aux crémaillères.

Le rayon de raccordement normal de référence résulte du détail de la fig. 2.25. En considérant que le jeu de référence à tête/pied, c , est égal à l'hauteur du raccordement (à pied ici), on écrit:

$$c = \rho_{fn} - \rho_{fn} \sin \alpha_n, \quad (2.27)$$

d'où le rayon cherché est:

$$\rho_{fn} = \frac{c}{1 - \sin \alpha_n} = \frac{c^*}{1 - \sin \alpha_n} m_n. \quad (2.28)$$

Le module frontal est obtenu de celui normal qui a valeurs normalisées. Pour cela on écrit la liaison entre les pas de référence frontal et normal (fig. 2.25):

$$\rho_n = \rho_t \cos \beta. \quad (2.29)$$

En utilisant la liaison entre les pas et les modules frontal et normal correspondant (expressions qui seront établies plus tard) :

$$\rho_n = \pi m_n; \quad (2.30)$$

$$\rho_t = \pi m_t, \quad (2.31)$$

il en résulte de (2.29) le module frontal cherché :

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}. \quad (2.32)$$

L'angle de pression de référence frontal résulte en fonction de celui normal. Pour cela on utilise la même dépendance entre les dimensions δ_n et δ_t qui sont parallèles avec la ligne de référence dans chaque plan (normal ou frontal), comme celle établit entre les pas (2.29) :

$$\delta_n = \delta_t \cos \beta, \quad (2.33)$$

expression qui devient par transformations :

$$h_a \operatorname{tg} \alpha_n = h_a \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta.$$

Il en résulte la grandeur cherchée :

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}. \quad (2.34)$$

2.2.1.7. Roues dentées générées par la crémaillère génératrice

2.2.1.7.1. Éléments primitives. Génération d'une dent

Comme on a été montré antérieurement, le mouvement de roulement entre la crémaillère génératrice et sa roue conjuguée se produit entre les éléments primitives : **le cylindre primitif** (ou **le cercle primitif frontal**) de la roue ; **le plan primitif** (ou **la ligne primitive frontale**) de la crémaillère, qui est tangente au cylindre primitif (ou le cercle primitif frontal) de la roue. On met le problème : quel est la position relative de ces éléments primitives?

On fait cette analyse dans le plan frontal de l'engrènement entre la crémaillère et la roue demi-produit. On parle dans ce cas de la **ligne primitive de taillage de la crémaillère** et du **cercle primitif de taillage de la roue**. Une première observation : le pas de référence frontal de la crémaillère, p_t , se maintient sur une quelconque ligne parallèle à la ligne de référence, parce que les profils frontaux homologues consécutifs sont parallèles ; comme résultat, la ligne primitive de taillage peut être chacune des lignes parallèles à la ligne de référence de la crémaillère. Une autre observation : la ligne primitive de taillage roule sans glissement sur le cercle primitif de taillage de la roue. Dans ces conditions, le pas de référence frontale, qui existe sur cette ligne, se reproduit d'un nombre naturel de fois (le nombre z des dents) comme un arc de cercle égale sur la circonférence du cercle primitif de taillage :

$$\pi d = p_t z. \quad (2.35)$$

D'ici on obtient le diamètre du cercle primitif :

$$d = \frac{p_t}{\pi} z. \quad (2.36)$$

Le rapport entre les nombres irrationnels qui sont p_t et π est remplacée par **le module frontal**, qui est aussi un nombre irrationnel:

$$m_t = \frac{p_t}{\pi} . \quad (2.37)$$

On rappelle que cette expression antérieure a été utilisée antérieurement, par l'expression (2.31).

Mais le module normal, m_n , qui est défini par (2.30), est élu intentionnelle comme un nombre rationnel. Le raison : les dimensions linaires par hauteur de la crémaillère – expressions (2.24)...(2.26) – seront aussi nombres rationnelles, qui permettent un mesurage plus simple. On résulte finalement l'expression détaillée du diamètre primitif :

$$d = \frac{p_t}{\pi} z = m_t z = \frac{m_n}{\cos\beta} z . \quad (2.38)$$

2.2.1.7.2. Déport de la denture

On a montré que la ligne primitif (tangente au cercle primitif) peut être chacun ligne parallèle à la ligne de référence. C'est-à-dire, les deux types de lignes peuvent être différentes. On dit que se produit un **déport de la denture (des dents, du profil)**. Le **déport total de la denture** est la distance entre les deux lignes sur un direction radiale (fig. 2.26). La valeur du déport totale est défini par le produit $x_n m_n$, où x_n est le coefficient normal de déport.

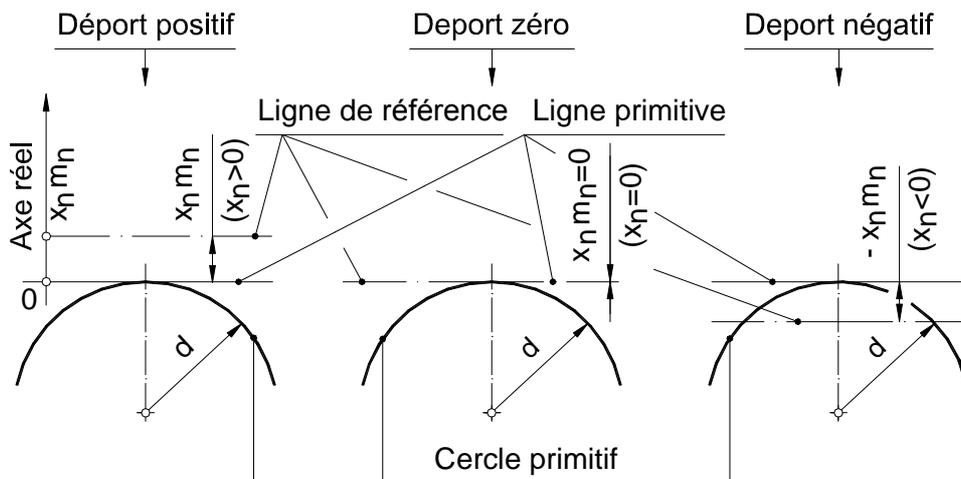


Fig. 2.26. Déport de la denture

On mentionne que le déport total et le coefficient normal de déport sont variables algébriques. Sur la fig. 2.26 est tracé l'axe réel de direction radiale, avec l'origine sur la ligne primitive et le sens vers l'extérieur du cercle primitif. Sur cet axe on trouve l'ensemble de points de coordonnées algébriques $x_n m_n$ (de déport total).

Il y a trois situations possibles en ce qui concerne le signe du déport (fig. 2.26) :

1. la ligne de référence du crémaillère ne croise pas le cercle primitif ; on dit que **le déport est positive (plus)** et **le coefficient normal de déport est positive**, $x_n > 0$;
2. la ligne de référence du crémaillère coïncide avec la ligne primitive; on dit que **le déport est zéro ou nulle** et **le coefficient normal de déport est zéro**, $x_n = 0$;
3. la ligne de référence du crémaillère croise le cercle primitif ; on dit que **le déport est négative (moins)** et **le coefficient normal de déport est négative**, $x_n < 0$.

On mentionne en plus que le déport définit est identique radialement indifférente du plan de section d'analyse : normal ou frontal. C'est pourquoi il existe:

$$x_m m_n = x_t m_t, \quad (2.39)$$

où est apparu le coefficient frontal de déport, x_t . On préfère l'utilisation singulière seulement du coefficient normal de déport, x_n .

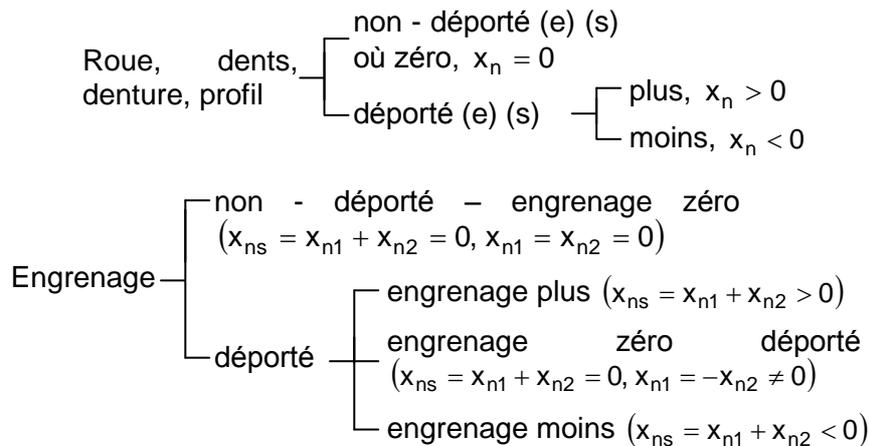


Fig. 2.27. Synthèse des dénominations liées du déport de profil

Une synthèse des dénominations liées du déport de profil est indiquée sur la fig. 2.27. On voit qu'il y a deux types de dénominations spécifiques :

- a) pour la roue, dents, denture et profil, en fonction de la valeur du coefficient (normale) de déport de profil, x_n ;
- b) pour l'engrenage, en fonction de la valeur du somme des coefficients (normales) de déport de profil, x_{ns} .

On trace successivement :

- a) le cercle primitif ;
- b) la ligne primitive tangente (horizontalement) au cercle;
- c) par le point C résulté - la ligne d'engrènement à l'engendrement entre la crémaillère et la roue demi-produit.

La ligne d'engrènement est tangente en T au cercle de base et est perpendiculaire en K sur le profil frontal rectiligne de la crémaillère. On a l'intuition que – dans le mouvement relative de roulement entre la crémaillère et la roue demi-produit – la développante de cercle est décrit par enveloppement et développement comme arc de cercle du segment TK sur le cercle de base.

On met le problème : quels sont **les limites de la développante de cercle** ? Vers l'extérieur, la développante est limitée de cercle de tête de diamètre d_a . Vers l'intérieur, le point limite est le celui utile U, qui se trouve sur le cercle utile de diamètre d_u , qui passe par le point U_p ; ce point est d'intersection entre la ligne parallèle à la ligne de référence qui passe par le pont commun profil rectiligne - raccordement et la ligne d'engrènement.

On met aussi le **problème de définition de l'entière hauteur de la dent**. On a été montré que le profil est limité vers l'extérieur par le cercle de tête, de diamètre d_a . Vers l'intérieur, le profil est limité par le cercle de pied, de diamètre d_f . Entre le point utile U et le cercle de pied il y a le profil de raccordement, au pied de la dent engendrée ¹.

2.2.1.7.4. Éléments géométriques de la roue dentée

On résulte simplement les suivantes éléments géométriques de la roue dentée engendrée par la crémaillère génératrice.

1. On constate que **l'angle d'engrènement** est celui de pression frontale de la crémaillère, α_t (fig. 2.29).

2. **Le diamètre de base** (fig. 2.29):

$$d_b = d \cos \alpha_t . \quad (2.41)$$

3. **Le diamètre de pied** (fig. 2.29):

$$d_f = d + 2 x_n m_n - 2 (h_a^* + c^*) m_n . \quad (2.42)$$

4. **Le diamètre de tête** (fig. 2.29):

$$d_a = d + 2 x_n m_n + 2 h_a^* m_n . \quad (2.43)$$

¹ On ne fait pas des considérations (qui sont plus amples) en ce qui concerne la forme u profil de raccordement.

5. **Le pas de base** est obtenu utilisant l'idée que chacun pas de la dent sous-entend le même angle au centre de la roue, conformément au sous-chapitre 2.2.1.4. L'expression correspondante (2.20) se réécrit dans la forme :

$$\chi_{1(2)} = \frac{p_t}{d} = \frac{p_{bt}}{d_b}, \quad (2.44)$$

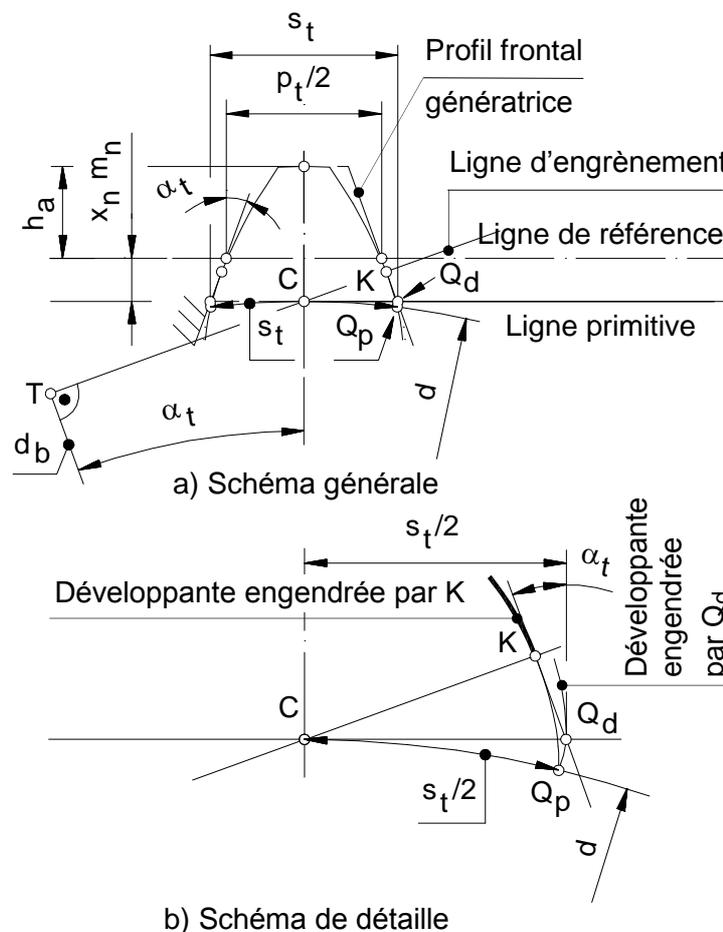


Fig. 2.30. Schémas pour établir l'arc primitif de la dent

d'où :

$$p_{bt} = p_t \frac{d_b}{d} = p_t \cos \alpha_1 = \pi m_t \cos \alpha_t = \pi \frac{m_n}{\cos \beta} \cos \alpha_t. \quad (2.45)$$

6. **L'épaisseur primitive frontale de la dent** s'obtient en utilisant la fig. 2.30. Cet arc s_t est égal avec la longueur sur la ligne primitive entre les profils de l'entredent de la crémaillère (fig. 2.30, a).

L'explication résulte du détail de la fig. 2.30, b : les points K et Q_d (d'intersection du profil frontal de la crémaillère avec la ligne primitive) décrivent des développantes de cercle, parce que dans le même temps se roule : le segment TK sur le cercle de base ; le segment CQ_d sur cercle primitive. Sans démonstration on mentionne que les deux développantes de cercle se croissent sur le cercle primitif dans le point commun Q_p . Par conséquence :

$$CQ_d = CQ_p = \frac{s_t}{2}, \quad (2.46)$$

de telle sorte que l'arc primitif frontal de la dent est (fig. 2.30, a):

$$s_t = 2 CQ_d = \frac{p_t}{2} + 2 x_n m_n \operatorname{tg} \alpha_t. \quad (2.47)$$

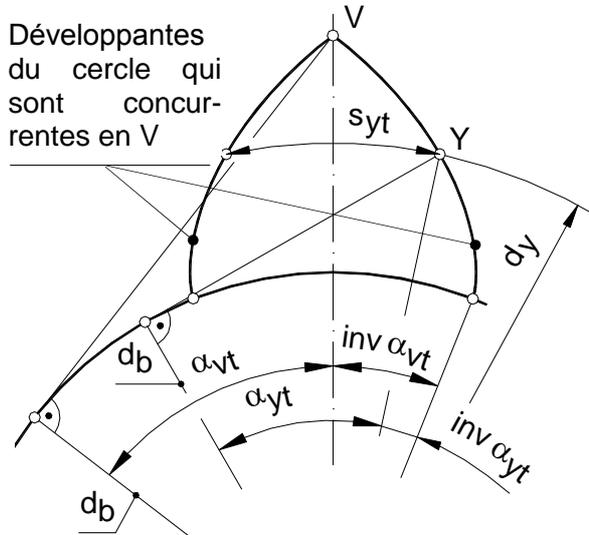


Fig. 2.31. Schéma pour établir l'épaisseur frontale quelconque de la dent

Les deux développantes de la dent se croissent dans le sommet aiguisé fictif de la dent, V. Cette épaisseur résulte simplement:

$$s_{yt} = (\operatorname{inv} \alpha_{vt} - \operatorname{inv} \alpha_{yt}) d_y. \quad (2.49)$$

Plus haut on a intervenu : α_{vt} - angle de pression frontal du sommet aiguisé V ; α_{yt} - angle de pression frontal quelconque ; d_y - le diamètre quelconque de la dent.

7. **L'arc primitif frontal de la dent** (non représentée sur une figure) se déduit simplement de sa définition (sa somme avec l'arc primitif frontal donne le pas de référence frontal):

$$e_t = p_t - s_t \quad (2.48)$$

8. **L'épaisseur frontale quelconque de la dent** résulte en utilisant la représentation donnée par la fig. 2.31. Les deux

9. **L'angle de pression frontal du vif aiguisé** s'obtient par la particularisation de l'expression antérieure sur le cercle primitif.

Comme résultat, on introduit dans cette expression les grandeurs :
 $s_{yt} = s_t$, $\alpha_{yt} = \alpha_t$, $d_y = d$. Il en résulte :

$$\text{inv}\alpha_{vt} = \frac{s_t}{2} + \text{inv}\alpha_t; \quad (2.50)$$

$$\text{inv}\alpha_{vt} = \frac{\frac{p_t}{2} + 2x_n m_n \text{tg}\alpha_t}{d} + \text{inv}\alpha_t = \frac{\frac{\pi m_t}{2} + 2x_n m_n \text{tg}\alpha_t}{m_t z} + \text{inv}\alpha_t; \quad (2.51)$$

D'autre part, en utilisant les expressions (2.34) et (2.32), on obtient le développement du produit qui intervient dans l'expression antérieure:

$$x_n m_n \text{tg}\alpha_t = x_n m_n \frac{\text{tg}\alpha_n}{\cos\beta} = x_n m_t \text{tg}\alpha_n. \quad (2.52)$$

Comme résultat, l'angle de pression frontal du sommet aiguisé V s'obtient de (2.51) dans la forme:

$$\text{inv}\alpha_{vt} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 x_n \text{tg}\alpha_n}{z} + \text{inv}\alpha_{vt}. \quad (2.53)$$

2.2.1.7.5. Roue équivalente

La roue équivalente est la roue dentée à denture droite qui est conjuguée à la crémaillère génératrice à denture inclinée, dans la section normale de la dernière denture.

Considérons pour discussion la fig. 2.32. Soit une roue dentée à denture hélicoïdale, représentée par son cylindre primitif de taillage et une seule ligne primitive de taillage du flanc (une hélice qui est l'intersection du flanc de la dent inclinée/hélicoïdale avec le cylindre primitif de taillage de la roue). Traçons la section normale N-N sur cette hélice et la rabattons au dessus; on y voit l'ellipse d'intersection du plan normal avec le cylindre primitif (le centre O_n de l'ellipse est déduit graphiquement sur la figure, par une règle géométrique très connue). Considérons plus loin le contour générateur normal (qui est représenté par les lignes de référence et primitive et, aussi, par un seul profil normal). L'élément de roulement dans le point C de la roue dentée équivalente engendrée par ce contour est le cercle primitif équivalent. Le rayon de ce cercle équivalent est égal au rayon de courbure de l'ellipse en C ; il se calcule utilisant les demi - axes a et b de l'ellipse:

$$\rho_n = \frac{d_n}{2} = \frac{\left(\frac{d}{2 \cos\beta}\right)^2}{\frac{d}{2}} = \frac{d}{2 \cos^2\beta} = \frac{m_n z}{2 \cos^2\beta} = \frac{m_n z_n}{2}, \quad (2.54)$$

où : d_n est le diamètre du cercle primitive équivalent; z_n - le nombre de dents de la roue équivalente.

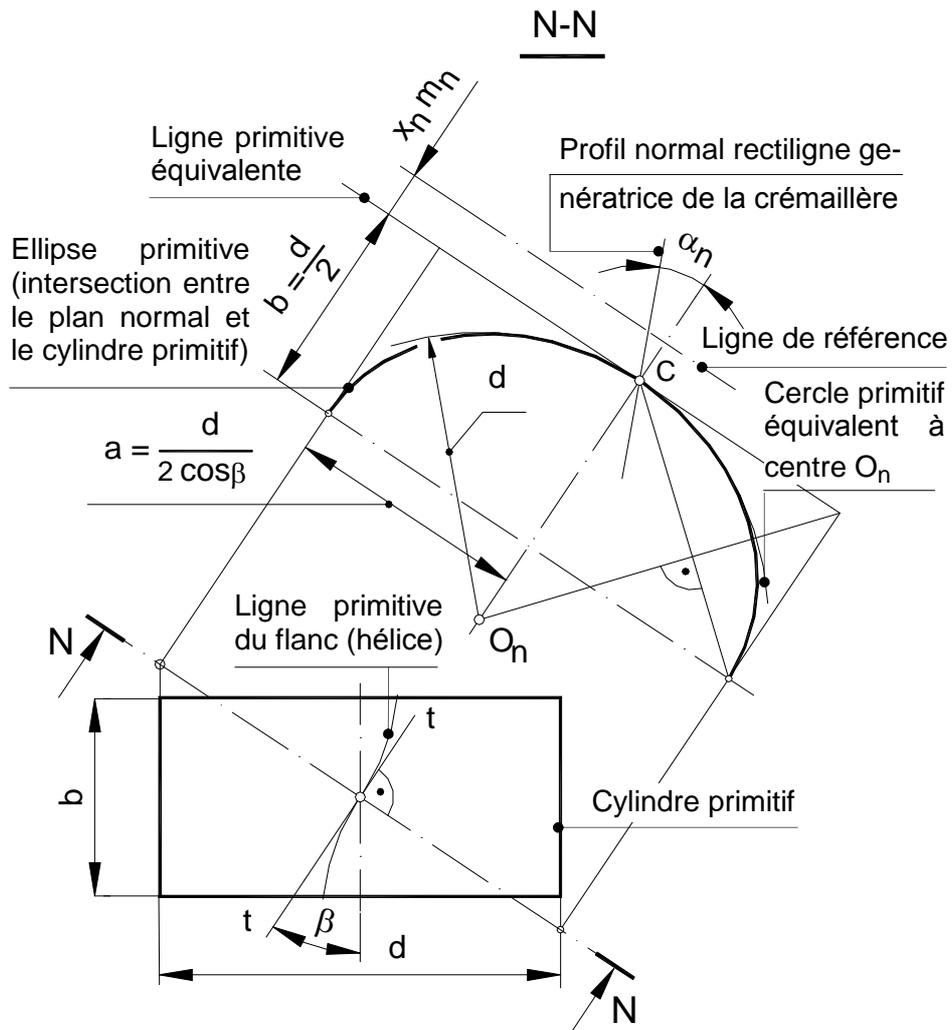


Fig. 2.32. *Éléments géométriques de la roue dentée équivalente (sans la représentation de la denture)*

Il en résulte ce nombre de dents équivalent:

$$z_n = \frac{z}{\cos^3 \beta}. \quad (2.55)$$

Le nombre des dents équivalent sert:

1. au choix de la fraise utilisée pour l'exécution individuelle (par copiage) de la denture hélicoïdale (quand cette fraise a la forme de l'entredent dans la section normale N-N);
2. à établir certaines grandeurs de la roue dentée à denture hélicoïdale, considérées valables pour la roue dentée équivalente (à denture droite); ces grandeurs sont nécessaires dans le calcul de résistance des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale.

2.2.1.8. Éléments géométriques de l'engrenage

2.2.1.8.1. Éléments géométriques de base

Soit un engrenage plus. Soit aussi cet engrenage composé particulièrement par deux roues plus (à fin de réaliser un dessin plus suggestif de la situation de génération des roues ; mais le problème peut être mit similairement pour un quelconque type d'engrenage d'après le signe du déport des roues).

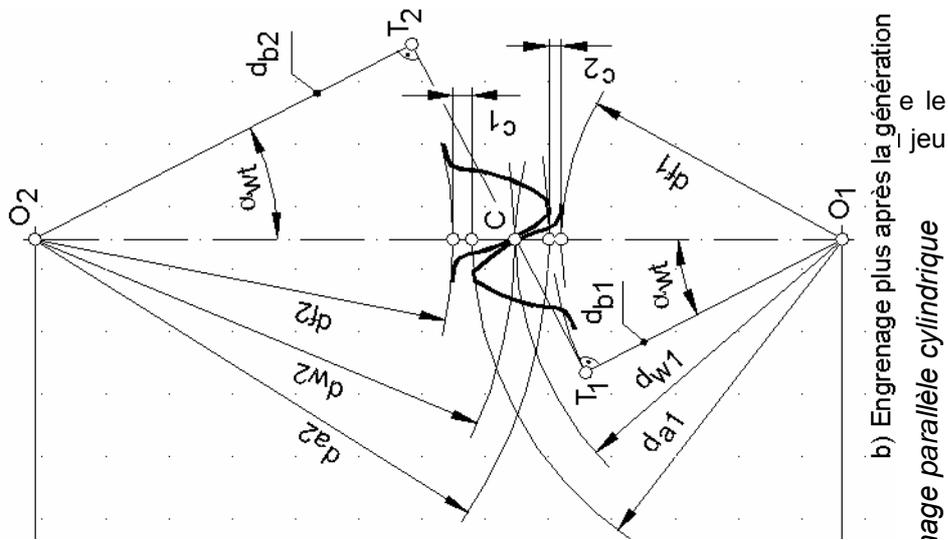
Sur la fig. 2.33, a est représentée la situation de génération des deux roues, en utilisant le même profil frontal générateur (il est tracé seulement comme une portion de ligne droite). Les centres des roues se trouvent à l'entraxe de génération :

$$a_g = \frac{d_1 + d_2}{2} + x_{n1} m_n + x_{n2} m_n. \quad (2.56)$$

La figure montre les lignes de la crémaillère (de référence, primitives), les lignes d'engrènement dans les deux générations des roues dentées et des portions des développantes engendrées par le profil frontal générateur. On y voit qu'il y a un jeu entre les profils conjugués. Mais la géométrie de l'engrènement s'étudie théoriquement sans jeu entre les deux profils conjugués. Celui-ci doit être éliminé par le rapprochement des centres des roues, à l'entraxe de fonctionnement a_w (fig. 2.33, b). Dans la nouvelle position, les développantes du cercle des deux roues deviennent tangentes (le point de contact est particulièrement C^1).

On met le problème de déterminer le nouvel entraxe a_w . Pour cela, on calcule indirectement l'angle de pression de fonctionnement frontal α_{wt} , à cet entraxe. On commence de l'observation (le sous-chapitre 2.2.1.4) que les pas primitifs (de roulement) de fonctionnement sont identiques :

$$p_{wt1} \equiv p_{wt2} = p_{wt}. \quad (2.57)$$



En fonction de l'épaisseur et de l'intervalle primitifs frontaux de fonctionnement de la dent à chaque roue, il en résulte:

$$p_{wt} = s_{wt1} + e_{wt1} = s_{wt2} + e_{wt2} . \quad (2.58)$$

On met en outre la condition de roulement qui est très logique:

$$\begin{aligned} s_{wt1} &= e_{wt2}; \\ e_{wt1} &= s_{wt2}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

Il en résulte le pas primitif frontal comme la somme des épaisseurs primitifs frontaux des dents conjuguées :

$$p_{wt} = s_{wt1} + s_{wt2} . \quad (2.60)$$

En particulierisant l'expression (2.49) de l'épaisseur frontale quelconque de la dent à celle de l'épaisseur frontale primitive de fonctionnement à chaque roue, l'expression antérieure devient:

$$p_{wt} = (\text{inv}\alpha_{vt1} - \text{inv}\alpha_{wt}) d_{w1} + (\text{inv}\alpha_{vt2} - \text{inv}\alpha_{wt}) d_{w2} . \quad (2.61)$$

Le pas primitif frontal s'obtient en utilisant les expressions (2.21) et (2.45):

$$p_{wt} = p_{bt} \frac{1}{\cos\alpha_{wt}} = p_t \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} = \pi \frac{m_n}{\cos\beta} \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} . \quad (2.62)$$

D'autre part, les diamètres primitifs des deux roues dentées reçoivent la forme en utilisant l'expression (2.41) :

$$d_{w1(2)} = d_{b1(2)} \frac{1}{\cos\alpha_{wt}} = d_{1(2)} \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} = \frac{m_n Z_{1(2)}}{\cos\beta} \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} . \quad (2.63)$$

Comme résultat, l'expression (2.61) du pas primitif frontal devient :

$$\begin{aligned} \pi \frac{m_n}{\cos\beta} \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} &= (\text{inv}\alpha_{vt1} - \text{inv}\alpha_{wt}) \frac{m_n Z_1}{\cos\beta} \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} + \\ &+ (\text{inv}\alpha_{vt2} - \text{inv}\alpha_{wt}) \frac{m_n Z_2}{\cos\beta} \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} . \end{aligned} \quad (2.64)$$

Après les simplifications et transformations il en résulte l'expression de **l'angle d'engrènement frontal** qui s'obtient pour un entraxe a_w :

$$\text{inv}\alpha_{wt} = 2 \frac{X_{n1} + X_{n2}}{Z_1 + Z_2} \text{tg}\alpha_n + \text{inv}\alpha_t . \quad (2.65)$$

L'entraxe de fonctionnement peut être écrit en fonction de cet angle primitif de fonctionnement (fig. 2.32, b):

$$a_w = \frac{d_{b1} + d_{b2}}{2} \frac{1}{\cos\alpha_{wt}} = \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} . \quad (2.66)$$

Cet entraxe peut être écrit aussi dans la forme :

$$a_w = a \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}}, \quad (2.67)$$

où on a intervenu **l'entraxe de référence**, défini comme la demi - somme des diamètres primitifs :

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2}. \quad (2.68)$$

Comme on va montrer plus tard dans la méthode de calcul géométrique, on obtient l'angle de pression de fonctionnement α_{wt} pour un entraxe donnée (normalisée). Il permet l'établissement des **diamètres primitif de fonctionnement** $d_{w1(2)}$, se voir l'expression (2.63).

Enfin, on peut calculer les jeux à la tête en fonctionnement (fig. 2.33, b):

$$c_{1(2)} = a_w - \frac{d_{a1(2)}}{2} - \frac{d_{f2(1)}}{2}. \quad (2.69)$$

Tableau 2.1. Influence de la somme des coefficients de déport de profil sur la corrélation entre différentes grandeurs géométriques

Type de l'engrenage d'après la somme des coefficients (normales) de déport de profil, $x_{ns} = x_{n1} + x_{n2}$	Corrélation entre		
	l'angle d'engrènement frontal, α_{wt} , et l'angle de référence frontal, α_t , conformément à (27.75)	l'entraxe de fonctionnement, a_w , et l'entraxe de référence, a , conformément à (27.77)	les diamètres primitifs de fonctionnement, $d_{w1(2)}$, et les ϕ les diamètres primitifs, $d_{1(2)}$, conformément à (27.73)
Plus, $x_{ns} > 0$	$\alpha_{wt} > \alpha_t$	$a_w > a$	$d_{w1(2)} > d_{1(2)}$
Zéro ou zéro-deporté, $x_{ns} = 0$	$\alpha_{wt} = \alpha_t$	$a_w = a$	$d_{w1(2)} = d_{1(2)}$
Moins, $x_{ns} < 0$	$\alpha_{wt} < \alpha_t$	$a_w < a$	$d_{w1(2)} < d_{1(2)}$

Observations. On peut établir les suivantes dépendances relatives (tableau 2.1) :

- entre l'angle d'engrènement frontal, α_{wt} , et l'angle de référence frontal, α_t , conformément (2.65) ;
- entre l'entraxe de fonctionnement, a_w , et l'entraxe de référence, a , conformément à (2.67) ;

- c) entre les diamètres primitifs de fonctionnement, $d_{w1(2)}$, et les diamètres primitifs, $d_{1(2)}$, conformément à (2.63). On mentionne que les diamètres primitifs de fonctionnement coïncident avec ceux primitifs seulement à l'engrenage zéro ou zéro - déporté (donc si la somme de coefficients de déplacement de profil est zéro, $x_{ns} = 0$).

2.2.1.8.2. Rapport de conduite

Le schéma général d'engrènement en vue frontale et dans le plan d'engrènement (rabattu) qui est donné sur la fig. 2.34 permet la définition et le calcul du rapport de conduite.

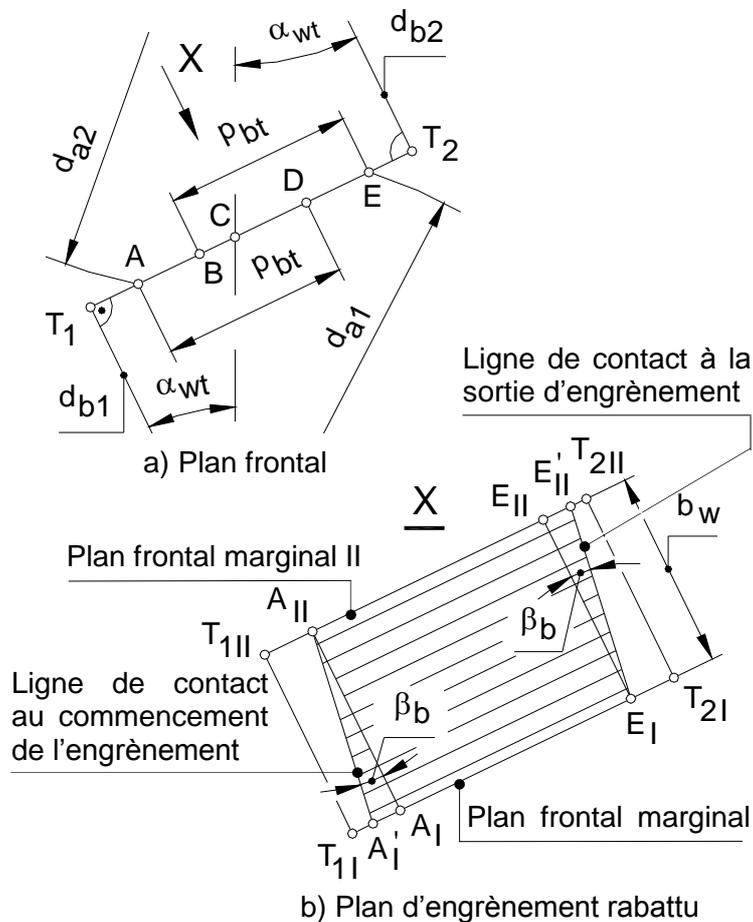


Fig. 2.34. Schéma d'engrènement pour le calcul du rapport de conduite

Analyse dans le plan frontal. Dans la vue frontale (fig. 2.34, a), le segment d'engrènement est AE, dans lequel :

- A est le point théorique de commencement d'engrènement ; il est le point d'intersection entre la ligne d'engrènement, T_1T_2 , et le cercle de tête de la roue 2, de diamètre d_{a2} ;
- E est le point théorique de sortie d'engrènement ; il est le point d'intersection entre la ligne d'engrènement, T_1T_2 , et le cercle de tête de la roue 1, de diamètre d_{a1} ¹.

Sur ce segment d'engrènement frontal, AE, peuvent être définis deux autres points caractéristiques, B et D, qui sont distancés de E et, respectivement, A par le pas de base frontal, p_{bt} . On a facile l'intuition que :

- les segments résultés, $AB = DE$, sont d'*engrènement bipare* (deux paires de dents en engrènement simultané) ;
- le segment BD est d'*engrènement unipare* (un seul paire de dents en engrènement)².

Comme résultat :

- B est le point théorique d'entrée dans l'engrènement unipare ;
- D est le point théorique de sortie de l'engrènement unipare.

Le **rapport de conduite frontal** représente la grandeur relative de l'existence de l'engrènement bipare (ou, plus généralement, du nombre maximal de paires de dents en engrènement simultané) dans l'entière période d'engrènement. Il est défini par l'expression (fig. 2.34, a), :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{AE}{p_{bt}}. \quad (2.70)$$

Cette expression peut être développée aisément :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - a_w \sin \alpha_{wt}}{p_{bt}} = \\ &= \frac{\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - 2 a_w \sin \alpha_{wt}}{2 \frac{\pi m_n}{\cos \beta}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

A l'engrenage à roues définites par la crémaillère génératrice standard, il y a :

$$1 < \varepsilon_\alpha < 2. \quad (2.72)$$

¹ On mentionne que les point réels d'entrée et de sortie en engrènement sont différents de A et E ; vraiment, les déformations sous charge des paires de dents déterminent leurs positions en dehors de la ligne d'engrènement.

² L'existence de l'engrènement maximal bipare est spécifique à l'engrenage à roues définites par la crémaillère génératrice standard.

Analyse du plan d'engrènement rabattue (fig. 2.34, b). Il y a une portion de ce plan qui est déterminé par l'intersection avec les deux cylindres de tête des roues : le rectangle $A_I A_{II} E_I E_{II}$, qui est spécifique pour le rapport de conduite frontal. Les sens d'inclinaison des dents conjuguées (droit pour pignon et gauche pour roue) sont définies par la position des lignes de contact entre les dents conjuguées sur le plan d'engrènement ; ces lignes sont tracés au commencement de l'engrènement (la ligne $A_I' A_{II}'$, sur laquelle A_I' est le point d'entrée en engrènement) et à la sortie d'engrènement (la ligne $E_I' E_{II}'$, sur laquelle E_{II}' est le point de sortie d'engrènement). D'ici on peut déduire une conclusion importante : l'engrènement dans un plan frontal quelconque se développe sur un segment d'engrènement frontal plus longue que le celui d'engrènement frontale AE , à cause de l'inclinaison des dents. On discute ce problème dans le plan frontal marginal I-I (on va avoir l'intuition simple que les résultats de cette discussion sont similaires, de raison de symétrie, pour le quelconque plan frontal) : à cause de l'inclinaison de dents, l'engrènement frontale est plus grande à segment $A_I' A_I$ que le segment $A_I E_I$. Cet **engrènement supplémentaire** ou **axiale** (déterminé par l'inclinaison de la denture) est caractérisé par le **rapport de recouvrement** ou **de conduite supplémentaire** ou **de conduite axial** :

$$\varepsilon_\beta = \frac{A_I' A_I}{p_{bt}} . \quad (2.73)$$

Dans une première forme, l'expression antérieure s'écrit :

$$\varepsilon_\beta = \frac{A_I' A_I}{p_{bt}} = \frac{b_w \operatorname{tg} \beta_b}{p_{bt}} , \quad (2.74)$$

où a intervenue la longueur de travail (commune) de la denture sur la direction axiale, b_w . En règle générale, on considère que ce longueur est le plus petite entre les longueurs des dents, $b_w = \min[b_1; b_2]$.

L'expression (2.16) s'écrit sur le cylindre primitif :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{d_b} \operatorname{tg} \beta_b ,$$

d'où on obtient:

$$\operatorname{tg} \beta_b = \frac{d_b}{d} \operatorname{tg} \beta = \cos \alpha_t \operatorname{tg} \beta . \quad (2.75)$$

Comme résultat, le rapport de recouvrement devient:

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b_w \operatorname{tg}\beta_b}{p_{bt}} = \frac{b_w \cos\alpha_t \operatorname{tg}\beta}{\frac{\pi m_n}{\cos\beta} \cos\alpha_t} = \frac{b_w \sin\beta}{\pi m_n}. \quad (2.76)$$

Enfin, on définit le **rapport total de conduite**, comme la somme des deux rapport de conduite, frontal et axial :

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}. \quad (2.77)$$

Les suivantes observations sont utiles.

1. Le rapport total de conduite est plus grand à l'engrenage à denture hélicoïdale par rapport à l'engrenage à denture droite. Avec les mêmes éléments géométriques de base : module, nombres de dents et coefficients de deport. Donc, la distribution de la charge est faite sur des longueurs plus grandes des lignes de contact, ce qui détermine une portance agrandie (c'est-à-dire une charge agrandie jusqu'à la limite de résistance) à l'engrenage à denture hélicoïdale.
2. Si $\varepsilon_{\gamma} \geq 2$, la charge qui revient à une paire de dents est plus petite sur la durée de l'engrènement du petite nombre de dents (qui est bipare dans ce cas). C'est une autre modalité d'augmentation de la portance de l'engrenage.
3. Si même $\varepsilon_{\gamma} < 2$, accroît la portance à la sollicitation de rupture par fatigue des dents (se voir le sous- chapitre 2.2.5).

En conclusion, l'analyse du rapport de conduite montre que l'engrenage à denture hélicoïdale a une portance agrandie par rapport à l'engrenage à denture droite. Cette conclusion est valable pour des valeurs limitées de l'angle d'inclinaison de la denture, qui ne détermine pas la surcharge du sommet (coin) de la dent (se voir le sous- chapitre 2.2.5).

2.2.1.9. Encadrement géométriques dans les limites d'engendrement et d'engrènement

2.2.1.9.1. Critères

Les critères d'encadrement géométriques dans limites d'engendrement et de l'engrènement sont donnes sur la fig. 2.35.

L'encadrement de la géométrie dans ces limites assure un bon fonctionnement : de résistance, de durabilité, du comportement aux vibrations et acoustique.

2.2.1.9.2. Evitement de l'interférence de taillage

On a été montre sur la fig. 2.29 que le point limite U_p du profil rectiligne de la crémaillère génératrice se trouve sur la ligne d'engrènement au-dessus du point T (entre T et C).

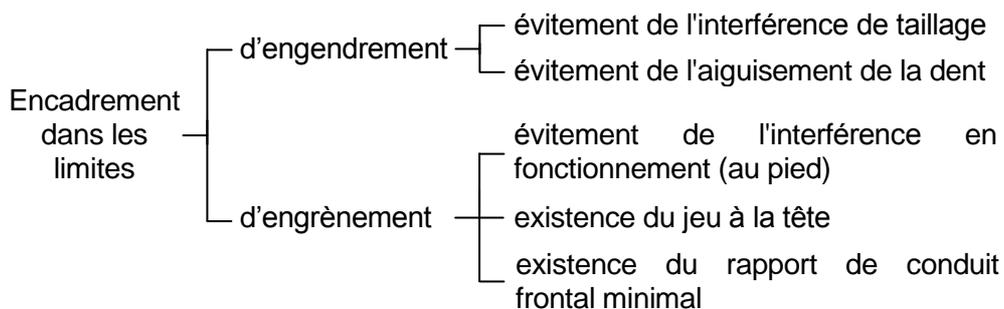


Fig. 2.35. Critères d'encadrement géométriques dans limites d'engendrement et de l'engrènement

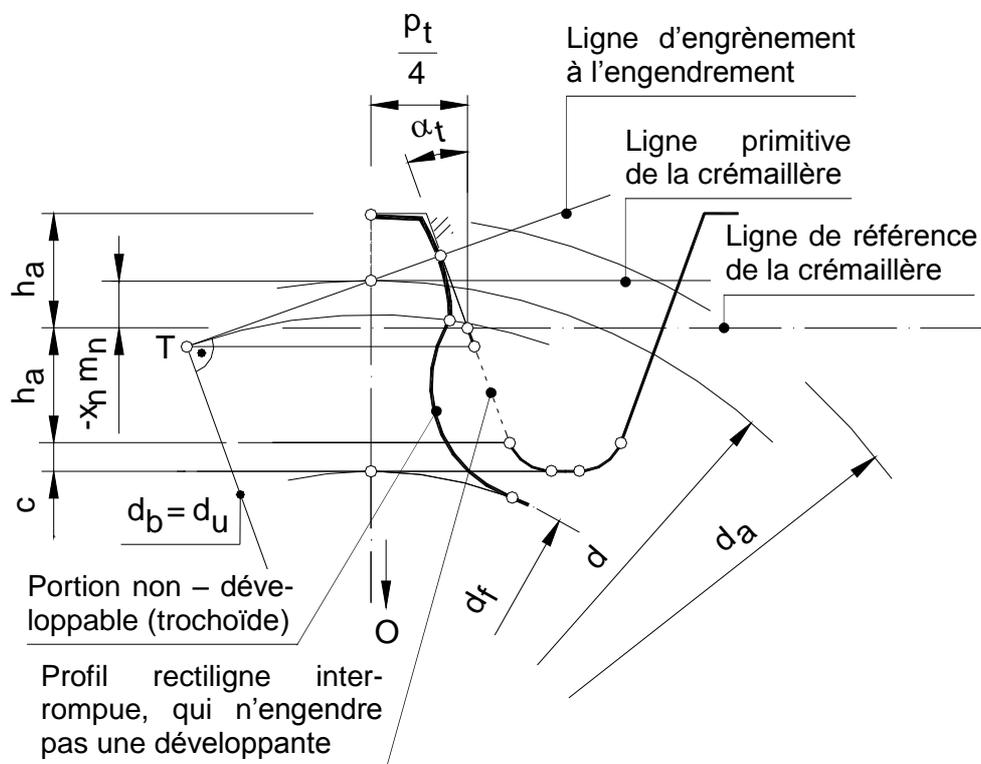


Fig. 2.36. Exemple de forme de dent quand il y a interférence de taillage

S'il y a une portion du profil rectiligne génératrice sous le point T (fig. 2.36), le pied de la dent est dégagée (la forme frontale du profil est une courbe qui est appelée **trochoïde**¹. On dit que se produit **le phénomène d'interférence de taillage**.

¹ On ne discute plus sur cet engendrement, en considérant que les inscriptions sur la fig. 2.36 sont suffisantes pour la mettre en évidence.

Ce phénomène est négatif pour la résistance mécanique de la dent puisque :

1. la section portante du pied est plus réduite;
2. la concentration des tensions est plus grande à cause de la forme plus critique du pied.

Il en résulte la nécessité d'éviter l'interférence de taillage. Pour cela on impose la condition que la ligne droite (parallèle à la ligne de référence) qui passe par le point limite U_p du profil rectiligne génératrice (fig. 2.28) s'entrecroise la ligne d'engrènement au-dessus de T. C'est-à-dire, le rayon de courbure du point U de la développante (qui correspond au point U_p) doit être (fig. 2.28):

$$\rho_u = TU_p \geq 0. \quad (2.78)$$

On observe que :

$$\rho_u = TC - U_p C = \frac{d}{2} \sin \alpha_t - (h_a - x_n m_n) \frac{1}{\sin \alpha_t}, \quad (2.79)$$

donc la condition (2.78) s'écrit dans la forme plus détaillée:

$$\frac{z}{2 \cos \beta} \sin \alpha_t - (h_a^* - x_n) \frac{1}{\sin \alpha_t} \geq 0. \quad (2.80)$$

La condition (2.80) peut être accomplie par deux variantes : quand on connaît x_n ou z .

1. **On donne le coefficient normal de déport de profil, x_n .** Il en résulte le nombre de dents pour éviter l'interférence au taillage :

$$z \geq z_{\min} = \frac{2(h_a^* - x_n) \cos \beta}{\sin \alpha_t} \geq 0. \quad (2.81)$$

Pour $\beta = 0$ et $x_n = 0$ (la denture droite et zéro), donc $\alpha_t = \alpha_n = 20^\circ$, on obtient:

$$z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_n} = \frac{2}{\sin^2 20^\circ} \approx 17 \text{ dents}. \quad (2.82)$$

2. **On donne le nombre de dents, z .** Il résulte de (2.80):

$$x_n \geq x_{n \min} = h_a^* - \frac{z \sin^2 \alpha_t}{2 \cos \beta}. \quad (2.83)$$

Pour $\beta = 0$ (la denture droite) :

$$x_{n \min} = 1 - \frac{z}{\frac{2}{\sin^2 \alpha_n}} = 1 - \frac{z}{17} = \frac{17 - z}{17} . \quad (2.84)$$

2.2.1.9.3. Evitement de l'aiguïsement de la dent

En utilisant l'expression (2.49) on résulte l'arc de tête de la dent:

$$s_{at} = (\text{inv } \alpha_{vt} - \text{inv } \alpha_{at}) d_a . \quad (2.85)$$

Cette grandeur se diminue quand de la déport de la roue est plus (l'aspect n'est pas démontrée dans cet ouvrage, mais il peut être voir simplement par une application numérique). Pour éviter la rupture au sommet de la dent, l'arc de tête doit être limité inférieurement, on considère conventionnellement que l'arc minimal admis est:

$$s_{at \min} = 0,3 m_t . \quad (2.86)$$

Si on obtient $s_{at} < s_{at \min}$, on procède au raccourcissement de la dent. C'est-à-dire, on calcule le diamètre de la tête raccourci, d_{ar} , en partant, par exemple, de la condition $s_{at} = s_{at \min}$. Autrement dit, on solutionne l'équation transcendante :

$$f(d_a) = s_{at} - s_{at \min} = 0 . \quad (2.87)$$

Cet équation est implicite en d_a , parce que ce diamètre de tête apparaît en $\text{inv } \alpha_{at}$ par la grandeur:

$$\cos \alpha_{at} = \frac{d_b}{d_a} . \quad (2.88)$$

C'est pourquoi la solution de (2.87) se fait numériquement.

2.2.1.9.4. Evitement de l'interférence en fonctionnement

Soit la fig. 2.37, sur laquelle sont représentés les profils en contact dans les points de commencement, A, et de sortie, E, de l'engrènement frontal. Il est nécessaire que le profil de la dent de la roue 1 soit en A en développante. Sinon n'engrène pas deux développantes et la loi d'engrènement plan frontal n'est pas satisfaite; ce fait est appelé **l'interférence en fonctionnement (au pied)**. La discussion est similaire en point E: le profil de la dent de la roue 2 doit être en développante en E.

On mentionne que l'interférence au pied conduit aux répercussions négatives spécifiques déterminées par l'insatisfaction de la loi d'engrènement :

- chocs d'engrènement ;
- blocage de l'engrenage ;

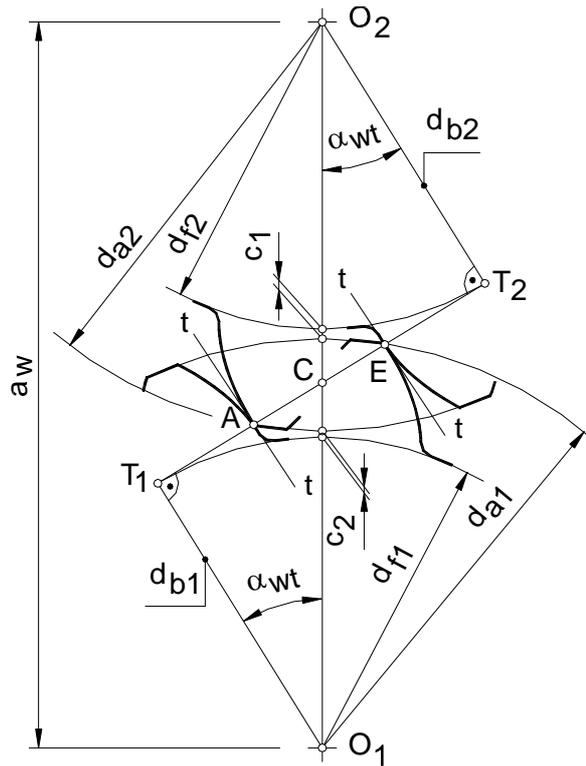


Fig. 2.37. Schéma pour l'analyse de l'interférence en fonctionnement (au pied)

particularise pour chaque roue. Les rayons de courbure de travail ρ_{t1} et ρ_{t2} sont (fig. 2.37) :

$$\rho_{t1} = T_1A = T_1T_2 - AT_2 = a_w \sin \alpha_{wt} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} ; \quad (2.90)$$

$$\rho_{t2} = T_2E = T_1T_2 - T_1E = a_w \sin \alpha_{wt} - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} .$$

Si les conditions (2.89) n'en sont pas satisfaites, on procède au raccourcissement des dents :

1. de la roue 2, en tenant compte du besoin de l'engrènement correcte en A, en partant de la condition à la limite $\rho_{t1} = \rho_{u1}$, d'où on obtient le rayon raccourcie de tête de cette roue 2 :

$$r_{a2r} = \sqrt{(a_w - \rho_{u1})^2 + r_{b2}^2} ; \quad (2.91)$$

2. de la roue 1, en tenant compte du besoin de l'engrènement correcte en E, en partant de la condition à la limite $\rho_{t2} = \rho_{u2}$, d'où on obtient le rayon raccourcie de tête de cette roue :

$$r_{a1r} = \sqrt{(a_w - \rho_{u2})^2 + r_{b1}^2} . \quad (2.92)$$

- intensification de l'usure ;
- rupture des dents ;
- bruit augmenté.

Les conditions d'évitement de l'interférence au pied sont :

$$\begin{aligned} T_1A = \rho_{t1} &\geq \rho_{u1} ; \\ T_2E = \rho_{t2} &\geq \rho_{u2} , \end{aligned} \quad (2.89)$$

où :: ρ_{t1}, ρ_{t2} sont les rayons de courbure de travail du profil de la dent de la roue 1 et, respectivement, de la roue 2; ρ_{u1}, ρ_{u2} - les rayons de courbure utiles du profil de la dent de la roue 1 et, respectivement, de la roue 2.

Les rayons de courbure utiles ρ_{u1} et ρ_{u2} sont donnés par l'expression (2.79), qui se

2.2.1.9.5. Existence du jeu à la tête

Les jeux de tête $c_{1(2)}$ sont indiqués sur la fig. 2.32, b ou 2.36. Ils sont donnés par l'expression (2.69). On impose la condition que ces jeux soient plus grands que les valeurs minimales:

$$c_{1(2)} \geq c_{\min} = 0,1 m_t . \quad (2.93)$$

Sinon, le fonctionnement est défectueux (spécialement – un rendement plus réduit), puisque on apparaît :

1. une résistance hydraulique augmentée à cause de la compression de l'huile dans l'espace du jeu;
2. une compression des impuretés dans cet interstice, ce qui donne une résistance supplémentaire mécanique.

Si les conditions (2.93) ne sont pas satisfaites, on raccourcit de façon convenable les dents en imposant la condition à la limite, $c_{1(2)} = c_{\min}$, d'où résultent les diamètres de tête raccourcis, d_{a1} ou d_{a2} .

2.2.1.9.5. Existence du rapport de conduit frontal minimal

On a été montré au sous-chapitre 2.2.1.8.3 que le rapport de conduit frontal, ε_α , doit être supérieur à l'unité, pour réaliser la transmission du mouvement sans intermittences d'une roue à l'autre. On impose plus généralement :

$$\varepsilon_\alpha \geq \varepsilon_{\alpha \min} . \quad (2.94)$$

Les valeurs minimales de rapport de conduite frontal sont :

1. à la denture droite :

$$\varepsilon_{\alpha \min} = 1,2 , \quad (2.95)$$

pour éviter les intermittences d'engrènement dans la présence des écarts, qui peuvent déterminer un engrènement unipare ;

2. à la denture hélicoïdale :

$$\varepsilon_{\alpha \min} = 1 , \quad (2.96)$$

puisque l'existence du rapport de recouvrement, $\varepsilon_\beta \neq 0$, détermine des valeurs du rapport de conduit total bien plus grandes à 1, $\varepsilon_\gamma \geq 1$.

2.2.1.10. Modification de la denture

2.2.1.10.1. Modalités de modification de la denture

La modification de la denture représente le changement de la géométrie de la denture en vue d'un meilleur comportement de l'engrenage : on apparaît des effets favorables sur la résistance et la durabilité et un meilleur comportement aux vibrations et acoustique.

Les modalités de modification de la denture sont groupées dans le schéma donné par la fig. 2.38.

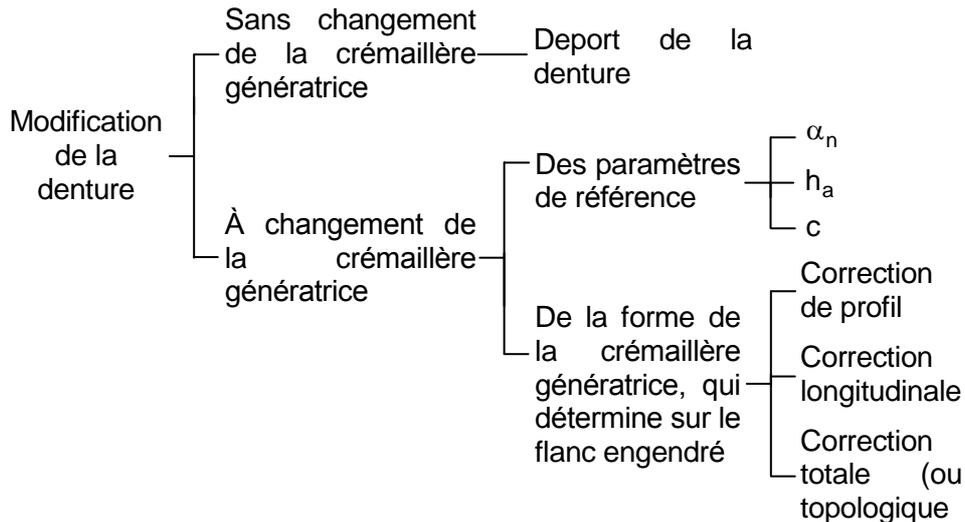


Fig. 2.38. Critères de modification géométrique de la denture

2.2.1.10.2. Modification de la denture par le déport de profil

Le déport de profil ¹ représente un avantage exceptionnel offert par l'engrènement en développante de cercle, qui n'implique pas un effort technologique: on change seulement la position de l'outil par rapport à la roue qui est usinée.

L'étude de l'engrènement met en évidence les avantages favorables offerts par le déport plus, qui déterminent l'utilisation remarquable de ce déplacement.

Les effets favorables à la roue plus (déterminés par le déport plus) sont :

1. l'évitement de l'interférence de taillage, se voir l'expression (2.83);
2. l'augmentation de l'épaisseur du pied de la dent, qui est visible en analysant l'arc primitif frontal de la dent, s_t , donnée par l'expression (2.47). L'effet est visible sur la fig. 2.39, où sont tracés les profils en développante du cercle entre le cercle de base et les cercles de tête correspondantes pour trois coefficients de déport : l'épaisseur de base de la dent, s_{bt} , accroît avec le déport vers celui positive. Par conséquent, on augmente la résistance à la rupture du pied de la dent ;

¹ Voir les considérations définitives du sous-chapitre 2.2.1.7.2.

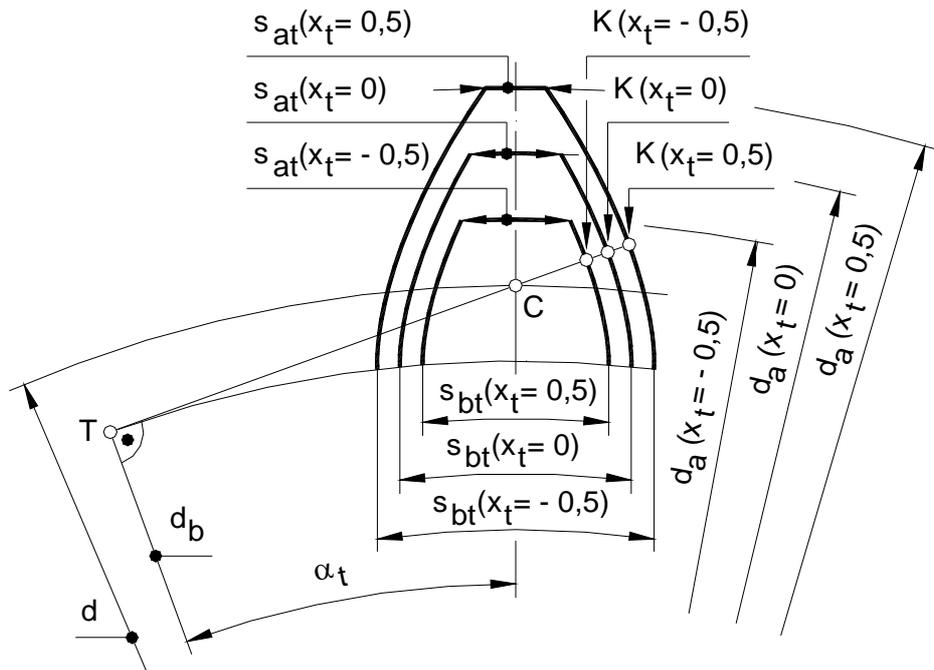


Fig. 2.39. Profils en développante du cercle (qui sont tracés entre le cercle de base et les différents cercles de tête) pour différents dépôts de la denture (profil)

$$z = 19 \text{ dents ; } \beta = 0^\circ .$$

Sur la figure sont modifiées en fonction du dépôt (les coefficients de dépôt sont donnés entre parenthèses) : 1. les points K sur la normale sur la développante ; 2. les diamètres de tête, d_a ; 3. les épaisseurs de base, s_{bt} ; 4. les épaisseurs de tête, s_{at} .

3. l'augmentation du rayon de courbure de tous les points de la développante. Vraiment, conformément à la fig. 2.40 on voit que :

$$TK'' > TK' , \quad (2.97)$$

où : TK' est le rayon de courbure de la développante non - déportée (zéro); TK'' - le rayon de courbure de la développante plus. Le rayon de courbure plus grand détermine l'augmentation de la portance de la denture à la sollicitation de contact des flancs ¹.

L'effet défavorable à la roue plus est le danger de l'aiguïsement de la dent (on peut voir cet aspect par des calculs).

Les engrenages déportés assurent l'entraxe désiré. Les autres effets du dépôt de la denture sur l'engrenage ne sont pas étudiés en détail dans notre cours. On fait seulement quelques remarques sur les engrenages plus :

¹ Voir aussi le sous-chapitre 2.2.2.4.

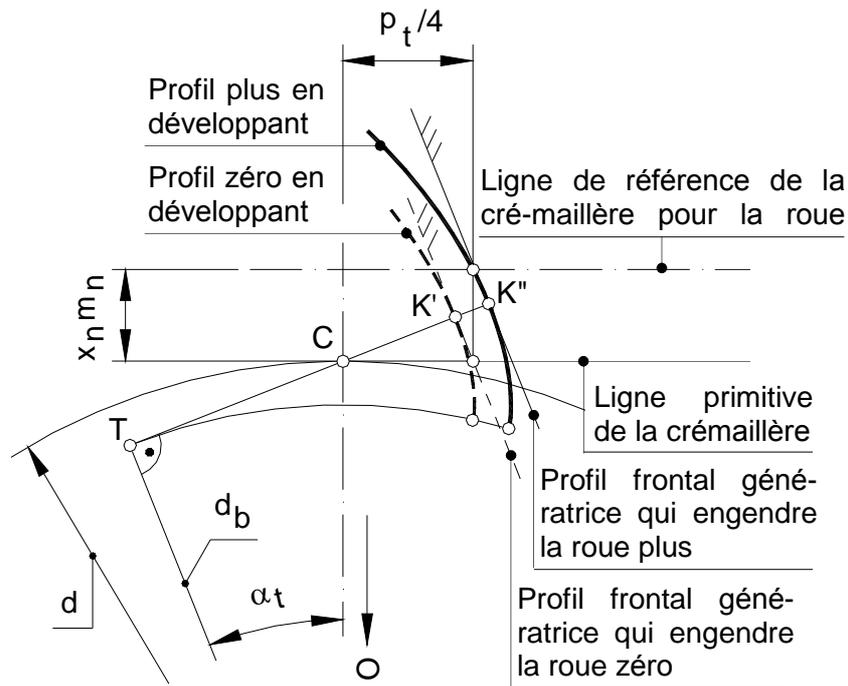


Fig. 2.40. Rayons de courbure de la développante non - déportée et plus

1. le rapport de conduit frontal, ε_α , se réduit ; cet effet défavorable est estompée si le rapport de conduit total reste suffisamment grand ;
2. les glissements relatifs (caractérisés par la différence des vitesses de glissement tangentielles $\vec{v}_{K1}^t - \vec{v}_{K2}^t$ (se voir la fig. 2.10) ont des valeurs maximales plus réduites. Par conséquent, se réduit aussi le danger de l'usure associé à celui de grippage.

2.2.1.10.3. Modification des paramètres de référence de la crémaillère génératrice

A. Modification de l'angle de pression de référence

En général on augmente cet angle (une valeur est $\alpha_n = 28^\circ$). **Les effets sur la roue** de l'augmentation de l'angle de pression de référence sont mentionnés ci-après (fig. 2.41).

1. On augmente l'épaisseur de la dent au pied, d'où il résulte une portance agrandie à la sollicitation de rupture de la dent.
2. On augmente les rayons de courbure des développantes ($T''K > T'K$), donc agrandit la portance à la sollicitation de contact par fatigue des flancs .

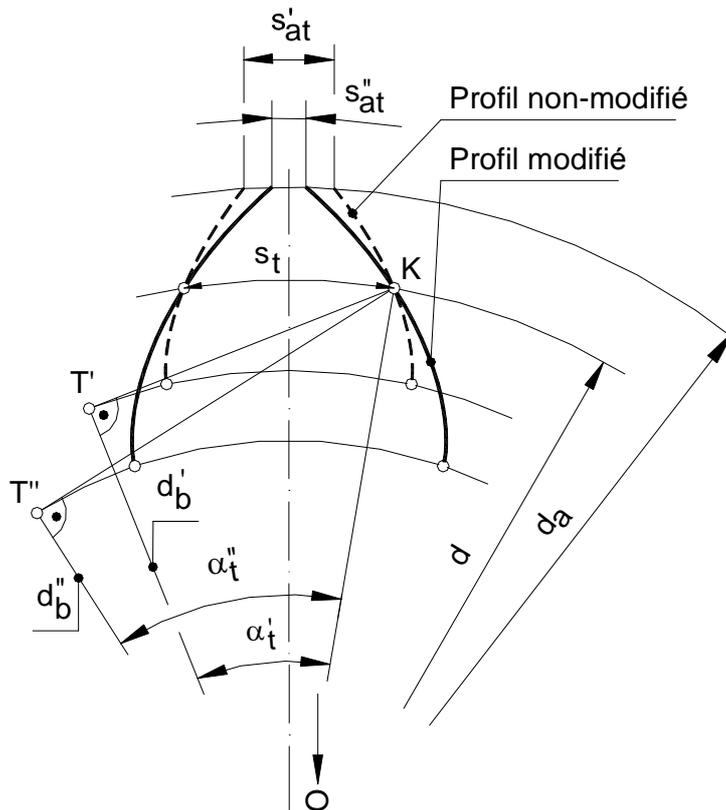


Fig. 2.41. Effets de la modification de l'angle de pression de référence frontal ($\alpha_t'' > \alpha_t'$)

3. On réduit le danger de l'interférence au taillage. Vraiment, en utilisant l'expression (2.81) on obtient :

$$z_{\min}'' = \frac{2(h_a^* - x_n) \cos \beta}{\sin^2 \alpha_t''} < z_{\min}' = \frac{2(h_a^* - x_n) \cos \beta}{\sin^2 \alpha_t'} \quad (2.98)$$

ou, en utilisant (2.83) :

$$x_{n \min}'' = h_a^* - \frac{z \sin^2 \alpha_t''}{2 \cos \beta} < x_{n \min}' = h_a^* - \frac{z \sin^2 \alpha_t'}{2 \cos \beta} \quad (2.99)$$

4. Le danger d'aiguisement de la dent s'agrandit. Vraiment, on voit sur la fig. 2.41 que $s_{at}'' < s_{at}'$. C'est pourquoi l'augmentation de l'angle de pression normale, α_n , est accompagnée d'une réduction de la hauteur de tête, h_a (on accepte en règle générale dans ce cas le coefficient minimal $h_a^* = 0,8$). Mais la réduction de la hauteur de la tête détermine un effet favorable : un moment de flexion de la dent

plus petit, donc un meilleur comportement de la dent à sa sollicitation de rupture (se voir le calcul de résistance).

Les effets sur l'engrenage sont présentés seulement comme des remarques (sans démonstrations). Ils sont identiques à ceux déterminés par le déport plus:

1. la diminution du rapport de conduit frontal, ε_α ;
2. la diminution des valeurs maximales des glissements relatifs.

B. Modification du coefficient de la hauteur de tête de référence

Ce coefficient peut être diminué ou augmentée.

La diminution de ce coefficient détermine :

1. **aux roues :**
 - a) la réduction du danger de l'interférence de taillage. Ce fait s'observe simplement par l'analyse des expressions (2.81) et (2.83) : le nombre minimal de dents, z_{\min} , et le coefficient minimal de déport, $x_{n\min}$, se réduisent à la diminution de h_a^* ;
 - b) un bras plus petit de flexion de la force donne un meilleur comportement de la dent à la sollicitation de rupture (se voir aussi le calcul de résistance).
2. **aux engrenages :** les mêmes effets que ceux déterminés par le déport plus ou par l'augmentation de l'angle de pression de référence.

L'augmentation du coefficient de la hauteur de tête de référence conduit à l'obtention des hautes dentures. Quoique le bras de flexion de la force augmente, les effets sont favorables en analysant l'engrènement dans le cas plus simple d'analyse de la denture est droite :

1. on peut assurer un rapport de conduit frontal plus grand que 2 (en général, $2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$). Par conséquence, la charge maximale qui revient à une paire de dents se réduit et il en résulte un meilleur comportement de la dent à ces sollicitations mécaniques;
2. on peut assurer une valeur nombre naturel du rapport de conduit frontal ou de recouvrement. On démontre que dans ce cas on obtient un atténuation de la variation en temps (à la longue de la ligne d'engrènement) de la rigidité de l'engrènement ; par conséquence, on obtient ainsi l'amélioration du comportement aux vibrations et acoustique de l'engrenage ¹.

¹ On démontre dans la théorie d'engrènement que la rigidité de l'engrènement se modifie en marches à la logue de la ligne d'engrènement aux engrenages

C. Modification du coefficient du jeu de référence (à tête/pied)

En règle générale, le coefficient c est agrandi à $c^* = 0,3...0,4$. On permet ainsi la réalisation de l'outil à protubérance (fig. 2.42, a). Le profil normal de la crémaillère à protubérance a une deuxième portion de ligne droite à la hauteur c_{pr} , ayant l'angle de pression $\alpha_{n,pr}$. Ce profil réalise une forme de dent avec un dégagement délibéré du pied (fig. 2.42, b); vraiment, après la rectification du flanc (la technologie courante de finissement appliquée aux roues d'aciers de carbonisation - trempe, qui sont les plus utilisés aujourd'hui), le profil final doit rester sans le dégagement. A la différence, la dent faite par la crémaillère sans modification présente après rectification un seuil défavorable (fig. 2.43), puisque il est un concentrateur de forme de tensions.

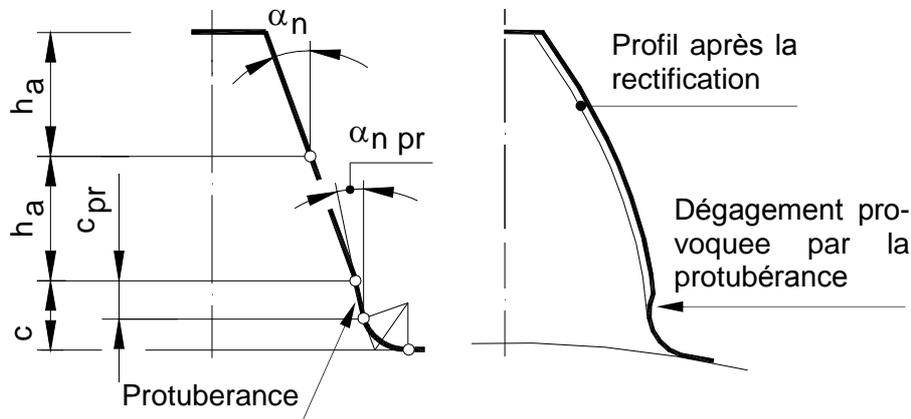


Fig. 2.42. Crémaillère génératrice à protubérance (a) et la dent en réalisée (b)

2.2.1.10.4. Modification de la forme de la crémaillère génératrice

Au paragraphe antérieur C on a vu une modification de la forme de la crémaillère génératrice, la protubérance, liée de la modification d'un paramètre de la crémaillère : coefficient du jeu de référence (à tête/pied), c . On discute plus loin des effets des autres modifications de la forme de la crémaillère génératrice.

Correction du profil. Soit un engrenage sans écarts d'engrènement. Analysons le commencement de l'engrènement dans le point A (fig. 2.44). En

cylindriques, ce qui représente une importante excitation interne : *excitation paramétrique*. Elle conduit à l'existence de plusieurs domaines d'instabilité paramétrique en fonction de nombre de tours, qui sont similaires aux résonances des systèmes excités forcés. Se voir aussi le sous-chapitre 2.2.4.3 « Facteur dynamique (interne) ».

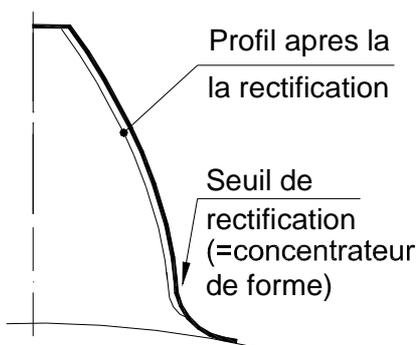


Fig. 2.43. Dent engendrée par la crémaillère sans protubérance

considérant que la roue 1 est motrice, la dent qui entre en engrènement en A se déplace théoriquement en avant, en considérant qu'elle ne fait pas contact avec la dent conjuguée de la roue 2. Ce déplacement est la déformation unipaire de la paire de dents dans le point D, δ_{uD} .

Comme résultat, l'entrée en engrènement se fait prématuré devant A et en dehors de la ligne d'engrènement, de telle sorte que :

1. la loi de base de l'engrènement n'est pas satisfaite;
2. des chocs sur les dents apparaissent au commencement de l'engrènement.

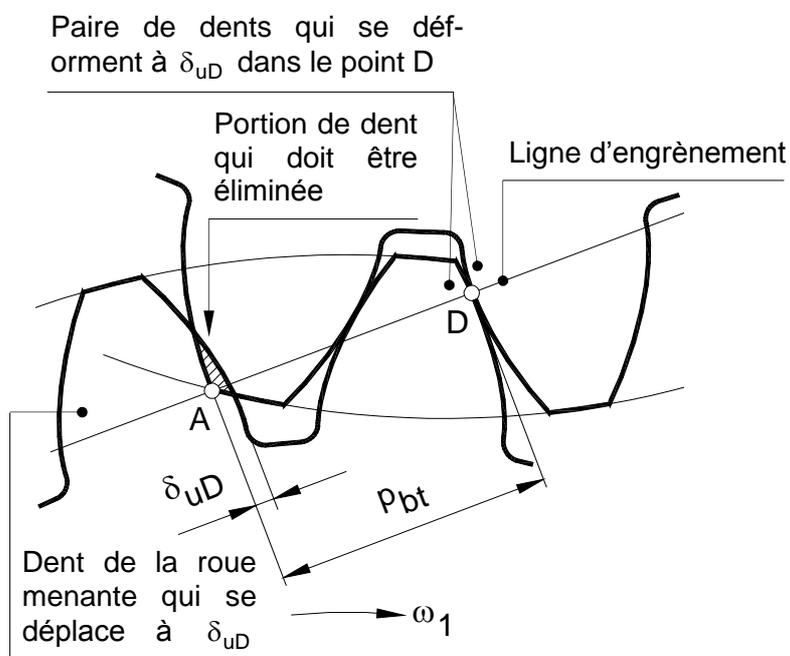


Fig. 2.44. Explication de la nécessité d'utiliser la correction du profil

C'est pourquoi il est nécessaire d'éliminer une portion de la tête de la dent de la roue 2, ou du pied de la dent de la roue 1 pour un engrènement plus correcte en A des engrenages de grande précision. Le problème est similaire à la sortie de l'engrènement, dans le point E.

L'élimination d'une portion de dent se fait évidemment jusqu'à une ligne de contact (fig. 2.45), d'après certaines dimensions. Le choix optimal des dimensions permet aussi l'atténuation de la variation de la rigidité de l'engrènement (c'est-à-dire, la diminution de l'excitation paramétrique).

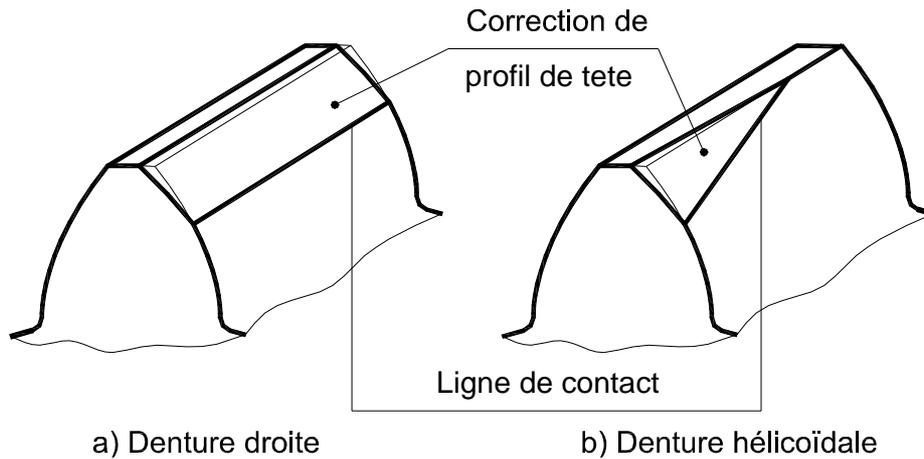


Fig. 2.45. Correction du profil de la tête

Correction longitudinale. Pour souligner la nécessité d'utiliser la correction longitudinale, analysons les modèles représentés sur la fig. 2.46, où des roues montées excentriquement par rapport aux appuis. On relève ici seulement l'influence des déformations de flexion des arbres sur la non-uniformité de la répartition de la charge sur la longueur de la dent. Cette détermine le non-contact des lignes de contact des dents conjuguées (fig. 2.46, b). Cet aspect est vu dans une autre projection (fig. 2.46, c), où est mis en évidence l'écart de direction des dents (entre les lignes théoriques de contact des dents non-chargées). Par conséquent, la distribution longitudinale de la charge devient non-uniforme au chargement de l'engrenage (fig. 2.46, d). Cette non-uniformité de la distribution longitudinale de la charge est accentuée à cause des erreurs technologiques.

L'uniformisation de la répartition de la charge sur la longueur de la denture est réalisée en utilisant la correction longitudinale, par plusieurs formes; la forme par bombage (les flancs sont arrondis longitudinalement sur l'entière leur longueur) est représentée sur la fig. 2.47.

Correction total (ou topologique). Elle est réalisée par la combinaison des deux corrections (de profil et longitudinale). Elle est établie à chaque point du flanc par le processus CAD (en considérant la déformation locale) est elle réalisée par le processus CAM. C'est une correction moderne très efficace pour les dentures cylindriques larges et très chargées.

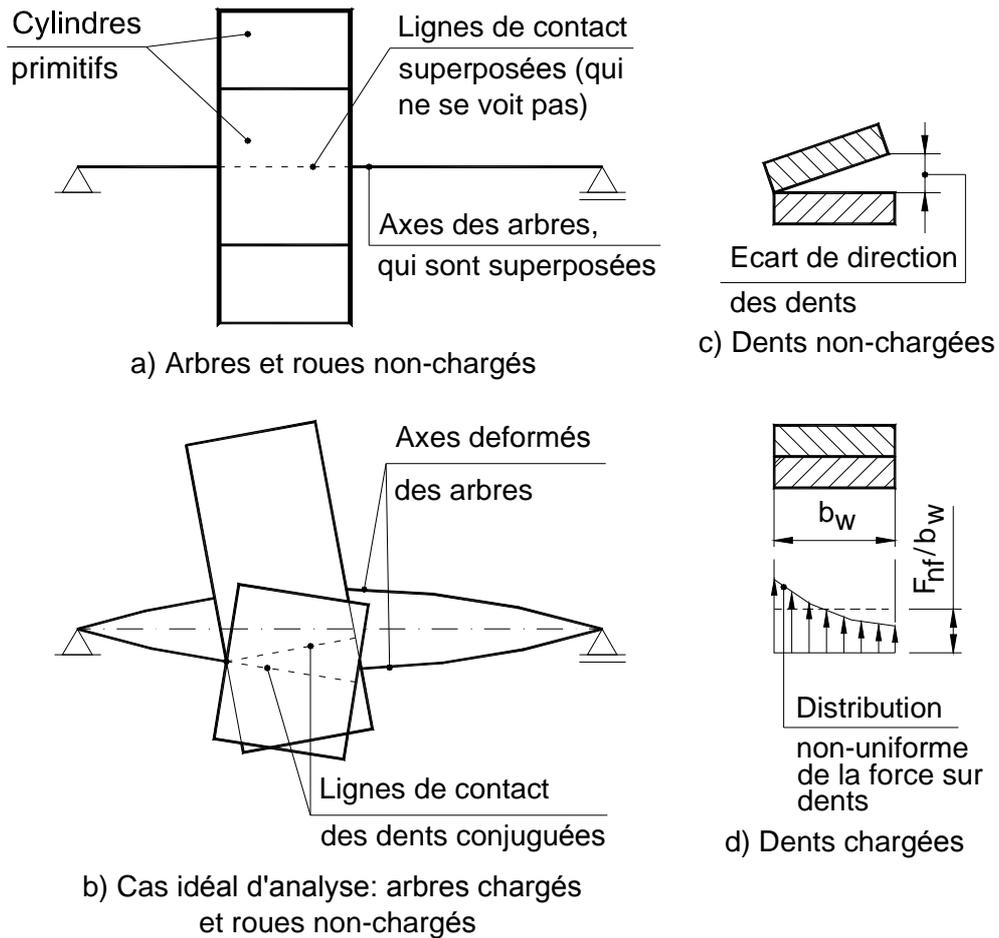


Fig. 2.46. Distinction de l'apparition de la distribution non - uniforme de la charge le long de la denture, en commençant de la projection dont les axes des arbres non - déformés sont superposés

F_{nf} - force normale dans le plan frontal (se voir le calcul de résistance) ; b_w - largeur de fonctionnement de la denture.

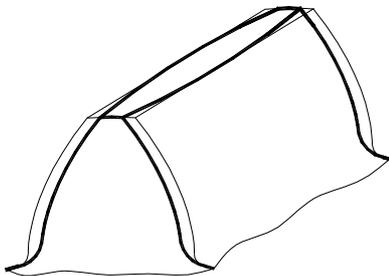


Fig. 2.47. Correction longitudinale par bombage

2.2.2. Modes et causes de détérioration de la denture

2.2.2.1. Introduction. Modes de détérioration de la denture

Les engrenages représentent la composante principale des transmissions par roues dentées. L'aspect est relevé par une statistique devenue célèbre dans la littérature dédiée, regardant la détérioration des

réducteurs de vitesse stationnaires, qui a été effectuée par la Allianz Versich-AG München & Berlin en 1976, dans l'ouvrage « Allianz-Handbuch der Schadensverhütung » (lui citation est faite de Niemann et Winter, 1983). On évidence que la fréquence en pourcentage des causes de sortie de fonctionnement d'une transmission par roues dentées est la suivante :

1. 58,2% aux engrenages;
2. 12,5% aux paliers;
3. 9,7% à la carcasse;
4. 6,7% aux arbres;
5. le reste – aux autres composants.

D'autre part, la édition de 1983 de l'ouvrage Allianz-Handbuch der Schadensverhütung" mentionne des autres pourcentages d'intérêt, regardant les causes de différentes défections des engrenages :

1. 41% - les erreurs d'exécution et montage ;
2. 40% - les erreurs d'utilisation et d'entretien;
3. 19% - les causes phénoménologiques inhérentes (qui seront discutées en bas).

Comme résultat, les engrenages doivent avoir une fiabilité suffisamment élevée, pour réaliser la fiabilité globale de l'entière transmission dont ils font partie.

Les modes de détérioration de la denture sont synthétisés dans le schéma de la fig. 2.48. On constate que ces modes de destruction se refaire **à la rupture de la dent** ou **à la détérioration du flanc**.

Les modes de détérioration rappelés peuvent être groupés aussi d'après la possibilité de leur évitement :

- a) *détériorations évitables par mesure constructives*; par exemple, la disposition des engrenages dans une carcasse étanche, pour l'évitement de l'usure abrasive intense, de telle sorte que pour l'assurance d'une lubrification normale;
- b) *détériorations dont les effets peuvent être limitées par calcul à une probabilité suffisante* (rupture de la dent par fatigue et par surcharges, usure des flancs par fatigue par piqûres).

Les modes de destruction classifiés sur la fig. 2.47 se discute ci-après. On analyse relativement à une modalité de destruction:

1. les causes et le phénomène de la détérioration;
2. les mesures prises en vue d'accroître la portance à chaque modalité de détérioration.

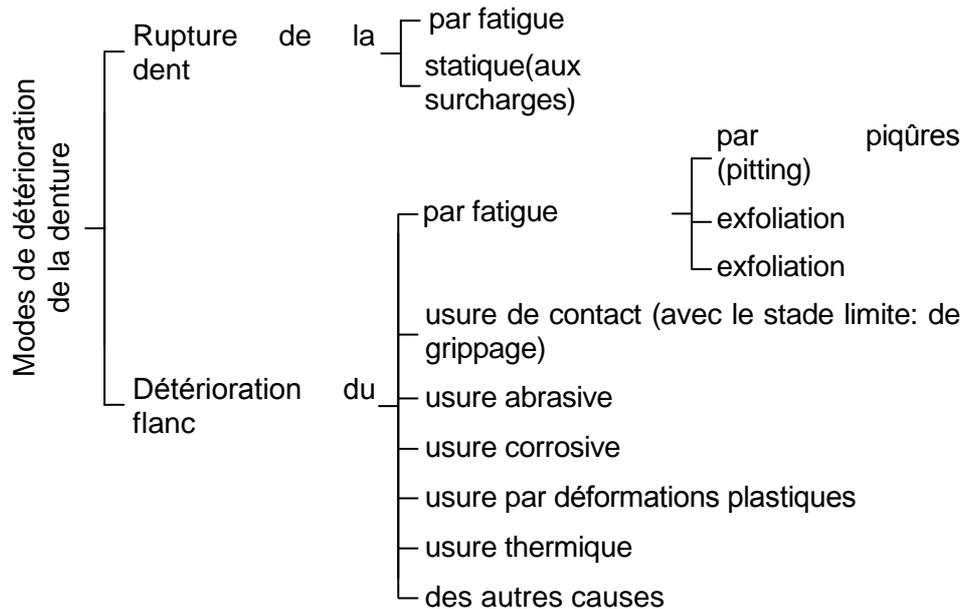


Fig. 2.48. Modes de détérioration de la denture des engrenages

2.2.2.2. Rupture de la dent

2.2.2.2.1. Introduction

La rupture de la dent a comme résultat la détérioration brusque de la roue dentée et, par conséquent, de l'engrenage. Elle se produit sans la possibilité du dépistage à temps des manifestations connexes ; comme résultat, on détermine des préjudices importants dans le fonctionnement de la transmission. C'est pourquoi sont nécessaires des mesures spéciales pour éviter ce mode de destruction et, implicitement, des conséquences négatives de celui. C'est aussi la raison pourquoi le facteur admissible de sûreté dans le calcul à la sollicitation de rupture par fatigue est choisi plus grand que celui spécifique pour la détérioration par fatigue du flanc (par piqûres), $S_{F_{min}} = 1,25 > S_{H_{min}} = 1,15$, dans le cas de la fiabilité normale de détérioration (99%).

2.2.2.2.2. Rupture par fatigue de la dent

Elle est la cause principale de la destruction des roues d'aciers à dentures durcies superficiellement, des roues de fonte ou matières plastiques.

Le phénomène de produire la rupture par fatigue de la dent est analysé de suite. Comme résultat du chargement des flancs à forces

normales sur profil ¹, la dent est soumise aux cycles de sollicitations à pied ², qui sont quasi-pulsateurs ou quasi-alternants. (aux roues à un sens de mouvement) ou alternantes (aux roues intermédiaires ou à celles qui ont un mouvement réversible).

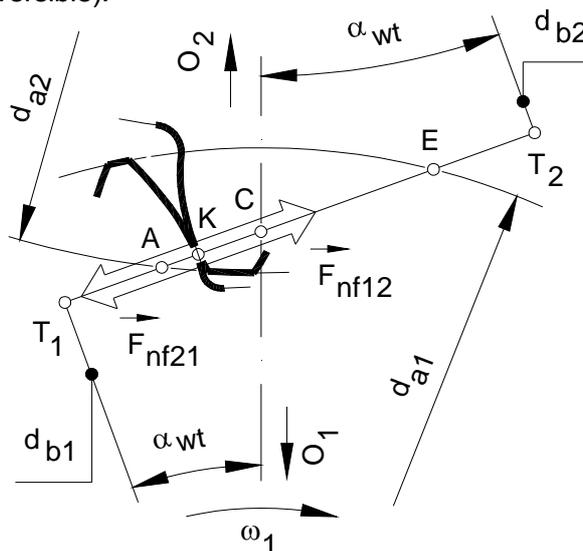


Fig. 2.49. Positions de la force normale dans le plan frontal, qui actionne sur une paire de dents en engrenement dans le point courant K

\vec{F}_{nf12} (\vec{F}_{nf21}) - force normale dans le plan frontal, qui actionne de la roue 2 (1) à la roue 1 (2)

Le cycle quasi-pulsateur est spécifique aux engrenages qui travaillent seulement dans un sens. Vraiment, comme on observe sur la fig. 2.49, la force normale sur le flanc dans le plan frontal s'applique sur la dent en commençant de pied vers tête à la roue menant 1 (force F_{nf21}), ou de tête vers pied à la roue menée 2 (force F_{nf12}). Sur le parcours de l'engrenement, la force qui revient à la paire de dents a les valeurs approximatives indiquées sur la fig. 2.50:

- le moitié de la force nominale, $0,5 F_{nf}$, sur les segments d'engrenement bipares, $AB = DE$;
- l'entière force nominale, F_{nf} , sur le segment BD de l'engrenement unipare.

¹ L'étude des forces se fait dans le sous-chapitre 2.2.4.6.

² L'état de tensions à pied de la dent et la section dangereux de lui sont discutés dans le sous-chapitre 2.2.5.2.

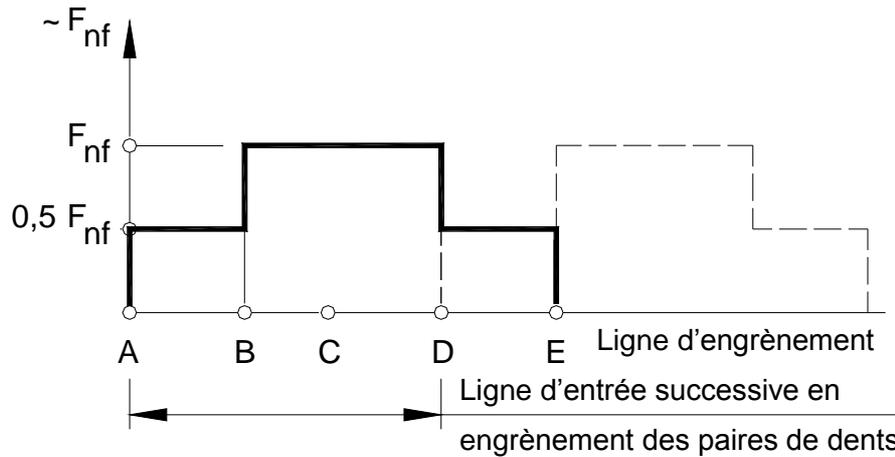


Fig. 2.50. Variation approximative du chargement nominal d'une paire de dents sur lui période d'engrènement (segment d'engrènement AE)

F_{nf} – force normal en plan frontal (fig. 2.48 et le sous-chapitre 2.2.4.6); A, E – points caractéristiques d'entrée et, respectivement, de sortie d'engrènement;
B, D – points caractéristiques d'entrée et, respectivement, de sortie d'engrènement unipare; C – pole d'engrènement.

On peut aisément imaginer que le moment de flexion déterminé par ce chargement par rapport à une section quelconque du pied de la dent se modifie sur le parcours de l'engrènement : de minimum vers maximum à la roue menant et inverse, de maximum à minimum à la roue menée. Après la fin de l'engrènement, se finit aussi la sollicitation de la dent, jusqu'à lui rentrée en engrènement après une rotation de la roue. Comme résultat, la sollicitation de la dent peut être considérée quasi - pulsateur. Inversement, si l'engrenage travaille dans les deux sens (c'est-à-dire il est réversible, c'est le cas des transmissions planétaires), on peut avoir aisément l'intuition que le chargement de la dent se produit sur les deux flancs opposés dans le cours d'une rotation, de telle sorte que la sollicitation du pied de la dent peut être considérée comme quasi-alternante.

L'expérience et la théorie démontrent que la tension maximale apparue dans le point de tangence au raccordement de pied de la dent d'un droit inclinée à 30° par rapport à l'axe de symétrie de la dent (fig. 2.51). C'est un effet de la forme, qui donne une concentration maximale de contraintes Dans cette portion et sur la partie tendue apparue une fissure initiale, dans un point dont il y a défauts de matériau (point de petite résistance mécanique). Ces défauts de matériau se trouvent:

- a) à la surface (sur flanc), par exemple des écorchures technologiques (produites par rectification ou shaving);
- b) à petite épaisseur en sous-couche (inclusions non - métalliques, retassures etc.).

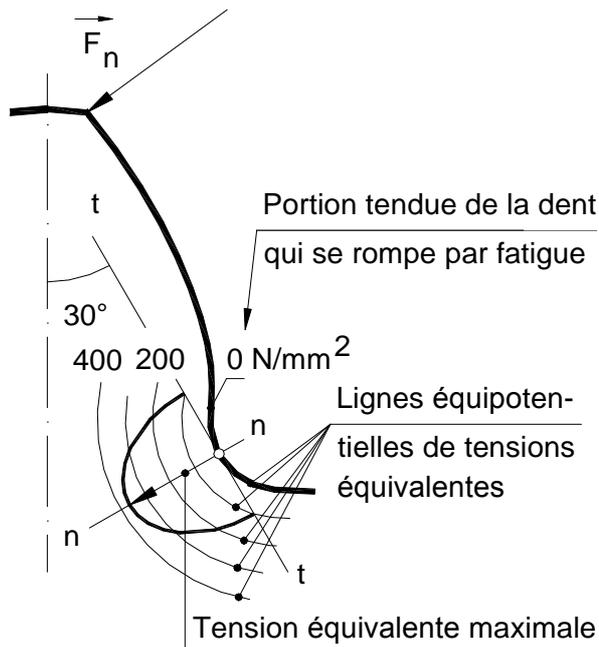


Fig. 2.51. Tensions locales à pied de la dent équivalent (en section normale)

t-t – tangente au raccordement du pied de la dent; n-n – normal à la tangent au profil dans le point où la tension est maximale.

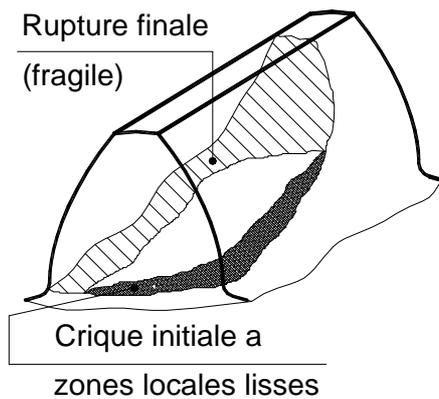


Fig. 2.52. Schéma regardant la rupture par fatigue de la dent

La fissure initiale se propage en épaisseur, de telle sorte que se forme une rupture initiale ou crique (fig. 2.52). La dent travaille de suite une période de temps, même à cette section faiblie. Sur l'effet de la compression et de l'usure réciproque des surfaces de la crique, celles-ci deviennent lisses, rappelant les surfaces rectifiées. C'est possible d'apparaître une corrosion de frottement (qui est appelée couramment „fretting”) sur ces surfaces ; cette corrosion se manifeste par une oxydation locale (poussière de couleur de rouille).

Puis cette crique se propage de plus en plus de la racine de la dent vers son sommet transversalement par rapport à dent. A un moment donné, quand la section est devenu moins résistant, se produit la rupture finale (fragile) sur une surface arrachée (fibreuse).

L'augmentation de la portance de la rupture de la dent due à la fatigue se réalise par:

1. l'augmentation de la base de la dent, possible par un module agrandi. En effet, on démontre que la tension au pied est inverse proportionnelle à module (comme on va démontrer dans le sous-chapitre 2.2.5.2) :

$$\sigma_F \approx \frac{1}{m_n};$$

c'est-à-dire, l'accroissement du module de deux fois conduit à la diminution de la tension au pied de deux fois;

2. la diminution du concentrateur de tensions, par l'agrandissement des rayons de courbure dans la zone de raccordement; aspect possible aux roues plus;
3. l'agrandissement de la résistance mécanique :
 - a) surtout aux aciers de cémentation, par le durcissement en surface et revenue bas ; on obtient ainsi une augmentation de la résistance mécanique de 1,4 fois par rapport à celle des aciers d'améliorations;
 - b) par l'écroissage de la surface du raccordement de la dent, qui se réalise par roulement ou par grenailage (application d'un jet de grenailles de dimensions contrôlées). Conformément à Niemann și Winter (1985), le processus de grenailage détermine – même s'il y a le seuil de rectification – un accroissement de la portance de:
 - jusqu'à 10% - aux dentures sollicités alternant - symétriques;
 - jusqu'à 35% - aux dentures sollicités pulsateurs;
4. l'agrandissement de la qualité de la surface de raccordement. La rectification soignée qui n'entraîne pas criques et est réalisée par l'outil à protubérance conduit a une augmentation de la portance de 1,3 fois par rapport au fraisage de la denture<
5. l'évitement du seuil de rectification (fig. 2.43), par la réalisation d'une interférence de taillage contrôlée (fig. 2.42, b), en utilisant un outil à protubérance (fig. 2.42, a).

2.2.2.2.3. Rupture statique de la dent

La rupture statique de la dent est causée des surcharges à fréquence (probabilité) très petite d'apparition, en général sous 10^4 fois sur l'entière durée de la vie du roué dentée. Ces surcharges peuvent être :

1. blocages du mouvement des roues, qui sont déterminés par la pénétration des corps étrangers entre les dents en engrènement ;
2. des chocs du moment de torsion au commencement et à la fin de fonctionnement, ou qui sont déterminés par des défauts de la machine moteur ou du système entraîné.

Comme aspect, l'entière surface de rupture statique de la dent est rugueuse et dénivelée.

La rupture statique peut être :

1. soit une rupture fragile aux dents durcies en surfaces;
2. soit une rupture par déformation plastique aux dentures à petite dureté.

La résistance statique est de 2...3 fois plus grande que la résistance à la fatigue de la dent.

Pour éviter ce mode de détérioration de la denture on recommande :

1. le dimensionnement des engrenages aux surcharges ;
2. la limitation des éventuelles surcharges par l'utilisation des accouplements ou des autres systèmes de sûreté.

2.2.2.3. Usure par piqûres (piquage, pitting)

L'usure par piqûres est la cause principale de la détérioration des flancs d'acier à dureté petite et moyenne ($HB \leq 4500$ MPa). Cette détérioration superficielle (piquage, pitting¹) se manifeste par de très fortes piqûres sur le flanc, situées prépondérément sous le cylindre primitif (fig. 2.53).

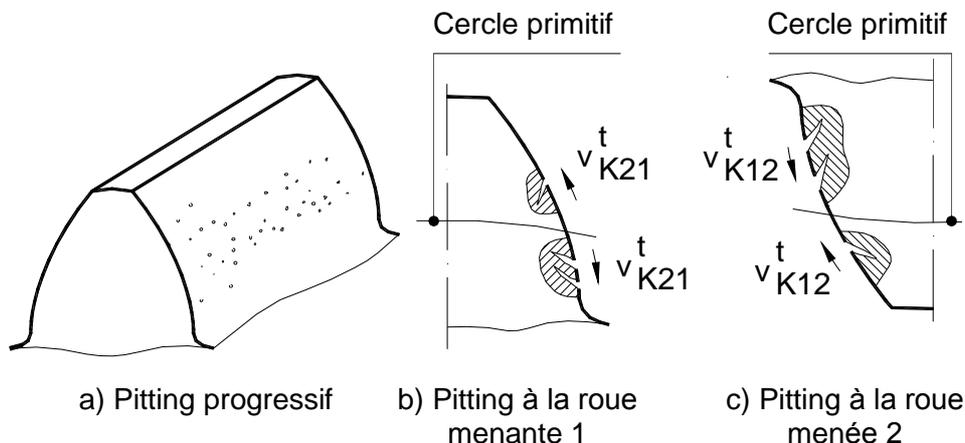


Fig. 2.53. Détérioration par la fatigue de contact (pitting) des flancs

v_{K21}^t (v_{K12}^t) - vitesse tangentielle relative du profil 2(1) par rapport du profil 1(2) , dans le point curent de contact, K

Considérons pour cela le contact quelconque des flancs équivalues par deux cylindres tangents sur la génératrice. Sur l'action de la force normale F_n , ce contact linéaire devient une surface rectangulaire d'écrasement, de longueur b (des cylindres) et largeur $2a$ (fig. 2.54). Sur cette surface, la distribution de pressions est elliptique, à un maximum donné par l'expression de Hertz:

¹ Le terme en anglais « pitting » - très utilisé en littérature – sera employé en cours.

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F_n}{b \rho} \cdot \frac{1}{\pi \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}}, \quad (2.100)$$

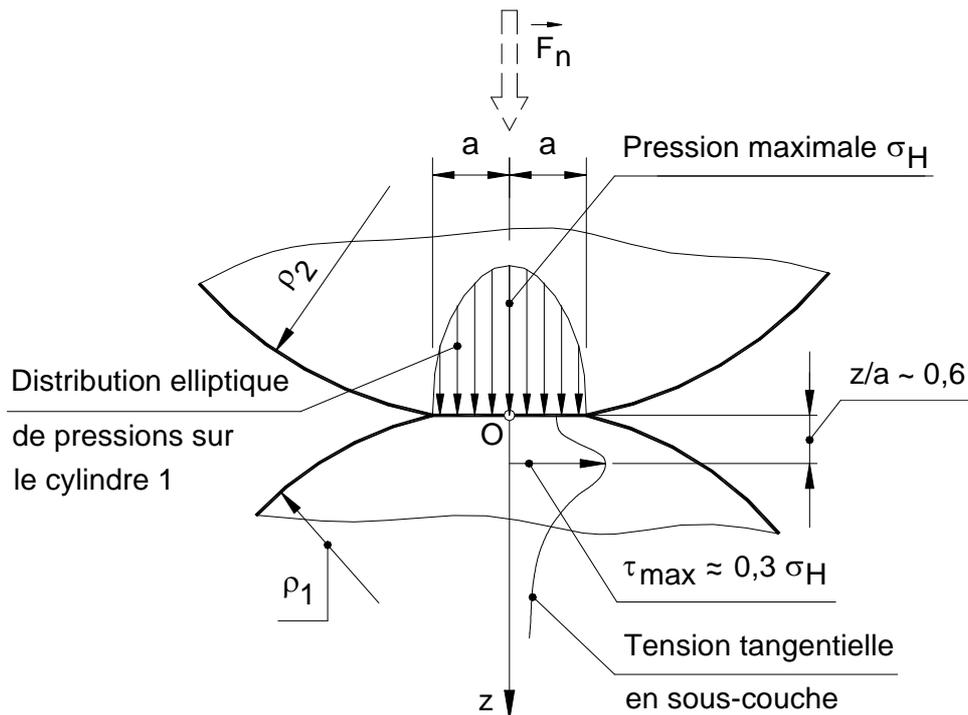


Fig. 2.54. Distribution des pressions de contact et de la tension tangentielle en sous-couche au contact des deux cylindres

où : ρ est le rayon de courbure équivalent; ν_1, ν_2 – les coefficients de contraction transversale (Poisson); E_1, E_2 – les modules d'élasticité longitudinale des matériaux. Rayon de courbure équivalent pour les deux flancs convexes (le cas de l'engrenage extérieur) est donné par l'expression:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad (2.101)$$

où interviennent les rayons des cylindres, ρ_1 et ρ_2 .

Cette distribution des pressions génère statiquement une variation de la tension de cisaillement sur la profondeur (sur la direction de l'axe Oz). Elle a une valeur maximale très grande à petite profondeur, $z/a \approx 0,6$ (généralement, $a \approx 0,2..0,3$ mm).

Le phénomène de produire des piqûres est détaillé successivement au bas.

1. Cette contrainte de cisaillement est certainement à l'origine de l'apparition des criques (microfissures). Vraiment, ce cisaillement provoque un glissement moléculaire intense et un échauffement suffisant pour entraîner la désagrégation locale de la matière dans la sous-couche, surtout aux sollicitations variables, surtout dans les points faibles de matériau (des amorces existantes). Mais il est possible aussi que ces amorces se produisent quand la sollicitation variable de contact (la pression de Hertz) dépasse la charge de rupture du matériau. Les criques de sous-couche se développent vers la surface (le flanc).
2. Dans le même temps, on peut développer un autre type de microfissures : de la base des rugosités vers l'intérieur du matériau. Les causes sont :
 - a) les tensions de cisaillement à la base des rugosités sont grandes dans la présence des concentrateurs de forme représentés par ces rugosités ;
 - b) la rugosité agrandit le frottement, par l'interruption de la pellicule de lubrifiant (l'effet du frottement est expliqué plus tard).
3. La formation de piqûres est produite seulement dans la présence de l'huile. Vraiment, le pitting affect très rarement les transmissions qui fonctionnent sans lubrification ou à une lubrification faible, parce que la couche superficielle s'use en avance de sa destruction par fatigue. Donc, l'existence du film de lubrifiant réduit l'usure de contact et permet l'apparition de la fatigue du matériau.
4. Les microfissures qui sortent sur le flanc tendent à s'orienter et ouvrir dans la direction en fonction du sens de la force de glissement exercée sur le flanc. Le sens de la force de frottement est défini par la vitesse de glissement relative, ainsi :
 - a) à la dent de la roue menant – du cercle primitif vers la tête et le pied de la dent (2.51, b) ;
 - b) à la dent de la roue menée – du pied et tête de la dent vers le cercle primitif (2.51, c).
5. Enfin, on remarque que la formation des piqûres est déterminée aussi par l'action hydrostatique de l'huile. Cette action hydrostatique a un effet sur l'apparition des piqûres s'il existe *le glissement négatif* des flancs, qu'il y a au pied de la dent : les sens du glissement relatif linéaire et de roulement relatif sont inversés. L'aspect est moins relevé sur la fig. 2.53, b et c, mais il est mis en évidence sur la fig. 2.55. Dans le cas du glissement relatif négatif :

- a) premièrement on ouvre la microfissure (fig. 2.55, a), ce qui favorise y l'entrée de l'huile ;
- b) puis on enferme l'entrée de l'huile en microfissure, à cause du sens de roulement du flanc conjuguée (fig. 2.55, b). Comme résultat, l'huile enfermée est comprimé, ce qui produit nouvelles sollicitations du matériau, qui peuvent être suivies par des arrachements de matériau autour de la microfissure et la formation final du piqûre (fig. 2.55, c).

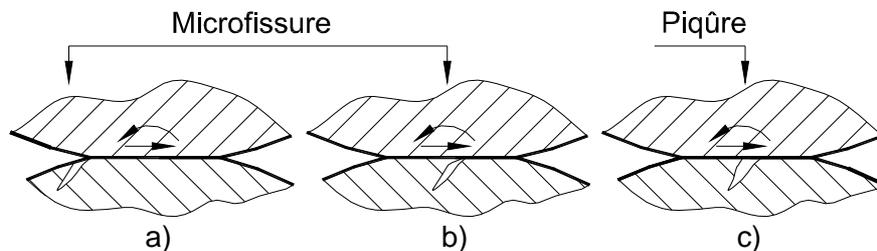


Fig. 2.55. Mécanisme de formation des piqûres par la fatigue de contact

- a) Ouverture et remplissage à huile de la microfissure ; b) fermeture de la cavité de microfissure et la compression de l'huile en intérieur; c) piqûre formée par arrachement de matériau sous l'effet hydrostatique.

Observation 1. L'accroissement de la viscosité réduit le risque de détérioration par pitting, parce que :

- a) le lubrifiant pénètre plus difficile dans les microfissures, donc son effet hydrostatique se réduit;
- b) le régime de lubrification s'improove, il pouvant devenir partiellement EHD dans la présence de la viscosité plus grand. Comme résultat, les flancs s'éloignent davantage et on réduit le coefficient de frottement et la tension tangentielle et, en final, le tendance de génération de microfissures sur le flanc;
- c) les sollicitations dynamiques sont atténuées du lubrifiant plus visqueux.

Observation 2. L'accroissement de la vitesse de fonctionnement favorise l'apparition du régime EHD. On améliore ainsi la portance à fatigue de contact.

Enfin, on remarque l'existence de **deux types de pitting**.

1. **Le pitting de rodage (de début) (piqûres naissantes)** se produit si la pression superficielle est raisonnable. Il se forme surtout sur les sommets des rugosités. A mesure que le rodage est réalisé, le pitting s'arrête ou devient invisible.

2. **Le pitting progressif (destructif)** se réalise si, par contre, la pression de Hertz est élevée ; comme effet, les piqûres continuent à se développer. Par la multiplications de piqûres, toute la surface active du flanc devient irrégulière (le diamètre des piqûres atteint ainsi parfois 2 à 5 mm), l'engrènement se perturbe (le graissage ne se réalise pas et les charges dynamiques augmentent). C'est pourquoi la transmission s'échauffe et le bruit s'amplifie et l'engrenage est hors d'usure.

Les mesures pour accroître la portance au pitting:

1. l'augmentation de la résistance superficielle du matériau. Aux aciers on fait le traitement thermique de durcissement en surface ; il est nécessaire d'avoir une profondeur traitée que celui où la tension de cisaillement est maximum. L'accroissement de la portance peut être 4 fois plus grande par ce mesure (Niemann și Winter, 1985);
2. l'existence des rayons de courbures plus grandes, ce qui détermine des tensions normales et tangentielle plus petites, se voir pour cela l'expression (2.100) et (2.101) et la fig. 2.54;
3. le choix d'un lubrifiant approprié : tant plus visqueux que le chargement est plus grand.

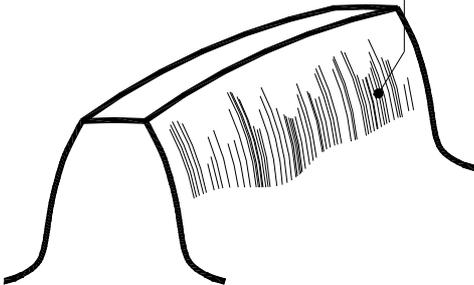
2.2.2.4. Usure de contact avec le stade limite de grippage

Cet usure constitue aussi un type possible de manifestation, lorsqu'on réalise le contact direct entre le métal sur le métal ou quand l'épaisseur du film d'huile peut devenir critique, ainsi qu'il est perforé par le sommet des rugosités. Il s'agit des engrenages à faible vitesse et forçement chargés ou des engrenages à grande vitesse. Comme résultat, on apparut des microjonctions (ponts de soudures) sur les sommets de rugosités. Elles sont cisailées à cause du glissement relatif entre les deux pièces. On résulte ainsi des arrachements et une mutation de matériau entre les flancs, (sur épaisseurs de 0,005...0,080 mm). C'est **l'usure de contact normal**, lorsque elle a une intensité réduite. **L'usure de contact intensive (grippage)** se manifeste par l'apparition sur le flanc des bandes de des arrachements de grippage (fig. 2.56), qui ont différentes largeurs et épaisseurs : le flanc devient dénivelée.

On distingue en fait deux groupes de types de grippage.

1. **En fonction des grandeurs qui détermine le phénomène**, il y a :
 - a) **le grippage à froid (non - thermique)**, qui résulte aux pressions de contact très élevées est aux vitesses de glissement extrêmement faibles, à un manque de lubrifiant ou à la lubrification par graisse ;

Bandes de grippage sur la direction de la vitesse relative



a) Représentation principale de bandes de grippage sur la dent



b) Grippage sur une dent provenant d'une boîte de vitesses de motocyclette (d'après http://fr.wikibooks.org/wiki/Tribologie_-_Usure_des_surfaces)

Fig. 2.56. Grippage sur le flanc de la dent

b) **le grippage à chaud (thermique)** est lié à une rupture de film d'huile qui est déterminée par échauffement excessif, aux vitesses grandes et une rugosité grande.

2. **En fonction du degré de détérioration**, il existe :

- a) **grippage de commencement (de rodage)**, qui apparue dans la période immédiate de mise en fonctionnement du couple de frottement (ici, l'engrenage) ; il disparue immédiatement à la réduction de la rugosité dans le processus de rodage;
- b) **grippage progressif**, qui se manifeste par une destruction prononcée, par bandes de grippage visibles.

Les mesures d'accroissement la portance à grippage résulte sur la base des considérations antérieures.

1. couples des matériaux non - soudables qui n'offre pas la filiation cristalline résistante, c'est-à-dire à une composition chimique différente (acier/bronze, acier/cuivre etc., par rapport à acier/acier ou acier/fonte); cette variante peuvent être appliquée aux engrenages à vis, qui ont une vitesse de glissement grand à la longue de la dente ;
2. dans le cas de l'acier aux deux roues : traitements thermiques et thermochimiques (carbonisation, nitruration, phosphatage), qui détermine une dureté grand des surfaces et l'évitement des déformations locales plastiques, qui génèrent les microsoudures. Mais c'est bien que la dureté des surfaces de même matériau soit

relative différente, parce que autrement les microsoudures peuvent aisément apparaître. On fait aussi l'observation que l'enrichissement du matériau à éléments d'alliage conduira à l'évitement de l'apparition de microsoudures ;

3. rugosité petite;

a) huiles à additifs de EP, ou – dans le plus mal cas – huiles visqueuses (d'onctuosité).

2.2.2.5. Observation sur la portance relative des engrenage à plusieurs modes de destruction

Il est d'intérêt d'analyser la portance relative des engrenages aux différentes modes de détérioration de la denture. Cette analyse est utile surtout pour les roues d'aciers alliés, les matériaux portance grand par rapport aux autres types. Des considérations théoriques et expérimentales ont permis de tracer une grandeur de portance, par exemple le moment de torsion capable au pignon en fonction de la vitesse périphérique (au cercle primitif) de la roue (fig. 2.57), pour deux types d'aciers représentatifs par leur traitement thermique ou thermochimique :

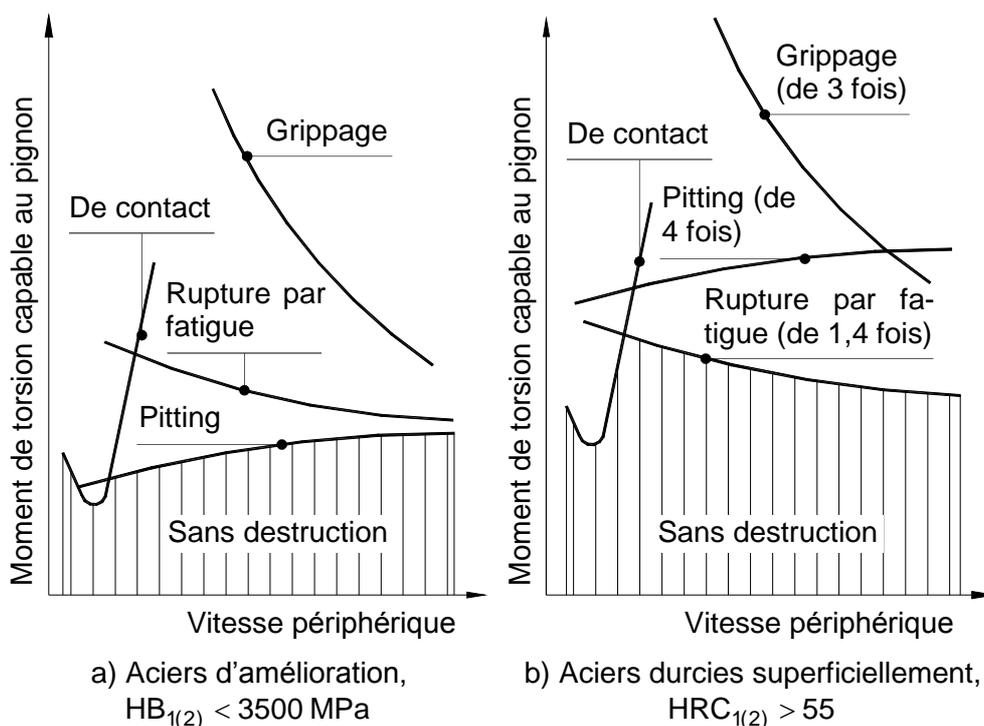


Fig. 2.57. Portance relative des engrenages d'aciers à deux états de traitement, aux différents modes de destruction (după Niemann și Winter, 1983)

1. aciers d'amélioration, à duretés petites et moyens des flancs, $HB \leq 3500$ MPa;
2. aciers de carbonisation et trempe superficielle, à haute dureté des flancs, $HRC \geq 55$, mais à maintien d'une ténacité élevée en noyau.

On constate par l'analyse de la figure les suivantes conclusions :

1. les modes critiques de destruction pour une large plage de vitesses périphériques sont :
 - a) de détérioration des flancs par la fatigue par piqûres, si les aciers sont d'amélioration ;
 - b) de rupture par fatigue du pied de la dent, si les aciers sont durcis superficiellement ;
2. la portance des roues dentées durcis en surface est plus grande que celle des aciers d'amélioration (fig. 2.57, b) :
 - a) d'environ 4 fois à l'usure par piqûres ;
 - b) de seulement 1,4 fois à la rupture par fatigue du pied de la dent, qui est la celui critique ;
 - c) de 3 fois dans l'usure par grippage.

On fait l'observation que le prix coûtant est plus grand au cas des aciers traités thermo-chimiques par carbonisation, trempe et revenu à basse température. Mais l'agrandissement de la portance de ces aciers fait que la réduction du gabarit détermine une réduction du prix coûtant. L'aspect est mis en évidence par une étude faite par Niemann et Winter (1983) aux réducteurs de vitesses à une marche (tableau 2.2), à roues dentées de différentes marques d'aciers et traitement thermique et thermo-chimiques. Vraiment, le tableau 2.2 montre que les aciers durcis superficiellement par carbonisation, trempe et revenu bas et la finition par rectification finale de la denture (par exemple, la marque 20 Mn Cr 5 conformément à normes DIN) déterminent la plus grande réduction du poids total de la transmission, de telle sorte que du prix coûtant associée par rapport à la situation de l'utilisation des aciers d'amélioration. C'est la raison pourquoi la majorité de producteurs utilise aujourd'hui les aciers durcis superficiellement pour une large gamme de charges et vitesses.

2.2.3. Matériaux de roues dentées

Dans ces conditions, de la gamme grande de matériaux possibles (aciers, fontes, bronze, matériaux sinterisés, matériaux plastiques), la plus grande portance est assurée par **les aciers**, et notamment **ceux alliés**. On choisit comme matériau un acier allié de carbonisation ($C \cong 0,1...0,3\%$), trempe et revenu bas pour les deux roues dentées. Vraiment, on assure ainsi :

Tableau 2.2. Comparaison entre les caractéristiques des réducteurs cylindriques à une marche, à roues dentées de différents matériaux et traitements thermiques et thermo-chimiques, pour les données : moment de torsion à pignon, 21,1 kN m; rapport de transmission, 3; facteur d'utilisation, $K_A = 1,3$; facteurs de sûreté minimaux à la sollicitation de contact, $S_{H\ min} = 1,3$, et de rupture de la dent, $S_{F\ min} = 2,3$ (aciers conformément à DIN)

Caractéristiques	Matériau					
	C 45	42 Cr Mo 4	Pignon: 20 Mn Cr 5 Roue: 42 Cr Mo 4	31 Cr Mo V 9	34 Cr Mo 4	20 Mn Cr 5
Traitement thermique	Normalisation	Amélioration	Pignon: carbonisation – trempe -revenue bas Roue: amélioration	Nitruration en gas	Trempe par courants d'induction	Carbonisation – trempe- revenue bas
Usinage final de la denture	Fraisage par roulement	Fraisage par roulement	Pignon: rectification Roue: fraisage par roulement	Fraisage fin par roulement	Fraisage, lapping	Rectification
Entraxe de fonctionnement/ module [mm]	830/10	650/10	585/10	490/10	470/10	390/10
Poids total [kg] et le pourcentage de modification	8505; 174%	4860; 100%	3465; 71%	2620; 54%	2390; 49%	1581; 33%
Pourcentage de modification du prix coûtant	132%	100%	85%	78%	66%	63%
Facteurs de sûreté effectifs	$S_H = 1,3$ $S_F = 6,1$	$S_H = 1,3$ $S_F = 5,7$	$S_H = 1,3$ $S_F = 3,9$	$S_H = 1,3$ $S_F = 2,3$	$S_H = 1,4$ $S_F = 2,3$	$S_H = 1,6$ $S_F = 2,3$

1. une portance agrandie, donc des gabarits réduites à un chargement donné ;
2. comme résultat, un prix coûtant global plus réduite de la transmissions qu'en cas d'utilisation des autres traitements thermiques et thermo-chimiques. le traitement thermique d'amélioration;
3. la finition (tournage);
4. le taillage de la denture (fraisage par roulement);
5. le traitement thermique de base de durcissement superficielle par:
 - carbonisation, c'est-à-dire l'enrichissement de la couche superficielle du flanc à carbone jusqu'à $C \cong 0,8...1,2\%$;
 - trempe à huile;
 - revenu bas (en air), qui détermine aussi un recuit de stabilisation;
6. la finition final des flancs qui est nécessaire parce que la denture se déforme thermique dans le cours du traitement thermique. Les méthodes le plus répandues de finition du flanc sont:
 - la rectification de la denture cylindrique;
 - le lapping de la denture conique.

On recommande les marques d'aciers roumaines qui sont surtout utilisés pour les engrenages cylindriques et coniques (tableau 2.3).

On constate qu'on indique pour chaque marque d'acier l'ainsi-t appelée **dimension caractéristique s**. Elle est l'épaisseur sur laquelle apparut martensite après le trempe, à minimum 0...90%. Par cela on assure une dureté corrélée même à une teneur basse de carbone en couche¹. Pour chaque forme et dimensions de la roue on établit spécifiquement une dimension caractéristique de calcul, s_{cal} (définie dans le sous-chapitre 2.2.5.4, concernant la conception des engrenages) ; le matériau est choisi correctement si cette dimension est plus petite que la dimension caractéristique pour le matériau, $s_{cal} \leq s_{max}$.

2.2.4. Forces d'engrenage

2.2.4.1. Chargement, chargement nominale

Les forces d'engrenage sont causées du chargement appliqué au système mécanique de qu'il fait partie. Par **chargement** on considère toutes les forces et moments qui sont appliqués au système par les processus de travail, commande et réglage, de telle sorte que du milieu

¹ On ne discute plus ce problème. Les diagrammes de dispersion de la dureté en fonction du contenu de carbone et la quantité de martensite minimale réalisée par traitement sont indiqués, par exemple, par Cheşa e. a. (1984).

ambiante (rafales de vent, dénivellations du chemin etc.).

Tableau 2.3. Marques roumaines d'aciers de carbonisation, trempe et revenu bas (conformément à STAS 791-88), qui sont recommandées pour les roues cylindriques et coniques

Marque d'acier STAS 791-88	Traitement thermique		Dureté recommandée		Résistance de base à la fatigue		Dimension caractéristique possible, s_{max} [mm]
	Température, °C	Milieu réfrigérant	En noyau, HB	Sur flanc, HRC	Du pied de la dent, $\sigma_{0\ lim\ b}$	Sur flanc, $\sigma_{H\ lim\ b}$	
					MPa		
13 Cr Ni 30	T 860	à Huile	~ 2600 MPa	56 ... 63 HRC	a) 950 b) 800	1450 ± 150	150
	R 180	à Air					
18 Mn Cr 10	T 880	à Huile	~ 2950 MPa		a) 850 b) 700 c) 800		150
	r 180	à Air					
18 Mo Cr Ni 13	T 840	Huile	~ 3150 MPa		150		
	r 180	à Air					
21 Mo Mn Cr 12	T 840	à Huile	~ 340) MPa	150			
	r 190	à Air					

Note

1. T – trempe; r – revenu bas.
2. La résistance à la fatigue du pied de la dent est considérée dans les cas : a) on contrôle la carbonisation ; b) sont possibles des décarbonisations ; c) on ne se contrôle pas la carbonisation.
3. La résistance à la fatigue de contact du flanc s'adopte normalement dans le milieu de l'intervalle précisée (la valeur s'adopte maximale si on été respectées les caractéristiques physiques et chimiques du matériau et les conditions de traitement).

Le chargement réel est non - uniforme, un exemple est le celui donné sur la fig. 2.58. En général, le chargement réel est **stationnaire** (ces paramètres statistiques sont constants en temps) pour les systèmes mécaniques à durée grande d'utilisation.

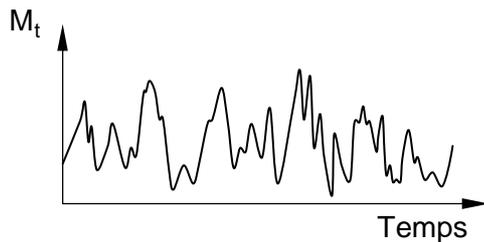


Fig. 2.58. Exemple de variation en temps du chargement réel (le moment de torsion M_t)

En calculs, de telle sorte que pour la caractérisation des systèmes mécaniques, on utilise le chargement nominal. Ce chargement est un moment de torsion aux transmissions à roues dentées, qui est déterminée généralement par la machine ou le système de travail. La valeur nominale du moment est constante, elle étant établie sur la base des conditions prédominantes

de fonctionnement, sans prendre en considération les chocs inertiels de démarrage et d'arrêt. On considère souvent que le chargement nominal est déterminé par les paramètres nominaux du moteur, en tenant compte que le moteur d'actionnement est choisit plus grande que le celui nécessaire pour vaincre le chargement réel.

Le calcul de résistance se développe utilisant la valeur du chargement réel, qui se correcte par facteurs spécifiques qui seront analysés de suite. On précise que ces facteurs peuvent être établités par méthodes de calcul standardisés (DIN 3990, ISO 6336, STAS 12268-84).

2.2.4.2. Facteur d'application (d'utilisation)

2.2.4.2.1. Définition

Le chargement réel déterminé par des sources extérieures à l'engrenage peut être décrit par un chargement équivalent constant. On peut ainsi définir le facteur d'application (d'utilisation) par l'expression :

$$K_A = \frac{M_{t\text{ ech}}}{M_{t\text{ nom}}}, \quad (2.102)$$

où $M_{t\text{ ech}}$ - le moment de torsion équivalent; $M_{t\text{ nom}}$ - le moment de torsion nominal. L'établissement du facteur d'application se fait par recommandations ou par un calcul basé sur le collectif de chargement.

2.2.4.2.2. Valeurs recommandées pour le facteur d'application

Dans le tableau 2.4 on indique des valeurs de base du facteur d'application, K_A ; elles sont valables pour les engrenages de l'industrie mécanique générale et à grande vitesse, de puissance relativement constante et au fonctionnement hors des intervalles de résonances. On voit que les valeurs de ce facteur dépendent de type de fonctionnement (uniforme, chocs faibles, chocs modérés, chocs élevés), qui est déterminé par la machine menante (moteur) et le système mené. Quelques exemples

de machines menantes et menées d'après leur type de fonctionnement sont données dans les tableaux 2.5...2.7.

Tableau 2.4. Valeurs indicatives du facteur d'application (ISO 6336:1996)

Type de fonctionnement de la machine menante	Type de fonctionnement du système menée			
	Uniforme	Chocs faibles	Chocs modérés	Chocs élevés
Uniforme	1,00	1,25	1,50	1,75
Chocs faibles	1,10	1,35	1,60	1,85
Chocs modérés	1,25	1,50	1,75	2,00
Chocs élevés	1,50	1,75	2,00	≥ 2,25

Tableau 2.5. Exemples de machines menantes d'après leur type de fonctionnement (ISO 6336:1996)

Type de fonctionnement de la machine menante	Exemples de machines menantes
Uniforme	Moteurs électriques (par exemple, le moteur à courant continue), turbines à vapeurs ou à gaz (couple de démarrage faible et rarement utilisé)
Chocs faibles	Turbines à vapeurs ou à gaz, moteurs électriques ou hydrauliques (couple de démarrage élevé et fréquemment utilisé)
Chocs modérés	Moteurs multicylindres à combustion interne
Chocs élevés	Moteurs monocylindres à combustion interne

2.2.4.2.3. Collectif de chargement

On met le problème de calculer plus exactement le facteur d'application. Le tel appelé *collectif de chargement* permet l'établissement du chargement équivalent du chargement réel déterminé par sources extérieures à l'engrenage et, finalement, le calcul du facteur d'application. Par méthodes spécifiques statistiques on peut obtenir un tel collectif discrétisé en marches (fig. 2.59)¹; chaque marche représente une variation pulsateur du moment ayant comme amplitude la valeur du moment sur le respective marche (fig. 2.60). Le collectif est limité comme durée et se répète de k fois jusqu'à la destruction de la pièce.

Une méthodologie de calcul de facteur d'application est présentée de suite.

¹ Il y a aussi des collectifs discrétisés continuellement, qui ne sont pas représentés dans cet ouvrage. Ils s'utilisent plus difficilement en calculs.

Tableau 2.6. Exemples de systèmes menés d'après leur type de fonctionnement pour les engrenages de l'industrie mécanique générale (ISO 6336:1996)

Type de fonctionnement du système mené	Systèmes menés
Uniforme	Dynamo ; transporteurs à courroies ou à bandes uniformément chargés ; transporteurs à vis ; monte-charge léger ; machines d'emballage ; boîtes d'avance de machines-outils ; ventilateur ; centrifugeuses légères ; pompes centrifuges ; agitateurs et mélangeurs pour liquides à faibles viscosités ou matières à densité uniforme ; cisailles ; foreuses ; poinçonneuses ^{a)} ; tours ; transporteurs ^{b)} .
Chocs faibles	Transporteurs à courroies ou à bandes non uniformément chargés (par exemple avec des colis) ; transmissions principales de machines-outils ; monte-charge lourd ; rotation de grues ; ventilateurs industriels ou de mine ; centrifugeuses lourdes ; pompes centrifuges ; mélangeurs et agitateurs pour liquides à viscosités élevés ou pour matières à densité non uniforme ; pompes multicylindres à pistons ; pompes répartisseuses ; extrudeurs (généraux) ; calandreuses ; fours rotatifs ; laminoirs (continues de zinc, d'aluminium, de telle sorte que laminoirs à fils ou à billettes).
Chocs modérés	Extrudeuses de caoutchouc ; mélangeurs hacheurs à fonctionnement continue pour l'industrie du caoutchouc et de plastiques ; broyeurs à boulets (légers) ; machines à bois (scieuses, tours) ; laminoirs à lingots ^{c)} ^{d)} ; mécanismes de levage ; pompes à pistons monocylindre.
Chocs élevés	Drague (transmission de la chaîne à godets) ; chaînes à godets ; tamis ; pelles mécaniques ; broyeurs à boulets (lourds) ; hachoirs à caoutchouc ; concasseurs (pierre, minerais) ; machines de fonderie ; pompes lourdes de distribution ; foreuses Rotary ; presses de briqueteries ; tambours écorceurs ; décolleteuses ; laminoirs à bandes à froid ^{c)} ^{e)} ; presses à briquettes.
a) Couple nominal = couple maximal de coupe, de pressage, d'estampage.	

- b) Couple nominal = couple maximal de démarrage.
 c) Couple nominal = couple maximal de laminage.
 d) Couple de rupture courant.
 e) K_A jusqu'à 2 du fait de ruptures fréquentes des bandes.

Tableau 2.7. Exemples de systèmes menés d'après leur type de fonctionnement pour les engrenages à grandes vitesses, conformément à ISO 6336:1996

Type de fonctionnement du système mené	Systèmes menés
Uniforme	Compresseurs radiaux pour installations de conditionnement d'air, pour fluides de processus ; bancs d'essais de puissance ; générateurs et excitateurs pour production de base ou de longue durée ; transmissions pour machines à papier.
Chocs faibles	Compresseurs d'air ou de gaz pour pipe-lines ; compresseurs axiaux ; ventilateurs centrifuges ; générateurs et excitateurs pour production de pointe ; pompes centrifuges (tous types sauf ceux cités ci-après) ; tous les types de pompes rotative à écoulement axial ; pompes à engrenages ; industrie de papier (machine Jourdain ou machine à raffiner, transmissions auxiliaires de machine à papier, machines à gaufrer le papier).
Chocs modérés	Soufflantes rotatives à cames ; compresseurs rotatifs à cames avec écoulement radial ; compresseurs à pistons (3 cylindres et plus) ; aspirateurs d'air pour l'industrie et les mines (grands et avec démarrages fréquentes) ; pompes rotatives d'alimentation des chaudières ; pompes à cames rotatives ; pompes à pistons (3 cylindres et plus).
Chocs élevés	Compresseurs à pistons (2 cylindres), pompes centrifuges (avec château d'eau) ; pompes à boues ; pompes à pistons (2 cylindres).

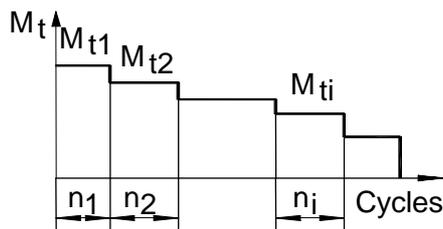


Fig. 2.59. Collectif de chargement discrétisé en marches

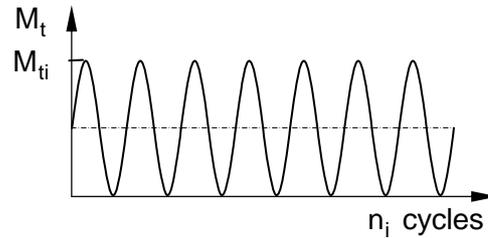


Fig. 2.60. Chargement pulsateur de la dent dans une marche

On considère un collectif fictif de tensions proportionnelles aux tensions limites de la courbe Wöhler (fig. 2.61).

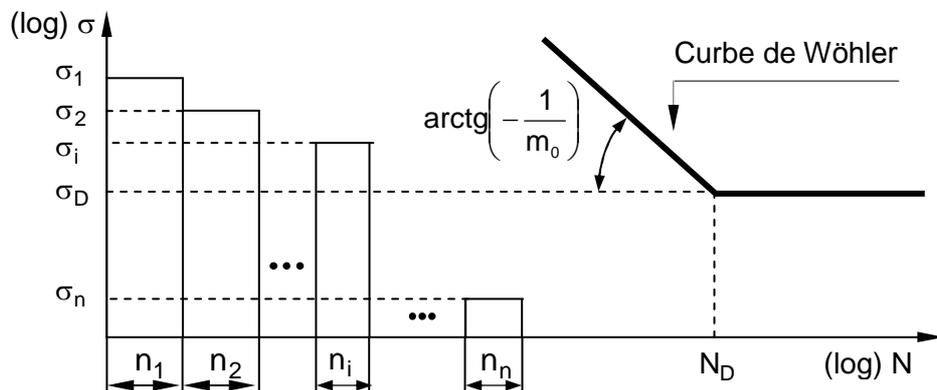


Fig. 2.61. Collectif de tensions proportionnelles à chargements, qui est comparé à courbe Wöhler

On considère aussi une loi d'accumulation de la détérioration. On utilise, par exemple, la loi Palmgren - Miner de l'accumulation linéaire de la détérioration, l'une de plus appliquée dans l'ingénierie. Elle dit qu'on produit la destruction à une certaine probabilité de l'élément de machine si la somme des détériorations partielles de chaque marche du collectif est:

$$S = k \cdot \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i} = 1, \quad (2.103)$$

où: k est le nombre d'applications répétées du collectif; j – nombre de marche du collectif; n_i - nombre de cycles correspondantes du marche i ; N_i - nombre de cycles limites sur la courbe de Wöhler au niveau de tension σ_i .

On fait l'observation que - dans l'application de la loi d'accumulation par (2.103) - on utilise tous les marches du collectif, incluant les ceux situés sous la résistance à la fatigue, σ_D . Normalement, ces marches ne sont pas

utilisées dans l'expression Palmgren - Miner, mais on ne connaît pas les valeurs de ces tensions, dans l'absence des dimensions.

La liaison entre le nombre de cycles et la tension sur la courbe Wöhler est donnée de fonction Basquin:

$$N_D \cdot \sigma_D^{m_0} = N_i \cdot \sigma_i^{m_0} = ct, \quad (2.104)$$

où interviennent grandeurs qui dépendent de matériau le type de la sollicitation: σ_D - la résistance à la fatigue; N_D - le nombre associé de cycles de base; m_0 - la pente de la courbe Wöhler.

On démontre expérimentalement que la somme S varie en limites larges, $S = 0,3...10$. En acceptant pour conclusions de principe que $S = 1$, de expression (2.103) on peut déterminer le nombre d'applications repesées du collectif :

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i}}. \quad (2.105)$$

La durabilité s'obtient par la multiplication de la longueur du collectif de k fois (nombre de répétitions du cycle jusqu'à la destruction de la pièce :

$$L = k \cdot \sum_{i=1}^j n_i = \frac{k \cdot \sum_{i=1}^j n_i}{k \cdot \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i}} = \frac{\sum_{i=1}^j n_i}{\sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i}}. \quad (2.106)$$

On définit le nombre relatif de cycles comme la durée relative due de nombre dans le cadre du collectif :

$$u_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^j n_i}. \quad (2.107)$$

Il permet l'obtention de la durabilité du système dans la forme:

$$L = \frac{1}{\sum_{i=1}^j \frac{u_i}{N_i}} \text{ [nombre de cycles]}. \quad (2.108)$$

Cette durabilité est associée à la tension équivalente, de telle sorte que l'équation (2.104) de la courbe Wöhler s'écrit dans la forme:

$$L \cdot \sigma_{ech}^{m_0} = N_i \cdot \sigma_i^{m_0} = ct,$$

d'où il en résulte :

$$N_i = \frac{L \cdot \sigma_{ech}^{m_0}}{\sigma_i^{m_0}}. \quad (2.109)$$

En introduisant la dernière expression dans (2.108), on obtient:

$$\sigma_{ech}^{m_0} = \sum_{i=1}^j u_i \sigma_i^{m_0}. \quad (2.110)$$

On divise les deux membres par la tension nominale, σ_{nom} :

$$\left(\frac{\sigma_{ech}}{\sigma_{nom}} \right)^{m_0} = \sum_{i=1}^j u_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{nom}} \right)^{m_0}. \quad (2.111)$$

Cette expression permet l'obtention du facteur de fonctionnement. Il peut être obtenue en deux variantes. Ainsi, pour **la rupture du pied de la dent** la tension sur un marche, σ_i , est proportionnelle à moment de torsion correspondante, M_{ti} ; en plus, il est utilisé la pente de la courbe Wöhler, $m_0 = m_F$. C'est pourquoi on obtient de (2.111) :

$$K_{AF} = \frac{M_{t ech}}{M_{t nom}} = \left[\sum_{i=1}^k u_i \left(\frac{M_{ti}}{M_{t nom}} \right)^{m_F} \right]^{1/m_F}. \quad (2.112)$$

Pour le cas de **la sollicitation de contact sur flanc**, la tension sur marche, σ_i , est proportionnelle à $\sqrt{M_t}$; la notation de la pente de la courbe Wöhler est $m_0 = m_H$. L'expression (2.111) devient:

$$K_{AH} = \frac{M_{t ech}}{M_{t nom}} = \left[\sum_{i=1}^k u_i \left(\frac{M_{ti}}{M_{t nom}} \right)^{\frac{m_H}{2}} \right]^{2/m_H}. \quad (2.113)$$

2.2.4.3. Facteur dynamique (interne)

Les engrenages sont des systèmes oscillants qui sont soumises à **deux types d'excitations** :

1. **excitations externes** : la variation en temps du chargement externe (déterminée par la machine menante et le système mène);
2. **excitations internes** de l'engrenage : l'excitation paramétrique et les excitations forcées déterminées par les erreurs de l'engrenage déterminées par l'imprécision.

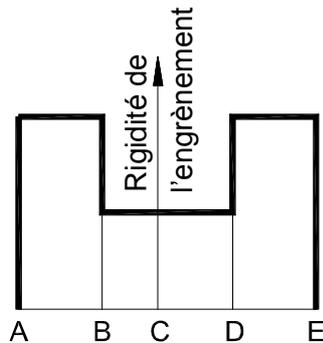


Fig. 2.62. Variation approximative de la rigidité de l'engrènement la longue de la ligne d'engrènement

A, B, C, D, E – points principales de la ligne d'engrènement

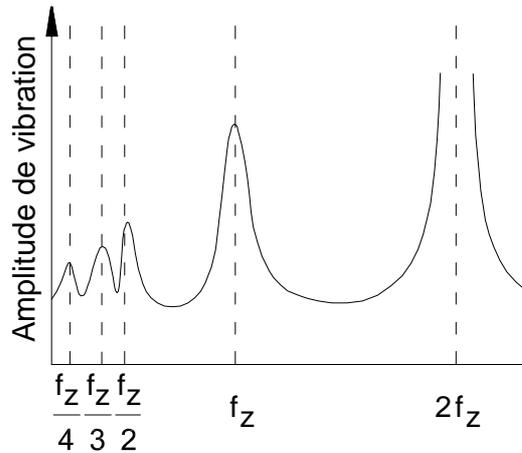


Fig. 2.63. Harte d'instabilité paramétrique d'un system à un degré de liberté (f_z - fréquence d'engrènement)

La plus déterminante excitation interne est cela paramétrique, qui est la variation en temps de la rigidité de l'engrènement. On a l'intuition simple que la rigidité de l'engrènement est proportionnelle à nombre de paires de dents qui se trouvent simultanément en engrènement (fig. 2.62). Cette excitation détermine des domaines multiples d'instabilité (résonance) paramétriques, même si le système est considéré à un degré de liberté (fig. 2.63)¹.

C'est la raison pourquoi les charges supplémentaires déterminées par les excitations internes sont importantes. Comme résultat, la charge nominale se corrige par le facteur dynamique interne :

$$K_v = \frac{M_{t \text{ ech } v}}{M_{t \text{ nom}}}; \quad (2.114)$$

Dans l'expression antérieure interviennent : $M_{t \text{ ech } v}$ - le moment fictif constante qui équivaut maintenant le chargement réel déterminé par le vibrations internes de l'engrenage.

2.2.4.4. Facteurs de la répartition frontale de la charge

Les écarts d'engrènement modifient la répartition de la charge sur les différentes paires de dents par rapport à l'absence des écarts. Ces écarts d'engrènement sont déterminées par:

1. les déformations des dents sur charge;

¹ On connaît que le système à un degré de liberté à excitation forcée a seulement une résonance, où on apparaît les vibrations les plus prononcées.

2. la modification du profile;
3. la précision d'exécution de l'engrenage;
4. le rodage possible (quand on utilise les aciers d'amélioration).

Pour tenir compte de ces modifications de la dent, on utilise les facteurs de la répartition frontale de la charge dans le cas de la sollicitation de contact du flanc, $K_{H\alpha}$, et de la sollicitation de rupture de la dent, $K_{F\alpha}$ (les facteurs ayant des valeurs différents dans les deux cas de sollicitation). Comme résultat, le facteur de la répartition frontale de la charge devient :

$$K_{\alpha} = \frac{M_{t\text{ ech } \alpha}}{M_{t\text{ nom}}} . \quad (2.115)$$

Dans l'expression antérieure interviennent : $M_{t\text{ ech } \alpha}$ - le moment fictif équivalent, de valeur constant, qui équivalue le chargement réel dans la présence des écarts d'engrènement qui déterminent la répartition frontale de la charge; $M_{t\text{ nom}}$ - le moment de torsion nominal qui charge l'engrenage dans l'absence des écarts d'engrènement.

2.2.4.5. Facteurs de la répartition longitudinale de la charge

À cause de l'imprécision d'exécution et des déformations des composants de la transmission à roues dentées, le chargement ne se répartit uniformément sur le longueur des dents ¹. Ainsi, les dents seront en contact sur leur entière longueur ou seulement en un partie en fonction de chargement, rigidité (en principal de l'arbre) et des écarts technologiques. Un contact sur une longueur partielle signifie des sollicitations locales plus élevées de la dent. Parce que le calcul dans la quelconque sollicitation se fait dans l'hypothèse du chargement uniforme sur la longueur de la dent, est nécessaire de tenir compte du chargement réel non - uniforme par la correction du chargement nominale.

On y utilise les facteurs de la répartition longitudinale de la charge (sur la longueur de la denture), dans le cas de la sollicitation de contact du flanc, $K_{H\beta}$, et de la sollicitation de rupture de la dent, $K_{F\beta}$ (les facteurs ayant des valeurs différents dans les deux cas de sollicitation). Les expressions de ces facteurs sont écrites en utilisant dans ce cas les tensions :

¹ La grandeur du contact des dents conjugués peut être visualisée expérimentalement par la telle dite *pâte de contact*. Elle est une image du contact entre dents obtenue par un rotation lente de l'engrenage chargé, quand les flancs sont couvertes en préalable à un couche très mince de teinture spéciale.

$$K_{\beta} = \frac{\sigma_{H(F)\max}}{\sigma_{H(F)\text{nom}}} ; \quad (2.116)$$

dans l'expression antérieure interviennent: $\sigma_{H(F)\max}$ – la tension de contact maximale (au pied), pour la distribution non - uniforme de la charge le long de la dent; $\sigma_{H(F)\text{nom}}$ – la tension de contact maximale (au pied), pour la distribution uniforme de la charge le long de la dent.

On considère dans le calcul de ces facteurs :

1. les écarts de direction des dents et leur atténuation par rodage;
2. la position des roues dentées entre les paliers et les déformations des arbres;
3. la rigidité de la denture et la force sur la dent;
4. le bombage ou le chanfrein des bouts de la dent;
5. la longueur relative de la denture, qui est défini à l'engrenage cylindrique par le facteur diamétral longitudinal (de longueur de la denture) :

$$\psi_d = \frac{b_w}{d_1} , \quad (2.117)$$

dans cette expression en interviennent : b_w - la longueur effective de contact entre les dents conjuguées; d_1 - le diamètre primitif du pignon.

En suite, on va établir les expressions de calcul des forces nominales qui actions dans les engrenages parallèles cylindriques à denture droite, en partant du moment de torsion nominal qui est appliqué sur la roue petite 1.

2.2.4.6. Forces nominales dans les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale

2.2.4.6.1. Dédution 1

Soit la représentation de la fig. 2.64 des forces nominales au pignon à denture hélicoïdale à sens droite. Sur la fig. 2.64, a, sont représentées les forces qui actionnent sur le pignon en lui trois projections ou sections. Sur la fig. 2.64, b sont tracées en groupe :

1. la force normale sur le flanc (primitif de fonctionnement), \vec{F}_{nw1} ;
2. les trois lui composants :
 - a) la force tangentielle (primitif de fonctionnement), \vec{F}_{tw1} ;
 - b) la force radiale (primitif de fonctionnement), \vec{F}_{rw1} ;

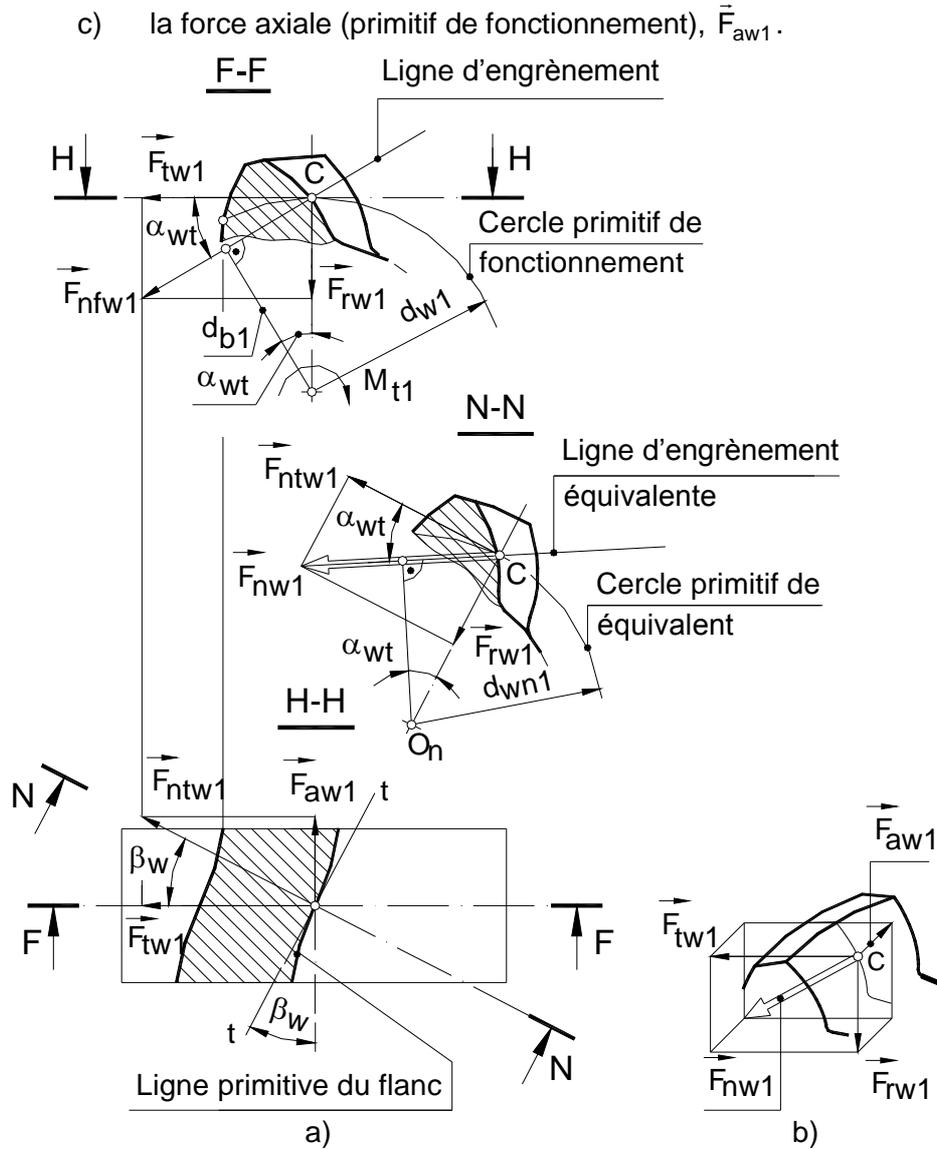


Fig. 2.64. Forces nominales sur le pignon 1 dans le pole d'engrènement C, en trois plans de projection (a) et groupée (b)

Ces composants dont la résultante, la force normale :

$$\vec{F}_{nw1} = \vec{F}_{tw1} + \vec{F}_{rw1} + \vec{F}_{aw1}, \quad (2.118)$$

On intervient aussi dans cette déduction :

1. la force normale dans le plan frontal F-F, \vec{F}_{nfw1} ;

2. la force normale dans le plan tangentiel H-H sur le cylindre primitif de fonctionnement du pignon, \vec{F}_{ntw1} .

L'ordre pour établir les forces est donné en suite.

1. **Dans le plan frontal F- F :**

- a) la force tangentielle primitive, calculée en utilisant le moment de torsion nominal et le diamètre primitif du pignon :

$$F_{tw1} = \frac{2 M_t \text{ nom}}{d_{w1}}, \quad (2.119)$$

- b) la force radiale primitive, calculée en fonction de celle tangentielle :

$$F_{rw1} = F_{tw1} \operatorname{tg} \alpha_{wt}. \quad (2.120)$$

2. **Dans le plan horizontal H- H :**

- a) la force axiale primitive :

$$F_{aw1} = F_{tw1} \operatorname{tg} \beta_w, \quad (2.121)$$

où β_w est l'angle d'inclinaison de la dent sur le cylindre de roulement ;

- b) la force normale primitive sur le flanc du pignon :

$$F_{ntw1} = \frac{F_{tw1}}{\cos \beta_w}. \quad (2.122)$$

3. **Dans le plan normal N- N :**

- a) la force normale (primitive) sur le flanc :

$$F_{nw1} = F_{ntw1} \frac{1}{\cos \alpha_{wn}} = F_{tw1} \frac{1}{\cos \alpha_{wn} \cos \beta_w}; \quad (2.123)$$

- b) de nouveau, la force radiale (primitive), calculée dans ce plan en une nouvelle expression :

$$F_{rw1} = F_{ntw1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{wt} = \frac{F_{tw1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{wn}}{\cos \beta_w}. \quad (2.124)$$

La composante radiale étant unique, les expressions (2.120) et (2.124) sont égalisées, ainsi qu'on obtient :

$$\operatorname{tg} \alpha_{wt} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{wn}}{\cos \beta_w}. \quad (2.125)$$

On observe qu'on obtient une expression analogue à celle similaire déduite à crémaillère :

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}.$$

L'expression (2.125) permet l'obtention de l'angle de pression primitive de fonctionnement normale (dans le plan normale), qui n'a été pas établi antérieurement aux éléments géométriques de l'engrenage :

$$\operatorname{tg} \alpha_{wn} = \operatorname{tg} \alpha_{wt} \cdot \cos \beta_w . \quad (2.126)$$

Observation. Les forces antérieures peuvent être particularisées pour le cercle primitif (de taillage), en faisant les remplacements suivants : d_{w1} à d_1 , α_{wt} à α_t ; β_w à β . Comme résultat, on obtient de (2.119)...(2.121) et (2.123) :

a) la force tangentielle primitive :

$$F_{t1} = \frac{2 \cdot M_{t1}}{d_1} ; \quad (2.127)$$

b) la force radiale primitive :

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_t ; \quad (2.128)$$

c) la force axiale primitive :

$$F_{a1} = F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \beta ; \quad (2.129)$$

d) la force normale primitive :

$$F_{n1} = \frac{F_{t1}}{\cos \alpha_n \cos \beta} . \quad (2.130)$$

2.2.4.6.2. Déduction 2

Pour des calculs de résistance il est nécessaire d'utiliser une autre expression de la force normale sur le flanc, qui se déduit en utilisant sa représentation dans le plan d'engrènement (fig. 2.65). Premièrement on écrit la force normale primitive de fonctionnement dans le plan frontal :

$$F_{nfw1} = \frac{F_{tw1}}{\cos \alpha_{wt}} . \quad (2.131)$$

Puit on peut obtenir la force normale primitive de fonctionnement dans la projection E-E du plan d'engrènement :

$$F_{nw1} = \frac{F_{nfw1}}{\cos \beta_b} = \frac{F_{tw1}}{\cos \alpha_{wt} \cos \beta_b} . \quad (2.132)$$

Observation. La force normale obtenue se particularise, comme on a été fait dans la déduction 1, sur le cercle primitif, en faisant les remplacements connus. On obtient ainsi la force normale primitive :

$$F_{n1} = \frac{F_{t1}}{\cos \alpha_t \cos \beta_b} . \quad (2.133)$$

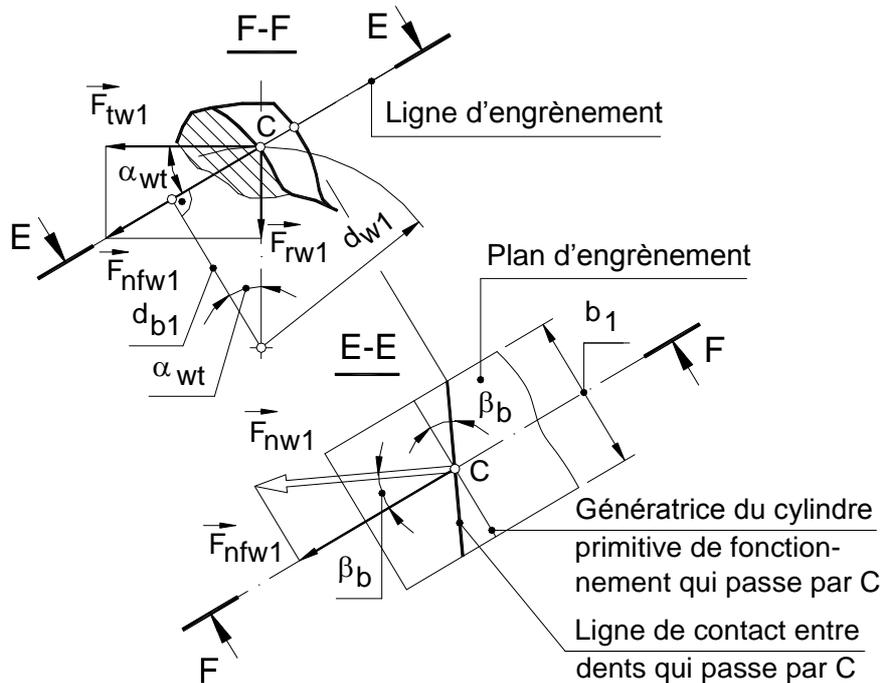


Fig. 2.65. Une autre déduction de la force normale sur le flanc du pignon

2.2.5. Calcul de la résistance de la denture

2.2.5.1. Tension de contact sur flancs

On fait l'observation générale que les bases de calcul de résistance sont conformément aux standards STAS 12268-84, ISO 6336 or DIN 3990, qui sont dédiés au calcul de résistance des engrenages.

La tension de contact (maximale) d'après Hertz (au contact des deux cylindres sur une génératrice) est considérée comme une grandeur qui caractérise la portance à pitting. L'expression (2.112) est reprise pour la section normale de l'engrenage équivalent dans la forme :

$$\sigma_{H0} = \sqrt{\frac{F_n}{l_{ech} \rho_n} \cdot \frac{1}{\pi \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (2.134)$$

Plus haut interviennent : σ_{H0} - la tension de contact de base; F_n - la force normale primitive sur le flanc, qui est considérée la même sur les deux roues, $F_n \approx F_{n1} \approx F_{n2}$ (c'est-à-dire on ne considère pas le rendement); l_{ech} - une longueur équivalente des deux cylindres équivalents qui tient compte de l'existence simultanée de plusieurs lignes de contact sur flancs; ρ_n - le rayon de courbure équivalente dans le point de contact dans le plan normal.

Pour la force normale primitive on accepte l'expression (2.133).

La longueur équivalente de la génératrice commune des deux cylindres équivalents – qui module le contact des dents inclinées – est établit comme une moyenne de la somme des lignes simultanées de contact des paires de dents, dans la forme :

$$l_{ech} = \sum l_i = \frac{b_w \varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b} \quad (2.135)$$

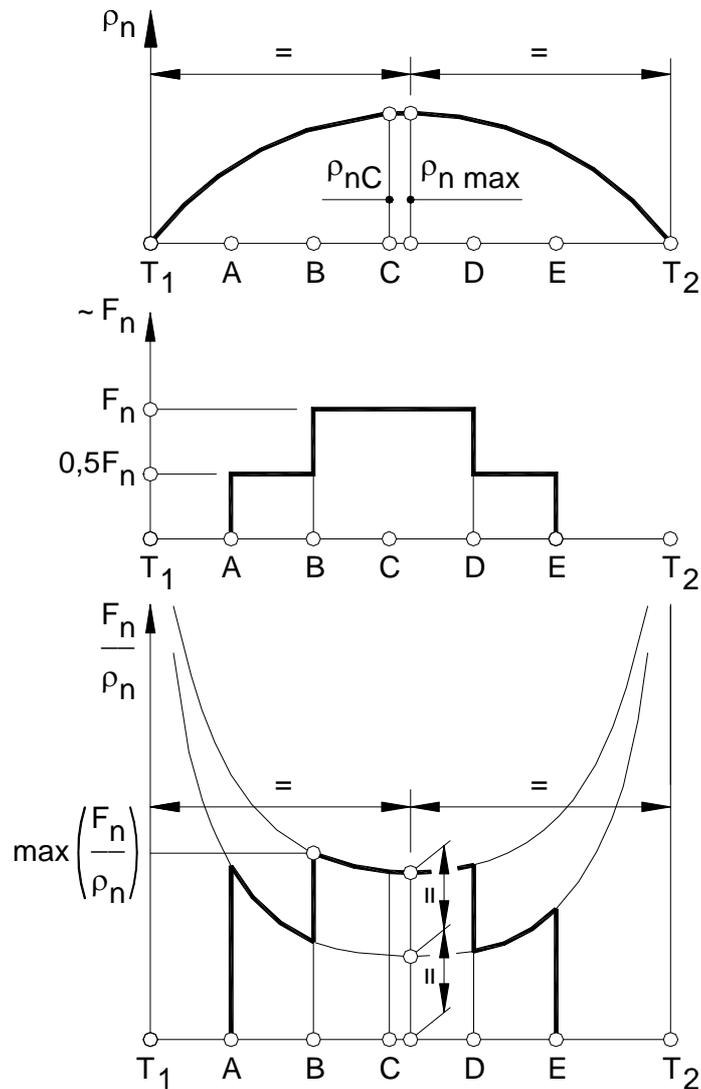


Fig. 2.66. Variations le logue du segment d'engrènement, $T_1 T_2$, du rayon de courbure normale, ρ_n , de la force normale sur le flanc, F_n , et du rapport F_n / ρ_n

Pour l'établissement le point de calcul du rayon de courbure normal ρ_n , on fait l'analyse de la variation de la tension de base σ_{H0} le long du segment d'engrènement AE. On voit sur la fig. 2.66 que la tension σ_{H0} est maximale dans le point B (mais c'est possible d'exister des autres points particuliers dans lesquels cette tension devient maximale). Mais c'est possible d'accepter l'hypothèse que qu'on peut considérer sans grandes erreurs que la tension maximale se trouve dans le pôle d'engrènement C. Comme résultat, se calcule le rayon frontal du point primitif de fonctionnement C (fig. 2.67):

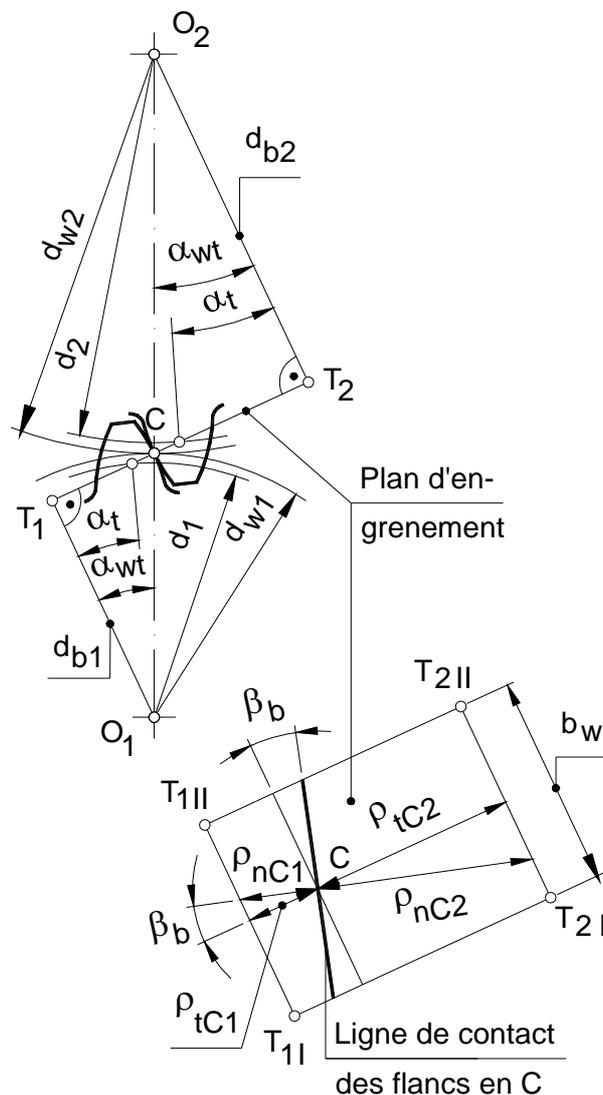


Fig. 2.67. Rayons normales et frontales de courbure du profil de la dent, dans le schéma d'engrènement et le plan d'engrènement rabattu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{tC}} &= \frac{1}{\rho_{tC1}} + \frac{1}{\rho_{tC2}} = \frac{1}{T_1 C} + \frac{1}{T_2 C} = \left(\frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} \right) \frac{1}{\text{tg}\alpha_{wt}} = \\ &= 2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{1}{\cos\alpha_t \text{tg}\alpha_{wt}} = \frac{2}{d_1} \frac{i_{12} + 1}{i_{12}} \frac{1}{\cos\alpha_t \text{tg}\alpha_{wt}}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Cette valeur permet l'obtention du rayon de courbure normale. On observe que l'expression d'un seul rayon normale dans le point C est (fig. 2.67) :

$$\rho_{nC1} = \frac{\rho_{tC1}}{\cos\beta_b} \quad (2.137)$$

Comme suite, l'expression se traduit par le rayon équivalent en C :

$$\rho_{nC} = \frac{\rho_{tC}}{\cos\beta_b}, \quad (2.138)$$

de telle sorte que la valeur inverse est :

$$\frac{1}{\rho_{nC}} = \frac{2}{d_1} \cdot \frac{i_{12} + 1}{i_{12}} \cdot \frac{\cos\beta_b}{\cos\alpha_t \cdot \text{tg}\alpha_{wt}}. \quad (2.139)$$

Maintenant on peut faire tous les remplacements nécessaires dans l'expression (2.134), des expressions (2.133), (2.135) et (2.139). On obtient la tension de contact de bas dans la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{H0} &= \sqrt{\frac{F_n}{l_{ech} \rho_{nC}} \cdot \frac{1}{\pi \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\frac{F_{t1}}{\cos\alpha_t \cos\beta_b}}{\frac{b_w \varepsilon_\alpha}{\cos\beta_b}} \frac{2}{d_1} \frac{i_{12} + 1}{i_{12}} \frac{\cos\beta_b}{\cos\alpha_t \text{tg}\alpha_{wt}} \frac{1}{\left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}} = \quad (2.140) \\ &= Z_H Z_E Z_\varepsilon \sqrt{\frac{F_{t1}}{b_w d_1} \frac{i_{12} + 1}{i_{12}}}. \end{aligned}$$

Dans l'expression antérieure interviennent des nouvelles grandeurs :

1. Z_H - le facteur géométrique :

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cos\beta_b}{\cos^2 \alpha_t \text{tg}\alpha_{wt}}}, \quad (2.141)$$

où, conformément à (2.75) :

$$\beta_b = \arctan(\cos\alpha_t \operatorname{tg}\beta); \quad (2.142)$$

2. Z_E - le facteur d'élasticité (de matériau) :

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_1^2}{E_2} \right)}}; \quad (2.143)$$

3. Z_ε - le facteur de conduite :

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}}; \quad (2.144)$$

la valeur antérieure qui résulte de démonstration est valable, conformément à l'expérience, pour les dentures hélicoïdales à un rapport de conduit de recouvrement grand, $\varepsilon_\beta > 1$; dans les autres situations on utilise les expressions:

a) pour les dentures droites :

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}}; \quad (2.145)$$

b) pour les dentures hélicoïdales à $\varepsilon_\beta < 1$:

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3} (1 - \varepsilon_\beta) + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha}}. \quad (2.146)$$

Enfin, on précise qu'on a été introduit le facteur empirique d'inclinaison de la denture, Z_β , pour compenser les différences entre les résultats expérimentaux et les valeurs calculées. On recommande :

$$Z_\beta = \sqrt{\cos\beta}. \quad (2.147)$$

Il en résulte l'expression finale de la tension nominale de contact :

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_{t1}}{b_w d_1} \frac{i_{12} + 1}{i_{12}}}. \quad (2.148)$$

La tension effective de contact sur le flanc s'obtient par la correction de la force nominale à facteurs de correction du chargement, de telle sorte que l'expression antérieur devient en considérant aussi la condition à la limite :

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_{t1} K_A K_V K_{H\alpha} H_{H\beta}}{b_w d_1} \frac{i_{12} + 1}{i_{12}}} \leq \sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_{Hmin}}. \quad (2.149)$$

La condition à la limite de plus haut incluse :

1. la tension admissible à la fatigue de contact des flancs, σ_{HP} ;
2. la tension limite du matériau (le moins résistant) des roues, σ_{Hlim} (qui sera discuté plus tard);
3. le facteur de sûreté minimal, S_{Hmin} ($S_{Hmin} = 1,15$ pour la fiabilité normal de 0,99).

La vérification se peut faire par l'analyse du facteur de sûreté effective :

$$S_H = \frac{\sigma_{Hlim}}{\sigma_H} \geq S_{Hlim} \cdot \quad (2.150)$$

2.2.5.2. Tension au pied de la dent

On considère sur la fig. 2.68 la dent droite équivalente à celle inclinée, qui appartient à la roue équivalente (fig. 2.31) : de module normal, m_n , et à nombre de dents équivalent, z_n , donné par l'expression (2.55). Dans le sous-chapitre 2.2.2.2 on a été montré que la dent se rompt à fatigue dans la zone tendue du pied et que la section dangereuse (d'épaisseur s_{Fn}) est déterminée par des tangents aux profils inclinées à 30° par rapport à l'axe de symétrie de la dent.

On considère les suivantes hypothèses de calcul :

1. la force normale F_n est appliquée sur le sommet de la dent;
2. il n'y a qu'un seul couple de dents en contact (mais on va tenir compte dans les calculs de l'existence de plusieurs paires de dents en engrènement);
3. les composants de la force normale F_n sont établis sur le point d'intersection de la ligne d'action de la force (la ligne d'engrènement pour la denture équivalente) avec l'axe de symétrie de la dent;
4. la dent est modélisée comme une poutre encastrée dans la section dangereuse d'épaisseur s_{Fn} .

Dans la section dangereuse apparaissent les suivantes tensions :

1. la tension maximal de flexion, σ_f , déterminée par la composante $F_n \cos \alpha_{Fa}$;
2. la tension de compression, σ_c , déterminée par la composante $F_n \sin \alpha_{Fa}$;
3. la tension de cisaillement, τ , déterminée par la composante $F_n \cos \alpha_{Fa}$.

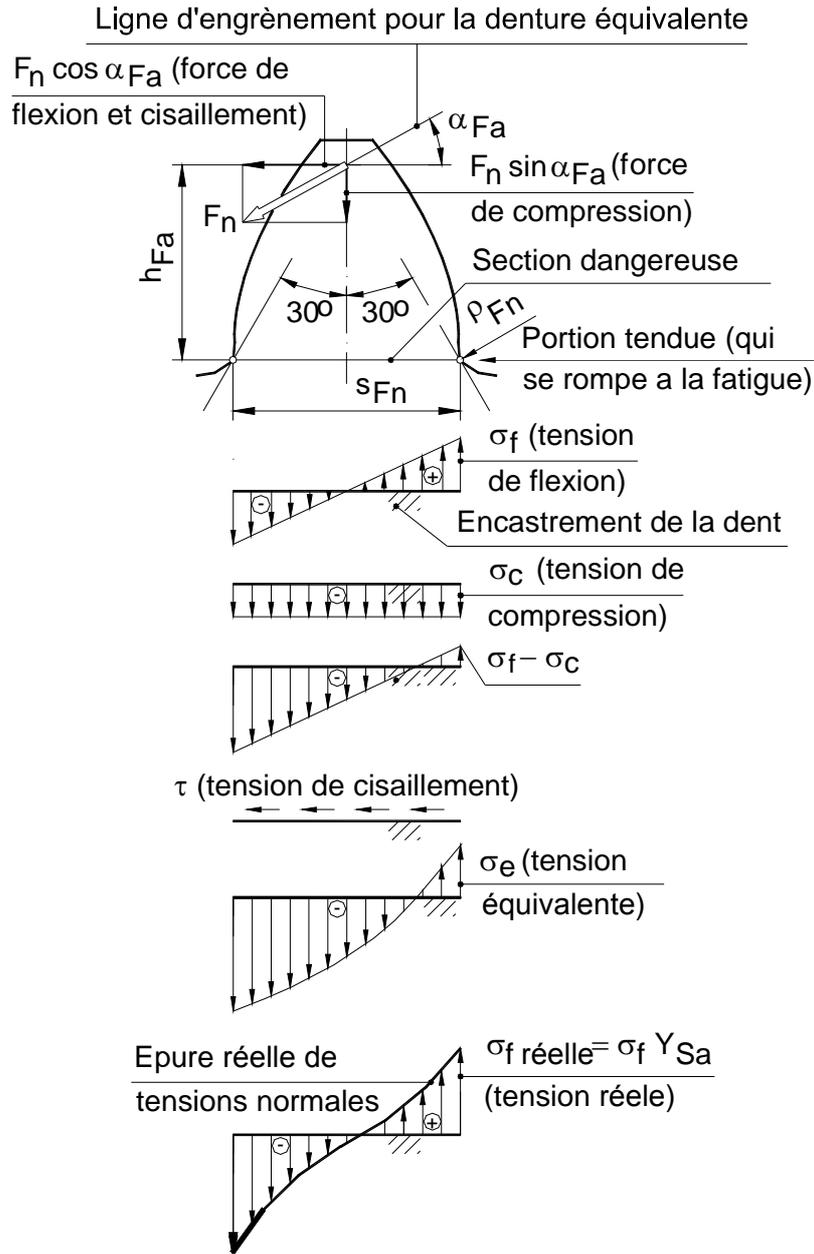


Fig. 2.68. Dent équivalente dans la section normale et les états de tensions au pied de la dent

Les expériences mettent en évidence les suivantes conclusions :

1. l'effet positif de diminution de la tension de tendue déterminée par la tension de compression (c'est-à-dire - la tension totale maximale $\sigma_{fi} - \sigma_c$ dans la portion tendue) est annulé par celui déterminé par le

cisaillement introduit par la composante $F_n \cos \alpha_{Fa}$; comme résultat, la valeur de la tension équivalente maximale sur ce partie, σ_e , s'approche de celle de la tension maximale de flexion, σ_f ;

2. donc on peut considérer que **la tension de flexion réelle** s'obtient de celle maximale de flexion, σ_f , par lui correction avec le facteur de concentration de contrainte, Y_{Sa} :

$$\sigma_{f \text{ réelle}} = \sigma_f Y_{Sa}. \quad (2.151)$$

Mais **la tension de flexion** est (fig. 2.68) :

$$\sigma_f = \frac{M_{fi \max}}{W_z} = \frac{F_n \cos \alpha_{Fa} h_{Fa}}{\frac{b_n s_{Fn}^2}{6}}, \quad (2.152)$$

dont la longueur de la poutre qui remplace la dent est considérée approximativement :

$$b_n \cong \frac{b}{\cos \beta}, \quad (2.153)$$

b étant la longueur axiale de la dent à la roue qui se calcule (b_1 ou b_2). En utilisant aussi l'expression (2.131) pour la force normale primitive – établie par la déduction 1 de forces nominales – l'expression (19.164) devient :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\frac{F_t}{\cos \alpha_n \cos \beta} \cos \alpha_{Fa} h_{Fa}}{\frac{b \cdot s_{Fn}^2}{6 \cos \beta}} = \\ &= \frac{F_t}{b m_n} \cdot \frac{6 \frac{h_{Fa}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fa}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cos \alpha_n} = \\ &= \frac{F_t}{b \cdot m_n} Y_{Fa}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Plus haut est apparu **le facteur de forme de tête** (la force étant appliquée à la tête) **de la dent** ::

$$Y_{Fa} = 6 \frac{\frac{h_{Fa}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fa}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cos \alpha_n}; \quad (2.155)$$

Ce facteur est un grandeur géométrique adimensionnelle qui décrit l'effet de flexion de la poutre : la tension de flexion est proportionnelle à cette grandeur.

On fait aussi l'observation que les dimensions du poutre - dent on été faites adimensionnelles dans l'expression (2.154), par l'intermédiaire du module normal, m_n , pour obtenir le facteur de forme (2.155) dans une forme adimensionnelle, de telle sorte que lui établissement se fait simple (graphiquement) pour un module quelconque.

En introduisant (2.154) en (2.151), on obtient la nouvelle expression de la tension de flexion réelle au pied de la dent :

$$\sigma_{f \text{ réelle}} = \sigma_f Y_{Sa} = \frac{F_t}{b m_n} Y_{Fa} Y_{Sa}; \quad (2.156)$$

La tension nominale au pied de la dent s'obtient par l'adaptation de l'expression antérieur pour le cas général de l'existence simultané en engrènement de plusieurs paires de dents (en utilisant la correction à facteur de conduit Y_ε) et de l'existence de la denture hélicoïdale (en utilisant le facteur d'inclinaison de la denture, Y_β) :

$$\sigma_{F0} = \sigma_{f \text{ réelle}} Y_\varepsilon Y_\beta = \frac{F_t}{b m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta. \quad (2.157)$$

En suite on pressente la détermination des facteurs mentionnés plus haut.

1. *Le facteur de forme de tête*, Y_{Fa} , et *le facteur de concentration de contrainte*, Y_{Sa} , sont données en diagrammes, en fonction de nombre de dents normal, z_n , et de coefficient normal de déport de profil, x_n . Il y a aussi des diagrammes qui donnent directement le produit de ces facteurs, qui est appelé *le facteur de tête de la dent* :

$$Y_{FS} = Y_{Fa} Y_{Sa}. \quad (2.158)$$

Le facteur Y_{Sa} dépend directement du *paramètre de concentration de contrainte* :

$$q_s = \frac{S_{Fn}}{2 \rho_{Fn}}, \quad (2.159)$$

dont ρ_F est le rayon de courbure dans le point le plus sollicitée du profil (fig. 2.68). ISO propose l'expression :

$$Y_{Sa} = \left(1,2 + 0,13 \frac{S_{Fn}}{h_{Fa}} \right) q_s^{\frac{1}{1,21+2,3 \frac{h_{Fa}}{S_{Fn}}}}, \quad (2.160)$$

qui est valide pour $1 \leq q_s \leq 8$.

2. Le facteur de conduite, Y_ε , tient en considération l'existence en engrenement de plusieurs paires de dents et se détermine en utilisant l'expression empirique :

$$Y_\varepsilon = 0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_\alpha} \quad (2.161)$$

3. Pour discuter l'effet du facteur d'inclinaison, Y_β , sont représentées sur a fig. 2.69 trois variantes de positions des lignes de contact sur le flanc, en fonction de différents grandeurs du rapport de recouvrement, ε_β . Quand ce rapport est suffisamment grand (fig. 2.69, c) et la ligne de contact a une inclinaison plus grand sur le flanc, l'effet de flexion de la force distribuée le long de ce ligne est diminuée vers le pied. Mais cet effet ne doit être surestimée pour une inclinaison plus grand de la denture; vraiment, quand le contact se réalise sur un ligne très courte sur un coin de la dent, des erreurs géométriques plus grands existantes peuvent déterminer un concentration grand de la charge, ce qui peut déterminer la rupture de la dent. On recommande :

$$Y_\beta = 1 + \varepsilon_\beta \frac{\beta^\circ}{120^\circ} \quad (2.162)$$

Si $\varepsilon_\beta > 1$, on prend $\varepsilon_\beta = 1$; et si $\beta > 30^\circ$, on prend $\beta = 30^\circ$.

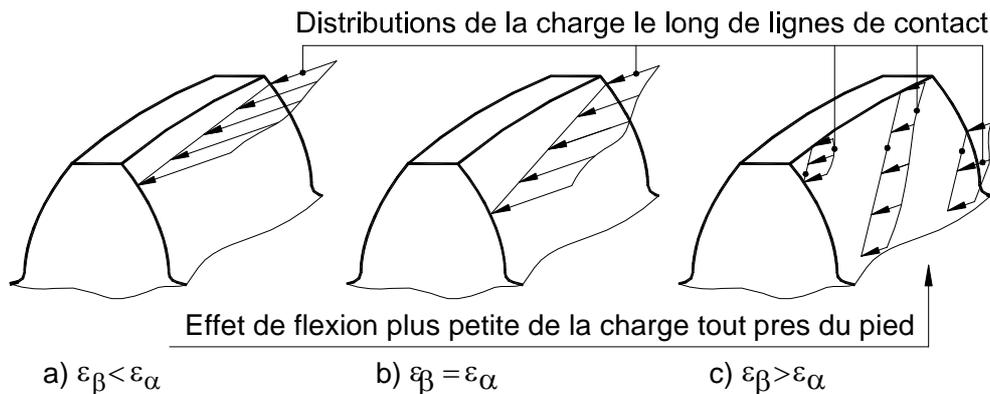


Fig. 2.69. Positions des lignes de contact sur le flanc pour différentes grandeurs du rapport de recouvrement par rapport à celui de conduit frontal et distributions de charge le long de celles lignes

Tension (résistance) à la fatigue par flexion au pied de la dent s'obtient de celle nominale donnée par l'expression (2.157), dans laquelle on inclut aussi les facteurs de correction de la force :

$$\sigma_F = \sigma_{F0} K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}, \quad (2.163)$$

ou, dans une forme plus générale qui inclut la condition à la limite :

$$\sigma_F = \frac{F_t K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}}{b m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta \leq \sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F \text{ lim}}}{S_{F \text{ min}}}. \quad (2.164)$$

Les grandeurs de vérification sont : la tension (résistance) admissible à la rupture par fatigue du pied de la dent, σ_{FP} ; la tension (résistance) limite du matériau de la roue, $\sigma_{F \text{ lim}}$ (elle sera discutée plus tard) ; le facteur de sûreté minimal, $S_{F \text{ min}}$ ($S_{F \text{ min}} = 1,25$ pour la fiabilité normale de 0,99).

On peut faire aussi la vérification du facteur de sûreté effective :

$$S_F = \frac{\sigma_{F \text{ lim}}}{\sigma_F} \geq S_{F \text{ min}}. \quad (2.165)$$

2.2.5.3. Tensions limites

2.2.5.3.1. Tensions limites à la fatigue des flancs

La tension limite du matériau à la fatigue de contact des flancs (pitting) se détermine à l'expression :

$$\sigma_{H \text{ lim}} = \sigma_{H \text{ lim } b} Z_N Z_L Z_V Z_R Z_W Z_X. \quad (2.166)$$

Une grandeur clef dans l'expression antérieure est la tension (résistance, contrainte) limite de base du matériau, $\sigma_{H \text{ lim } b}$. Elle se détermine dans des conditions standard pour roues à même matériau, traitement thermique et rugosité du flanc, conforme à une fiabilité normale de 0,99. C'est-à-dire, l'établissement de la tension limite du matériau de la roue s'obtient par la correction (adaptation) de la résistance limite de base aux caractéristiques concrètes de l'engrenage de calcul. Le premier facteur de correction, Z_N , sera discuté plus tard. Les autres facteurs de correction sont discutés ci-après.

1. Le facteur des matériaux de lubrification, Z_L , considère l'influence de la viscosité du lubrifiant. Une viscosité plus grand que celle standard réduit le danger d'apparition des piqûres, parce que le lubrifiant pénètre plus difficile en microfissures, donc l'effet hydrostatique se réduit, le régime de lubrification EHD est amélioré, donc se réduit le coefficient de frottement et la tension tangentielle en sous-couche qui génère des microfissures, les charges dynamique sont plus réduites (se revoir les considérations du sous-chapitre 2.2.2.3).

2. Le facteur de vitesse, Z_V , considère l'effet de la vitesse périphérique sur la résistance au pitting. Une vitesse plus grande que celle standard réduit le danger d'apparition des piqûres, parce que est favorisée l'apparition du régime EHD (se revoir les considérations du sous-chapitre 2.2.2.3).
3. Le facteur de rugosité des flancs, Z_R , considère l'influence de ce rugosité sur la résistance au pitting. Une rugosité plus grande que celle standard réduit la portance aux piqûres, parce que les amorces plus grandes représentés par cette grande rugosité favorise l'apparition des microfissures et, d'autre part, s'interrompt le film de lubrifiant et s'agrandit le frottement entre les flancs (se revoir les considérations du sous-chapitre 2.2.2.3).
4. Le facteur d'écroissage (ou de rapport de duretés entre les deux roues), Z_W , considère l'influence de la différence entre les duretés sur la résistance au pitting. S'il y a une différence plus grande que celle de l'engrenage standard entre les duretés des deux roues, se réduit la résistance à la fatigue, parce que le flanc plus dur détériore plus intensivement le celui plus ductile, surtout la rugosité et les écarts de forme sont relativement grands.
5. Le facteur de dimension, Z_X , considère l'influence des dimensions de la dent sur l'apparition du pitting. Aux engrenages durcies et nitrés se réduit la résistance aux piqûres à un module plus grand par rapport à celui standard, comme résultat de l'accroissance du nombre des amorces, des variations plus grandes en structure etc.

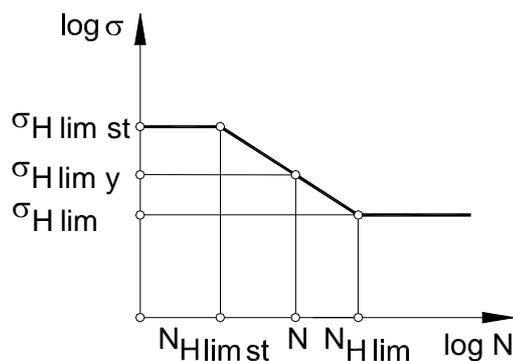


Fig. 2.70. Courbe Wöhler du matériau à la destruction de la denture par pitting

Le facteur de durabilité des flancs, Z_N , nécessite une discussion plus ample. On utilise pour cela la courbe Wöhler pour le matériau de la roue (fig. 2.70). Ce courbe est indiquée en standards (DIN 3990, ISO 6336, STAS 12268-84) pour différents types d'aciers et fontes. On observe l'existence de trois zones en fonction du nombre de cycles de sollicitation N :

1. la zone de la sollicitation statique, $N \leq N_{H \text{ lim st}}$, ou la

résistance statique ne se diminue pas nombre de cycles :

$$\sigma_{H \text{ lim st}} = ct ;$$

2. la zone de la durabilité limitée, $N_{H\text{lim st}} < N \leq N_{H\text{lim}}$, dans laquelle la résistance $\sigma_{H\text{lim y}}$ se diminue linéairement (en coordonnées logarithmiques) à nombre de cycles ;
3. la zone de la résistance non - limitée à la fatigue, $N > N_{H\text{lim}}$, dans laquelle la résistance à la fatigue de contact des flancs est constante, $\sigma_{H\text{lim}} = \text{ct}$ (cette résistance est même $\sigma_{H\text{lim b}}$ pour le matériau essayé en conditions standard, lorsque, évidemment, $Z_N = 1$).

Les valeurs pour le facteur de durabilité Z_N sont recommandées en standards pour les premières deux zones de nombre de cycles.

2.2.4.3.2. Tension limite à la fatigue par flexion du pied de la dent

La tension limite à la fatigue de flexion du pied de la dent s'établit en utilisant l'expression :

$$\sigma_{F\text{lim}} = \sigma_{0\text{lim b}} Y_N Y_\delta Y_R Y_X, \quad (2.167)$$

où intervienne la grandeur clef spécifique notée $\sigma_{0\text{lim b}}$, qui est la résistance à la fatigue au cycle pulsateur de l'éprouvette lisse de même matériau et traitement thermique que ceux de la roue dentée, qui est essayée en conditions standard. Cette valeur se corrige à facteurs de corrections spécifiques (le facteur Y_N sera discuté plus tard).

1. Le facteur de sensibilité à l'entaille, Y_δ , caractérise l'effet d'entaille ou de contrainte de tensions du matériau. Ce facteur dépend, donc, de matériau et de gradient de tensions. L'effet d'entaille est tant petit que le matériau est plus ductile par rapport de celui de l'éprouvette standard.
2. Le facteur de rugosité du raccordement de la dent, Y_R , corrige la résistance du pied en fonction de la rugosité dans la section dangereuse du pied. L'augmentation de la rugosité par rapport à celle de l'éprouvette diminue la portance à la fatigue de flexion du pied, parce que les amorces sont plus nocives comme effet.
3. Le facteur de dimension, Y_X , prend en considération l'effet de réduction de la résistance du pied à dimensions de la dent, parce que les dimensions plus grandes déterminent :
 - l'effet prépondérant négatif d'augmentation du nombre de points faibles et de défauts;

- l'effet positif, mais plus réduite, des gradients plus petites de tension (en concordance à la théorie d'élasticité).

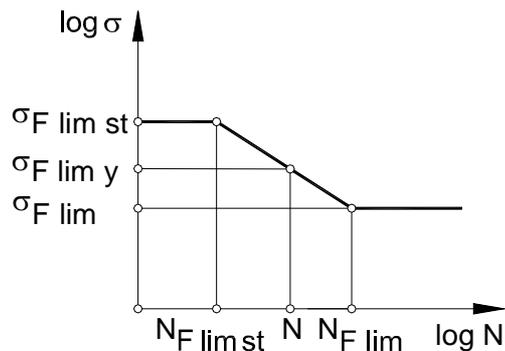


Fig. 2.71. Courbe Wöhler du matériau à la destruction par la fatigue par flexion d'une éprouvette

Le facteur de durabilité à flexion, Y_N , nécessite la même discussion plus ample, liées de la courbe Wöhler à la flexion d'une éprouvette. On observe sur la fig. 2.71 l'existence de trois zones caractéristiques, qui se distinguent par le nombre N de cycles de sollicitation :

1. la zone de la sollicitation statique, $N \leq N_{F \text{ lim st}}$, dont pratiquement la résistance statique ne se diminue pas à nombre de cycles, $\sigma_{F \text{ lim st}} = \text{ct}$;
2. la zone de la durabilité limitée, $N_{F \text{ lim st}} < N \leq N_{F \text{ lim}}$, dans laquelle la résistance $\sigma_{F \text{ lim y}}$ se diminue linéairement (en coordonnées logarithmiques) à nombre de cycles ;
3. la zone de la résistance non - limitée à la fatigue, $N > N_{F \text{ lim}}$, dans laquelle la résistance à la fatigue de contact des flancs est constante, $\sigma_{F \text{ lim}} = \text{ct}$ (c'est évident que sur ce zone la résistance à la fatigue est $\sigma_{0 \text{ lim}}$ et $Y_N = 1$).

Les valeurs pour le facteur de durabilité Y_N sont recommandées en standards pour les premières deux zones de nombres de cycles.

2.2.6. Méthodologie de conception des engrenages cylindriques

2.2.6.1. Etapes

La méthodologie de conception des engrenages cylindriques est synthétisée dans le schéma de fig. 2.72. On part d'un nombre restreint de données initiales de conception. Des autres données sont adoptées initialement, mais aussi sur le parcours.

Plus bas on traite largement les données de conception, le dimensionnement et la vérification de la trempe du matériau. Les autres étapes de dimensionnement seront développées ainsi :

1. le calcul des éléments géométriques – conformément avec es considérations traitées dans le sous – chapitre 2.2.1 ;

2. la vérification de résistance (aux sollicitations de contact sur flanc et de rupture de la dent) – par l'adaptation des considérations de calcul de dimensionnement ;
3. la représentation en dessins des roues dentées – par l'application des connaissances du dessin technique.

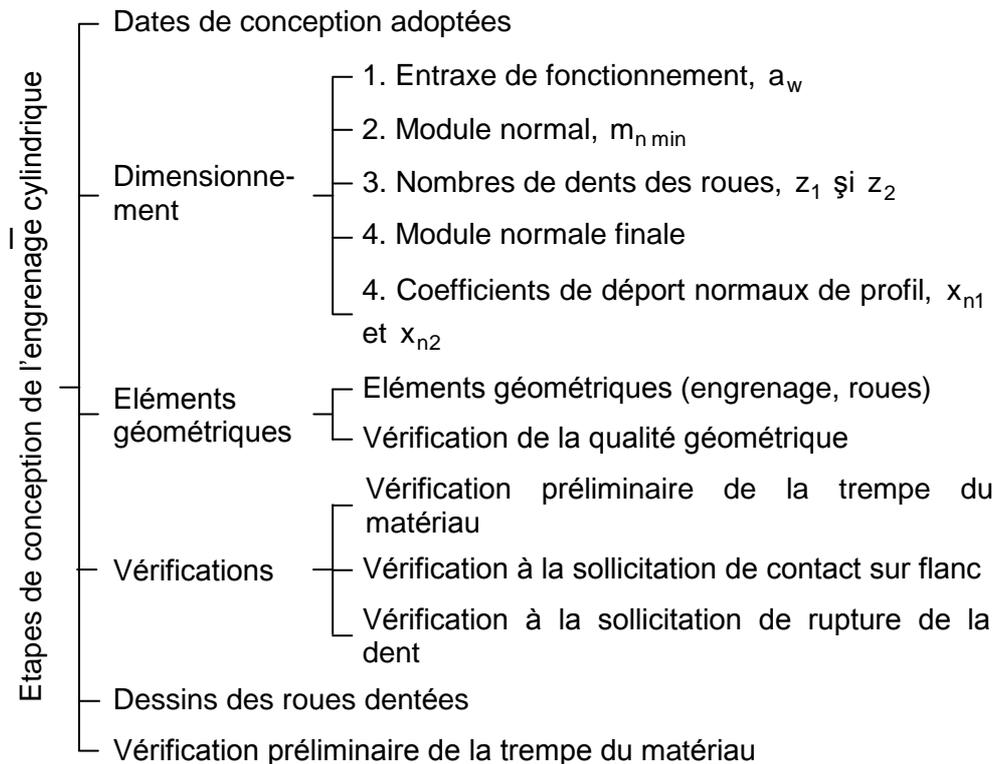


Fig. 2.72. *Étapes de conception des engrenages cylindriques*

2.2.6.2. Données de conception

Les données de conception sont choisies initialement ou quelques d'elles peuvent être établies sur parcours. On indique plus bas les données initiales d'intérêt.

1. L'angle d'inclinaison de référence de la denture :
 - a) $\beta = 10^\circ$ - dans le cas des dentures faites par aciers durcis superficiellement (carbonisation –trempe -revenue bas) qui sont recommandées pour l'obtention du gabarit et prix de coût minimales, comme on a été montrée antérieurement (le sous – chapitre 2.2.2.5) ;

- b) $\beta = 15^\circ$ - dans le cas des dentures d'acier d'améliorations ; la valeur plus grande s'explique par la portance plus petite de ces matériaux et, donc, par le chargement axial plus réduit des paliers (ce fait permet l'accroissement du chargement axial des paliers par cet angle d'inclinaison plus grand).
2. La longueur relative de la denture est donnée par le facteur diamétral longitudinal (de longueur) de la denture, ψ_d , se voir l'expression (2.117). de raisons de gabarit minimal et de qualité fonctionnelle, on recommande les valeurs ψ_d conformément au tableau 2.8. les valeurs plus réduites déterminent l'accroissement du gabarit ; par différence, les valeurs plus grandes causent un effet plus négatif fonctionnel : la distribution plus non – uniforme de la charge sur la longueur de la denture, donc le décroissement de la portance de l'engrenage.

Tableau 2.8. *Recommandations des valeurs le facteur diamétral longitudinal de la denture aux engrenages cylindriques, ψ_d*

Position du pignon	Denture durcie superficiellement			Denture améliorée et normalisée		
	Classe de précision conformément à STAS 6273-81					
	5-6	7-8	9-10	5-6	7-8	9-10
Symétrique entre paliers	1,0	0,7	0,4	1,5	1,3	0,8
Asymétrique entre paliers	0,7	0,4	0,3	1,3	0,8	0,6
En console	0,4	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3

2.2.6.3. Dimensionnement des engrenages cylindriques

2.2.6.3.1. Introduction

Le dimensionnement des engrenages cylindriques se fait en utilisant la minimisation du gabarit de l'engrenage comme le critère primordial d'optimisation. Cette minimisation s'obtient en utilisant :

1. la minimisation géométrique, qui se réalise par la méthode qui sera présentée ci-après :
2. le choix – conformément des considérations de sous-chapitre 2.2.2.6 – d'un acier de grande résistance mécanique et qui peut être durcis superficiellement (par exemple, l'acier 18 Mn Cr 10 STAS 791-80).

2.2.6.3.2. Etape 1 : calcul de l'entraxe de fonctionnement minimal

Le dimensionnement de l'entraxe de fonctionnement assure la première condition de minimisation du gabarit par géométrie. Pour démontrer ce chose, on parte de la condition de la résistance à la sollicitation de contact sur flanc, donnée par l'expression (2.149):

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_{t1} K_A K_V K_{H\alpha} H_{H\beta}}{b_w d_1} \frac{i_{12} + 1}{i_{12}}} \leq \sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_{Hmin}}.$$

Un partie de l'expression sous - radical se transforme ainsi :

$$\frac{F_{t1}}{b_w d_1} = \frac{2 F_{t1}}{b_w d_1} \frac{1}{b_w d_1} = \frac{2 M_{t1}}{b_w d_1^2} \quad (2.168)$$

Mais le volume de la roue (dans le present cas – le pignon) est proportionnelle à produit $b_w d_1^2$ qui apparut dans cette expression :

$$\text{Volume pignon} \approx b_1 \frac{\pi d_1^2}{4}.$$

Il en résulte que le dimensionnement de condition de résistance à la fatigue par piqûres conduit aux dimensionnement minimales des roues et, donc, de l'engrenage.

Pour choisir la dimension qui sera établit par calcul, on part des données de conception existantes. L'une est le facteur axial longitudinal (de la longueur) de la denture :

$$\psi_a = \frac{b_w}{a_w}, \quad (2.169)$$

d'où on obtient la longueur de la denture dans la forme :

$$b_w = \psi_a a_w. \quad (2.170)$$

D'autre part, le diamètre primitif du pignon peut être écrit approximativement en fonction de l'entraxe de fonctionnement :

$$a_w \approx a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_1}{2} (1 + i_{12}), \quad (2.171)$$

d'où:

$$d_1 \cong \frac{2 a_w}{(1 + i_{12})}. \quad (2.172)$$

Comme résultat, dans l'expression de calcul de résistance s'obtient après remplacements une seule dimension : l'entraxe de fonctionnement. Vraiment :

$$\begin{aligned}
\sigma_H &= Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{2 M_{t1} K_A K_V K_{H\alpha} H_{H\beta} i_{12} + 1}{b_w d_1^2 i_{12}}} = \\
&= Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\frac{2 M_{t1} K_A K_V K_{H\alpha} H_{H\beta} i_{12} + 1}{\psi_a a_w \left[\frac{2 a_w}{(1+i_{12})} \right]^2 i_{12}}} \quad (2.173) \\
&= Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{M_{t1} K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta} (1+i_{12})^3}{2 \psi_a a_w^3 i_{12}}} \leq \sigma_{HP}.
\end{aligned}$$

Il en résulte l'expression de calcul de l'entraxe de fonctionnement :

$$a_w \geq a_{w \min} = (1+i_{12}) \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{t1} K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta} (Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta)^2}{2 \cdot \psi_a i_{12} \sigma_{HP}^2 (Z_N Z_L Z_V Z_R Z_W Z_X)^2}} \quad (2.174)$$

Le calcul se fait en adoptant des valeurs moyennes des facteurs qui interviennent dans cette expression, qui sont recommandées, par exemple, par Radulescu et collaborateurs (1986) et STAS 12268-84. (quelques recommandations sont données plus bas)

1. Le facteur d'application (solicitation de contact), K_{AH} , résulte en utilisant l'expression (2.113).
2. Le facteur dynamique (interne) se recommande – dans l'idée que la précision de l'engrenage est corrélée à sa vitesse périphérique (STAS 12192-84), aspect qui se vérifie après le dimensionnement :
 - a) $K_V = 1,2$ - aux engrenages à denture droite ;
 - b) $K_V = 1,15$ - aux engrenages à denture inclinée.
3. Le facteur de la répartition longitudinale de la charge (solicitation de contact) dans le cas d'adoption des valeurs données dans le tableau 2.8 pour le facteur diamétral longitudinal de la denture, ψ_d :
 - a) $K_{H\beta} = 1,3...1,4$ - aux dentures soumises au rodage (aciers d'amélioration);
 - b) $K_{H\beta} = 1,5$ - aux dentures non – soumises au rodage (durcies superficiellement).
4. Le facteur de la répartition frontale de la charge (solicitation de contact), $K_{H\alpha}$, qui est recommandé ainsi :

- a) $K_{H\alpha} \approx 1$ - aux engrenages précises (classes de précision 1...7) ;
- b) $K_{H\alpha} \approx \frac{1}{Z_\varepsilon^2}$ - aux engrenages imprécises (Z_ε étant le facteur de conduite, qui sera discutée plus tard).
5. Le facteur géométrique, qui peut être apprécié approximativement (avec une précision suffisante) en utilisant son expression de définition (2.141) :

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \beta_b}{\cos^2 \alpha_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_{wt}}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \beta_b}{\cos \alpha_t \cdot \sin \alpha_t}}; \quad (2.175)$$

plus haut, l'angle d'inclinaison de base est donnée par (2.142), qui est repris plus bas:

$$\beta_b = \arctan (\cos \alpha_t \operatorname{tg} \beta),$$

et l'angle de pression de référence frontal résulte de (2.34) :

$$\alpha_t = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta} \right). \quad (2.176)$$

6. Le facteur d'élasticité (de matériau) dérive pour les deux roues d'acier en utilisant l'expression (2.143), dans la forme $Z_E = 189,8 \sqrt{\text{MPa}}$.
7. Le facteur de conduite : $Z_\varepsilon = 1$.
8. Le facteur d'inclinaison est donnée par (2.162).
9. La tension (résistance) admissible à la fatigue de contact des flancs, σ_{HP} - se voir (2.149) – est définie par la tension limite du matériau (le moins résistant) des roues, $\sigma_{H \lim}$, et le facteur de sûreté minimal, $S_{H \min}$ (=1,15 à la fiabilité normale, de 0,99). Les autres grandeurs qui définissent la tension limite du matériau $\sigma_{H \lim}$ - se voir (2.166) – sont acceptées au dimensionnement ainsi :
- a) la tension (résistance, contrainte) limite de base du matériau, $\sigma_{H \lim b}$, est donnée dans le tableau 2.3 ;
- b) le facteur de durabilité des flancs, $Z_N = 1$, dans l'idée que la durée de la vie de l'engrenage dépasse le domaine de la durabilité limite de la courbe Wöhler ;

- c) le facteur des matériaux de lubrification, $Z_L = 1$,
- d) le facteur de vitesse, $Z_V = 1$,
- e) le facteur de rugosité des flancs, $Z_R = 1$,
- f) le facteur d'écrouissage (ou de rapport de duretés entre les deux roues), $Z_W = 1$,
- g) le facteur de dimension, $Z_X = 1$.

Si le résultat de calcul futur de vérification à la sollicitation de contact des flancs sera inacceptable avec ces valeurs préliminaires, le calcul de l'entraxe de fonctionnement se refait en introduisant des valeurs plus précises qui peuvent être établies dans ce calcul de vérification.

En général, l'entraxe de fonctionnement calculé se standardise conformément à STAS 6055-82 (tableau 2.9). Pour cela, on analyse entre quelles valeurs standardisées se trouve l'entraxe de fonctionnement minimal, $a_{w \min} \in [a_{STAS i}, a_{STAS i+1}]$ et puis se choisit :

1. la valeur inférieure de l'intervalle :

$$a_w = a_{STAS i}, \quad (2.177)$$

si :

$$a_w \leq 1,05 a_{STAS i}, \quad (2.178)$$

2. en cas contraire, on adopte la valeur supérieure de l'intervalle :

$$a_w = a_{STAS i+1}, \quad (2.179)$$

Tableau 2.9. Entraxe de fonctionnement, a_w , en mm (extrait de STAS 6055-82)

Série I	40	50	63	80	100	125	160	200	250	315
Série II	45	56	71	90	112	140	180	225	280	355

Notâ. 1. Les valeurs jusqu'à 3600 mm s'obtiennent par la multiplication à 10 des valeurs du tableau. 2. On recommande à priorité la série 1; cette recommandation devient facultative en absence des engrenages fabriqués sur marché.

2.2.6.3.3. Etape 2: calcul du module normal minimal nécessaire

Le dimensionnement du module se fait de la condition (2.164) de résistance à la rupture par fatigue du pied de la dent (repris ci-après) :

$$\sigma_F = \frac{F_t K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}}{b m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta \leq \sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F \lim}}{S_{F \min}}.$$

L'expression est valable pour quelconque roue. Mais ci-après elle est particularisée pour le pignon, de telle sorte que elle devient successivement :

$$\begin{aligned}
 \sigma_F &= \frac{F_t K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}}{b m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta = \\
 &= \frac{2 M_{t1}}{d_1} \frac{K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}}{\psi_a a_w m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta = \\
 &= \frac{2 M_{t1} K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}}{\psi_a a_w \frac{2 a_w}{(1+i_{12})} m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta = \\
 &= \frac{M_{t1} (1+i_{12}) K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}}{\psi_a a_w^2 m_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta \leq \sigma_{FP}.
 \end{aligned} \tag{2.180}$$

D'ici on résulte le module normal:

$$m_n \geq m_{n\min} = \frac{M_{t1} (1+i_{12}) K_A K_V K_{H\alpha} K_{H\beta}}{\psi_a a_w^2 \sigma_{FP}} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon Y_\beta. \tag{2.181}$$

Pour faire le calcul de cette expression, on adopte préliminairement des valeurs moyennes usuelles données pour les facteurs qui y interviennent (Radulescu et collaborateurs, 1986 ; STAS 12268-84), qui sont présentées plus bas.

1. Le facteur d'application (solicitation du pied de la dent), K_{AH} , résulte en utilisant l'expression (2.112).
2. Le facteur dynamique (interne) se choisit similairement que dans le calcul de l'entraxe minimal (se voir lu sous – chapitre antérieur).
3. Le facteur de la répartition longitudinale de la charge (solicitation du pied de la dent) peut être considéré $K_{F\beta} = K_{H\beta}$.
4. Le facteur de la répartition frontale de la charge (solicitation du pied de la dent) : $K_{F\alpha} = K_{H\alpha}$.
5. Le facteur de forme de tête de la dent (méthode C conformément à STAS 12268-84) : $Y_{Fa} = 2,5$.
6. Le facteur de concentration de contrainte : $Y_{Sa} = 2$.
7. Le facteur de conduit (solicitation du pied de la dent) : $Y_\varepsilon = Z_\varepsilon$.
8. Le facteur d'inclinaison de la denture : $Y_\beta = Z_\beta$.

9. La tension (résistance) à la fatigue par flexion au pied de la dent, σ_{FP} - se voir (2.164) – est défini par la tension (résistance) limite du matériau de la roue, $\sigma_{F\lim}$, et le facteur de sûreté minimal, $S_{F\min}$ (=1,25 pour la fiabilité normale de 0,99). Les autres grandeurs qui définissent la résistance $\sigma_{F\lim}$ - se voir (2.167) – sont acceptées au dimensionnement ainsi :
- la résistance à la fatigue au cycle pulsateur de l'éprouvette lisse de même matériau et traitement thermique que ceux de la roue dentée, $\sigma_{0\lim b}$ conformément au tableau 2.3;
 - le facteur de durabilité à flexion : $Y_N = 1$, dans l'idée que la durée de la vie de l'engrenage dépasse le domaine de la durabilité limite de la courbe Wöhler ;
 - le facteur de sensibilité à l'entaille : $Y_\delta = 1$;
 - le facteur de rugosité du raccordement de la dent :
 - $Y_R = 1$ - pour des roues avec le pied de la dent rectifié, ayant $Ra \leq 16 \mu\text{m}$;
 - $Y_R = 0,95$ - pour des autres cas;
 - le facteur de dimension (solicitation du pied de la dent) : $Y_X = 1$.

On répète la même observation fait antérieurement au calcul de l'entraxe : si les valeurs des facteurs obtenues par le calcul de vérification à la sollicitation de rupture par fatigue du pied de la dent différent beaucoup de celles d'ici, se refait le calcul du module en introduisant des valeurs plus précises de ces facteurs.

Le module se standardise d'après STAS 821-82 (tableau 2.10) après la troisième étape (d'établissement des nombres de dents), ainsi que on résulte un engrenage plus :

$$a_w - a > 0. \quad (2.182)$$

Tableau 2.10. Module (en mm) pour la mécanique générale et lourde (extrait de STAS 822-82)

Serie I	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10
Serie II	1,125	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11

Note. La série I est recommandée pour choisir plus aisément des outils pour la usiner la denture cylindrique.

2.2.6.3.4. Etape 3 : établissement des nombres de dents

En partant des grandeurs établies antérieurement (l'entraxe de fonctionnement, a_w , et le module normal, m_n), se peut définir une méthode géométrique optimale d'établissement des nombres de dents et le déports de profils. La méthode assure une portance optimale dans deux modes décisifs de destruction de la denture : la sollicitation de contact des flans et la sollicitation de rupture par fatigue de la dent.

Le nombre de dents maximal du pignon. Le nombre de dents du pignon (la roue petite) s'obtient en partant de la condition que l'engrenage soit plus, type qui assure des avantages fonctionnels aussi pour les roues que pour l'engrenage. On considère de ce point de vue deux conditions d'existence de l'engrenage plus :

1. la différence entre l'entraxe de fonctionnement et l'entraxe de référence soit positive – se voir l'expression déjà définie (2.182) :

$$a_w - a \geq 0 ;$$

2. cette différence est limitée supérieurement, condition basée sur expérience :

$$a_w - a \leq 1,1 m_n , \quad (2.183)$$

La première expression (2.182) se développe dans la forme:

$$a_w - a = a_w - \frac{m_{n\min}(z_1 + z_2)}{2 \cos \beta} = a_w - \frac{m_{n\min} z_1}{2 \cos \beta} (1 + u) \geq 0 , \quad (2.184)$$

d'où on obtient le nombre de dents limité supérieurement par un nombre maximale, $z_{1\max}$:

$$z_1 \leq z_{1\max} = \frac{2 a_w \cos \beta}{m_{n\min}} (1 + u) . \quad (2.185)$$

La deuxième expression ((2.183) devient :

$$a_w - a - 1,1 m_n = a_w - \frac{m_{n\min} z_1}{2 \cos \beta} (1 + u) - 1,1 m_n \leq 0 , \quad (2.186)$$

d'où on obtient le nombre de dents limité inférieurement par un nombre minimal, $z_{1\min}$:

$$z_1 \geq z_{1\min} = \frac{2 (a_w - m_n) \cos \beta}{m_{n\min} (u + 1)} . \quad (2.187)$$

Le choix final du nombre de dents (comme un nombre naturel) est fait en tenant compte des recommandations suivantes :

- a) $z_1 = 2 \dots 17$ (21) – si les dentures sont d'aciers durcies superficiellement par carbonisation -trempe- revenue à faible température;

- b) $z_1 = 2 \dots 23$ (25) – si les dentures sont d'aciers durcis en surface par trempe inductive ou par nitruration ;
- c) $z_1 = 25 \dots 35$ – si les dentures sont d'aciers d'amélioration ($HB \leq 3500$ MPa).

Le nombre de dents de la roue résulte simplement :

$$z_2 = u z_1, \quad (2.188)$$

qui s'arrondit aussi à un nombre naturel.

On analyse maintenant si sont remplies les suivantes conditions.

1. Les nombres de dents ne doivent pas avoir des diviseurs communs. Ainsi on évite le contact fréquent des mêmes paires de dents, qui maintiendrait une excitation interne et déterminerait un comportement mal de l'engrenage aux vibrations et bruit.
2. Le rapport d'engrènement effectif (qui sera défini ci-après) ne diffère pas par rapport de celui standard (normalisé) que dans des limites imposées (ce condition s'impose s'il y a sets de roues standards on marché¹, dont l'engrenage peut être constitué) :

$$\Delta u = \frac{|u - u_{ef}|}{u} \leq \Delta u_a = 0,03. \quad (2.189)$$

Plus haut on a intervenue le rapport d'engrènement effective :

$$u_{ef} = \frac{z_{grand} (\equiv z_2)}{z_{petite} (\equiv z_1)}. \quad (2.190)$$

3. L'engrenage est plus, conformément aux expressions (2.182) et (2.183). Sinon, on reprend le choix des nombres de dents utilisant:
 - une autre valeur z_2 ;
 - or, si n'on obtient pas un résultat dans la variante antérieure – une autre valeur z_1 .

2.2.6.3.5. Etape 4 : établissement du module normal final

En fonction de nombres de dents choisies (préliminairement), on recalcule et on standardise le module. L'ordre de calcul est donné plus bas.

1. On établit la gamme des valeurs entre qu'elles on peut trouver le module standardisé, ainsi que la somme de coefficients de déport soit positive :

¹ Dans notre pays n'existent pas des normes pour la fabrication et l'existence de sets de roues. Mais se recommande la vérification de ce condition comme un option généralement valable.

$$m_n = m_{STAS} \in [m_{n\ inf}; m_{n\ sup}]; \quad (2.191)$$

pour cela, on calcule :

- a) la limite supérieure $m_{n\ sup}$ qui résulte de l'expression (2.182) d'accomplissement du somme minimale des déports de profil:

$$m_n \leq m_{n\ sup} = \frac{2 a_w \cos \beta}{z_1 + z_2}; \quad (2.192)$$

- b) la limite inférieure $m_{n\ inf}$ qui résulte de l'expression (2.183) de limitation de la somme maximale des déports de profil :

$$m_n \geq m_{n\ inf} = \frac{2 a_w \cos \beta}{z_1 + z_2 + 2,2 \cos \beta}. \quad (2.193)$$

2. On standardise le module conformément à STAS 822-82 (tableau 2.10). Si n'on pas obtient une valeur standardisée qui assure les conditions (2.192) et (2.193), on fait les suivantes modifications :

- a) on choisit une autre valeur z_2 ;
 b) on reprend le recherche en commençant avec une autre valeur z_1 .

2.2.6.3.6. Etape 5 : établissement des coefficients de déport du profil

On calcule successivement les suivantes éléments géométriques pour établir les coefficients de déport normal de déport de profil :

1. l'entraxe de référence, a , en utilisant (2.68) ;
2. l'angle de pression de référence frontal, α_t , en utilisant (2.34);
3. l'angle d'engrènement frontal, qui résulte de (2.67) dans la forme :

$$\alpha_{wt} = \arccos\left(\frac{a \cos \alpha_t}{a_w}\right); \quad (2.194)$$

4. la somme des coefficients normaux de déport de profil, qui résulte de (2.65) dans la forme :

$$x_{ns} = \frac{z_1 + z_2}{2 \operatorname{tg} \alpha_n} \cdot (\operatorname{inv} \alpha_{wt} - \operatorname{inv} \alpha_t); \quad (2.195)$$

5. le coefficient normal de déport de profil du pignon, conformément à la recommandation de ISO TR 4467:1982:

$$x_{n1} \approx x_{ns} \cdot \frac{1}{u+1} + \lambda \frac{u-1}{u+1}, \quad (2.196)$$

dans l'expression antérieure on prend :

- a) $u = 5$, pour $u > 5$;
 - b) $\lambda \in [0,5 \dots 0,75]$ aux engrenages réducteurs;
 - c) $\lambda \in [0 \dots 0,5]$ aux engrenages multiplicateurs.
6. le coefficient normal de déport de profil de la roue, qui résulte par la différence :

$$x_{n2} = x_{ns} - x_{nt} \quad (2.197)$$

2.2.6.4. Vérification du trempé du matériau

Dans le cas d'utilisation des aciers traités thermiquement, mais aussi de fontes à graphite sphéroïdal ou perlitique pour les roues dentées, il est nécessaire la vérification de la possibilité d'assurance une dureté suffisante dans l'entière épaisseur sollicitée (minimum 80-90% martensite). Pour ça on vérifie la telle appelée dimension caractéristique s . Comme on a été montrée au sous-chapitre 2.2.3, le matériau est choisit correctement si la dimension caractéristique calculée pour la forme de roue est plus petite que la dimension caractéristique maximale spécifique pour le matériau, $s_{cal} \leq s_{max}$. Si cette condition n'est pas accomplit, on se réélut le matériau.

Les dimensions caractéristiques de calcul pour deux formes usuelles de roues dentées – l'arbre - pignon et la roue dentée – sont indiquées sur la fig. 2.73

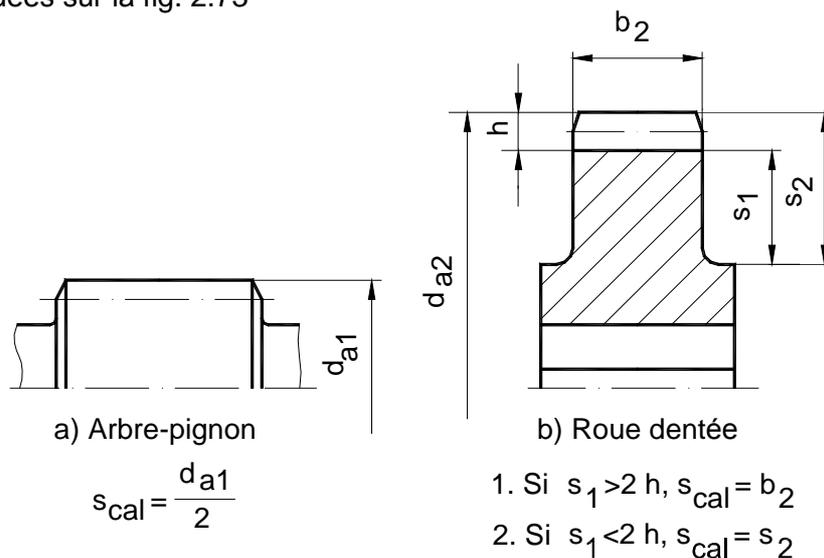


Fig. 2.73. Dimensions caractéristiques de calcul pour deux formes usuelles de roues dentées cylindriques

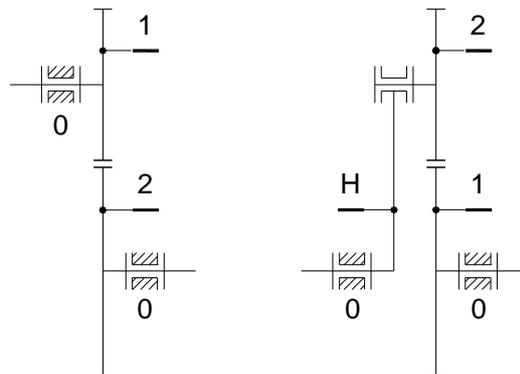
2.3. Transmissions par roues dentées

2.3.1. Introduction

Le rapport de transmission réalisée par un engrenage cylindrique ou conique est limitée ($i \leq 6$), pour éviter les différences grandes de gabarit entre les roues dentées d'un engrenage. Mai en pratique il est nécessaire à réaliser des rapports de transmissions grandes. Dans ce scope on utilise plusieurs roues dentées, qui forme les telles appelées **transmissions par roues dentées**.

Une classification de base des transmissions par roues dentées est liée de la possibilité de mouvement relative des axes des roues dentées. Dans le sous-chapitre 2.1.2 on a été donnée une classification des engrenages de ce point de vue :

1. **des engrenages ordinaires**, qui ont les axes de roues dentées 1 et 2 fixes par rapport à une base 0 (fig. 2.74, a) ;
2. **des engrenages planétaires**, qui ont une roue dentée 2 à axe mobile autour de celui fixé par rapport à base 0 de l'autre roue 1 (fig. 2.74, b).



a) Engrenage ordinaire b) Engrenage planétaire

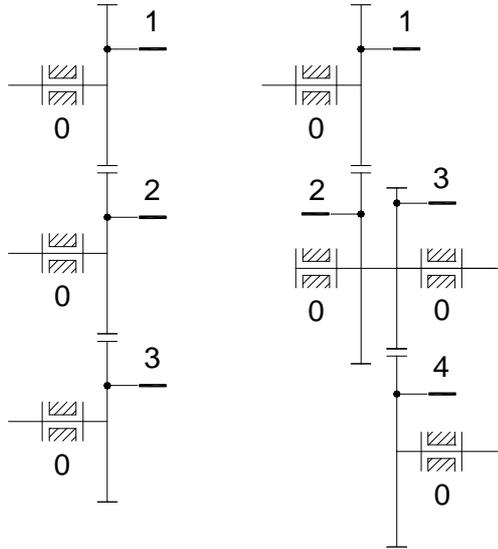
Fig. 2.74. Schémas cinématiques des engrenages parallèles cylindriques ordinaire (a) et planétaire (b)

Cette classification se maintient dans le cas le plus général des transmissions par roues dentées. C'est-à-dire il y a similairement :

1. **des transmissions ordinaires par roues dentées**, qui ont les axes de roues dentées fixes par rapport à une base (fig. 2. 75 et 2.76) ;
2. **des transmissions planétaires par roues dentées**, qui ont une roue dentée à axe mobile autour de celui fixe de l'autre roue (fig. 2.78).

2.3.2. Transmissions ordinaires par roues dentées

On va analyser largement les transmissions qui contiennent seulement des roues dentées cylindriques, qui sont les plus utilisées en



a) Roues en série b) Roues en parallèle

Fig. 2.75. Schémas cinématiques des trains ordinaires de roues cylindriques montées en série (a) et en parallèle (b)

pratique. Deux variants sont présentées sur la fig. 2.75. On voit que les roues dentées peuvent être liées en série (fig. 2.75, a) ou en parallèle (fig. 2.75, b).

La transmission ordinaire par roues liées en série assure un gabarit frontal réduit, comme le celui d'un engrenage cylindrique, en transmettant le mouvement à la distance.

La transmission ordinaire par roues en parallèle assure un rapport de transmission plus grand qu'un seule engrenage, un besoin imposé fréquemment en pratique. Mais le désavantage est le la complexité constructive, qui est causée de l'utilisation d'un nombre grand

de roues.

On met le problème de calculer le rapport de transmission total (assurée de l'entier transmission). Le rapport de transmission est considérée ci-après comme un grandeur algébrique, pour se voir le sens de la vitesse angulaire de l'arbre menée par rapport à celle de l'arbre menant.

Transmission ordinaire par roues liées en série (fig. 2.75, a). Le rapport de transmission totale est écrit comme un produit de rapports partiels :

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} = i_{12} i_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) = \frac{z_3}{z_1}. \quad (2.198)$$

Observations.

1. On voit que le rapport a été écrit comme définition et puis par considération des éléments géométriques (ici les nombres de dents de roues dentées).
2. On constate que le rapport de transmission total ne dépend pas de roues intermédiaires, qui sont appelées à ce cause « roues parasites ».
3. On voit aussi que le rapport de transmission totale a émergé positif pour la transmission analysé. Donc les vitesses angulaire menante, ω_1 , et menée, ω_3 , du transmission analysé sont de même sens. Dans cette idée, on imagine facilement qu'un roue dentée supplémentaire 4 dans la transmission en série sur la fig. 2.75, a, va conduire à un sens changée de la vitesse angulaire menée, ω_4 , par rapport au sens de la vitesse menante, ω_1 .

Transmission ordinaire par roues liées en parallèle (fig. 2.75, b).
On écrit similairement :

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_3}{\omega_4} = i_{12} i_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}, \quad (2.199)$$

où on a tenu compte que $\omega_2 = \omega_3$.

On voit que le rapport de transmission totale peut être obtenue très grand, en considérant un nombre nécessaire d'engrenages.

Les transmissions par roues dentées coniques sont moins utilisées. On représente sur la fig. 2.76 deux variantes de transmissions ordinaires mixtes qui contiennent un engrenage conique 1 - 2 et en plus :

1. un engrenage cylindrique 3-4 (fig. 2.76, a) ;
2. deux engrenages cylindriques, 3-4 et 5-6 (fig. 2.76, b).

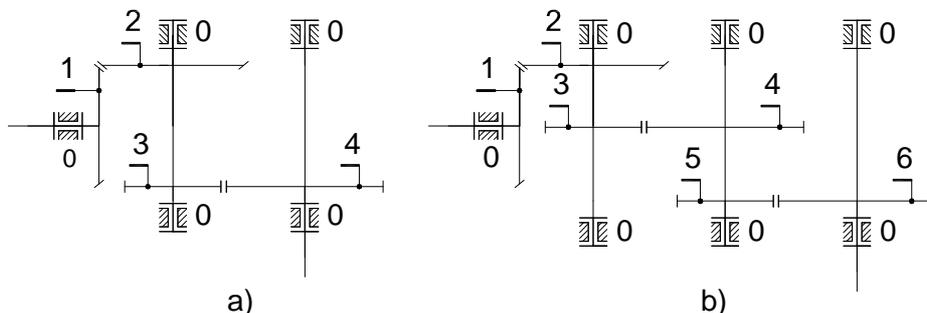


Fig. 2.76. Schémas cinématiques des trains ordinaires à une paire de roues conique 1-2 et, en plus, un ou deux engrenages cylindriques, 3-4 (a) et 5-6 (b)

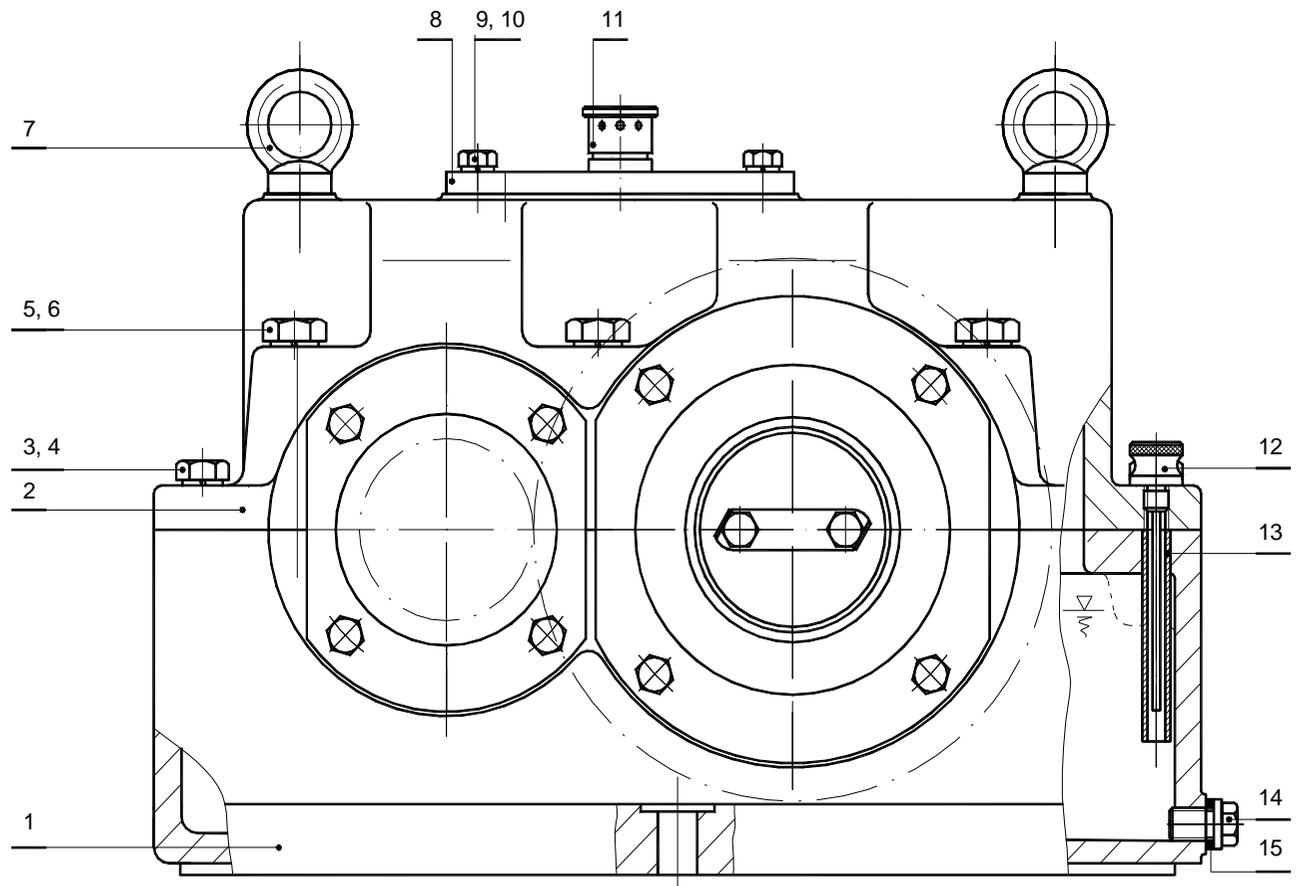


Fig. 2.77, a. Réducteur cylindrique (projection principale)

Observation. L'échelle de représentation du dessin d'ensemble ne se reproduit pas dans l'ouvrage à toutes les projections, à cause du format de la page.

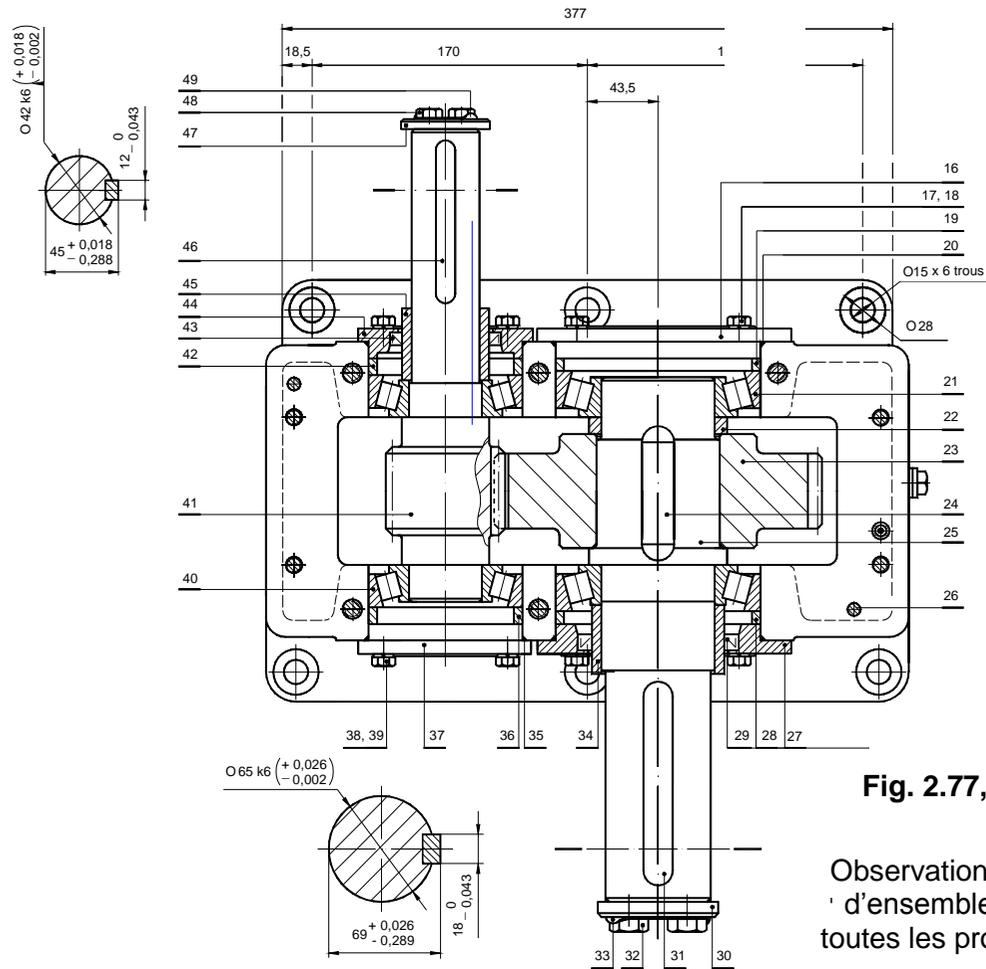


Fig. 2.77, b. Réducteur cylindrique (projection inférieure)

Observation. L'échelle de représentation du dessin d'ensemble ne se reproduit pas dans l'ouvrage à toutes les projections, à cause du format de la page.

28	Anneau distancier	1	C.1232F.1.2007-28	OLC.46 STAS 880-88	
27	Couvercle	1	C.1232F.1.2007-16	OL 50 STAS 500/2-80	
26	Goupille conique B6x40	2	STAS 3436-80	41 Mo Cr 11 STAS 791-88	
25	Arbre	1	C.1232F.1.2007-25	OLC.46 STAS 880-88	
24	Clavette B10x88x62	1	STAS 1004-81	OLC.46 STAS 880-88	
23	Roue dentée	1	C.1232F.1.2007-23	18 Mn Cr 10 STAS 791-88	
22	Anneau distancier	1	C.1232F.1.2007-22	OLC.46 STAS 880-88	
21	Roulement 30215	2	SR 3920:1994	-	
20	Anneau O 75x2,4	2	SR ISO 3601-1:2000	Caoutchouc	Résistance à T80 și T90 EP2
19	Anneau distancier	2	C.1232F.1.2007-19	OLC.46 STAS 880-88	
18	Rondelle Grower N8	16	SR 7666/2-1994	OLC.55 A STAS 792-92	Fe/Zn 8 ISO 2081
17	Boulon M8x25	16	STAS 4272-89	Gr. 8.8 STAS 2700/9-78	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
16	Couvercle	1	C.1232F.1.2007-16	OL 50 STAS 500/2-80	
15	Garniture d'étanchement	1	C.1232F.1.2007-15	Cu 99,5 recuit STAS 270/2-80	
14	Bouchon fileté M14x1,5	1	STAS 5304-80	OL 37 STAS 500/2-80	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
13	Douille	1	C.1232F.1.2007-13	OLT 35 STAS 288 1/87	
12	Nivelle d'huile	1	C.1232F.1.2007-12.0	-	
11	Filtre d'aérag	1	C.1232F.1.2007-11.0	-	
10	Rondelle Grower N8	4	SR 7666/2-1994	OLC.55 A STAS 792-92	Fe/Zn 8 ISO 2081
9	Boulon M8x12	4	STAS 4272-89	Gr. 8.8 STAS 2700/9-78	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
8	Couvercle	1	C.1232F.1.2007-8	OL 50 STAS 500/2-80	
7	Anneau - vis M10	2	STAS 3186-77	-	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
6	Rondelle Grower N10	4	SR 7666/2-1994	OLC.55 A STAS 792-92	Fe/Zn 8 ISO 2081
5	Boulon M12x35	4	STAS 4272-89	Gr. 8.8 STAS 2700/9-78	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
4	Rondelle Grower N10	4	SR 7666/2-1994	OLC.55 A STAS 792-92	Fe/Zn 8 ISO 2081
3	Boulon M10x30	4	STAS 4272-89	Gr. 8.8 STAS 2700/9-78	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
2	Carcasse supérieure	1	C.1232F.1.2007-2	FC.250 SR EN 1561:199	
1	Carcasse inférieure	1	C.1232F.1.2007-1	FC.250 SR EN 1561:199	
Pos.	Dénomination	Quantité	Nombre du dessin où standard	Matériau	Observations
Echelle 1:2					
Université POLITEHNICA de Bucarest, Chair d'Eléments de Machines et Tribologie					
REDUCTEUR CYLINDRIQUE DE NOMBRE DE TOURS					
C.1232F.1.2007 – 0					

Fig. 2.77, d. Réducteur cylindrique (cartouche d'inscriptions et nomenclatures de définition)

49	Rondelle	1	C.1232F.1.2007-33	OL 50 STAS 500/2-80	
48	Boulon M8x30	2	STAS 4272-89	Gr. 8.8 STAS 2700/9-78	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
47	Rondelle 55	1	STAS 8621-84	OL 50 S TAS 500/2-80	
46	Clavette A12x8x100	1	STAS 1004-81	OLC 45 STAS 880-88	
45	Anneau distancier	1	C.1232F.1.2007-45	OLC 45 STAS 880-88	
44	Couvercle	1	C.1232F.1.2007-44	OL 50 STAS 500/2-80	
43	Manchette A54x70x10	1	STAS 7950/2-87	-	Résistance à T80 și T90 EP2
42	Anneau distancier	1	C.1232F.1.2007-36	OLC 45 STAS 880-88	
41	Arbre- pignon	1	C.1232F.1.2007-41	18 Mn Cr 10 STAS 791-88	
40	Roulement 30309	2	SR 3920:1994	-	
39	Rondelle Grower MNB	4	SR 7666/2-1994	OLC 55 A STAS 792-92	
38	Boulon M8x25	4	STAS 4272-89	Gr. 8.8 STAS 2700/9-78	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
37	Couvercle	1	C.1232F.1.2007-37	OL 50 STAS 500/2-80	
36	Anneau distancier	1	C.1232F.1.2007-36	OLC 45 STAS 880-88	
35	Anneau O 95x2,4	2	SR ISO 3601-1:2000	Caoutchouc	Résistance à T80 și T90 EP2
34	Anneau distancier	1	C.1232F.1.2007-34	OLC 45 STAS 880-88	
33	Rondelle	1	C.1232F.1.2007-33	OL 50 STAS 500/2-80	
32	Boulon M12x30	2	STAS 4272-89	Gr. 8.8 STAS 2700/9-78	Fe/Ni 20 b Cr r ISO 1456
31	Clavette A18x11x125	1	STAS 1004-81	OLC 45 STAS 880-88	
30	Rondelle 80	1	STAS 8621-84	OL 50 STAS 500/2-80	
29	Manchette A85x110x10	1	STAS 7950/2-87	-	Résistance à T80 și T90 EP2

Fig. 2.77, e. Réducteur cylindrique (continuation des nomenclatures de définition)

La variante de **transmissions ordinaires contenant seulement des engrenages coniques** est rare en pratique (aux différentielles, aspect non discutée dans notre cours). La variante contenant trois roues coniques liées en série ou deux engrenages coniques liés en parallèle¹ ferait que la première et la dernière roue aient les axes parallèles. Mais cette situation pourrait être obtenue en utilisant des roues cylindriques, qui sont préférées pour leur portance plus grande.

Un exemple de transmission ordinaire avec un engrenage cylindrique est donné comme un dessin d'ensemble en trois projections sur la fig. 2.77.

¹ On propose comme exercice seulement pour une mieux compréhension à faire les schémas cinématiques pour ces cas non pratique, mais de discussion.

2.3.3. Transmissions planétaires par roues dentées

2.3.3.1. Introduction. Degré de mobilité

On a dit que la transmission planétaire contient roues dentées à axes de rotation mobiles autour des autres fixes. Des exemples sont donnés sur la fig. 2.78. Ces transmissions contiennent

1. **des roues centrales ou planétaires** (1 et 4), qui ont des axes de rotation fixes à la base 0.
2. **des satellites** (2 et 3), qui ont des axes de rotation mobiles autour de ceux fixés à la base ;
3. **le bras porte - satellites ou le châssis tournant** (H), qui soutient les arbres des satellites.

Les transmissions de roues dentées sont de mécanismes planes qui doivent accomplir une condition de mobilité : on doit établir le nombre des éléments menantes de telle sorte que le mouvement de toutes roues dentées soit déterminé. La théorie des mécanismes y utilise une expression de calcul du degré de mobilité, qui n'est pas analysée dans notre cours. Mais on peut constater intuitivement que le nombre nécessaire des éléments menants est deux pour tous les transmissions : normalement ils sont les roue centrales 1 et 4 ; l'élément mené sera le bras port - satellites H.

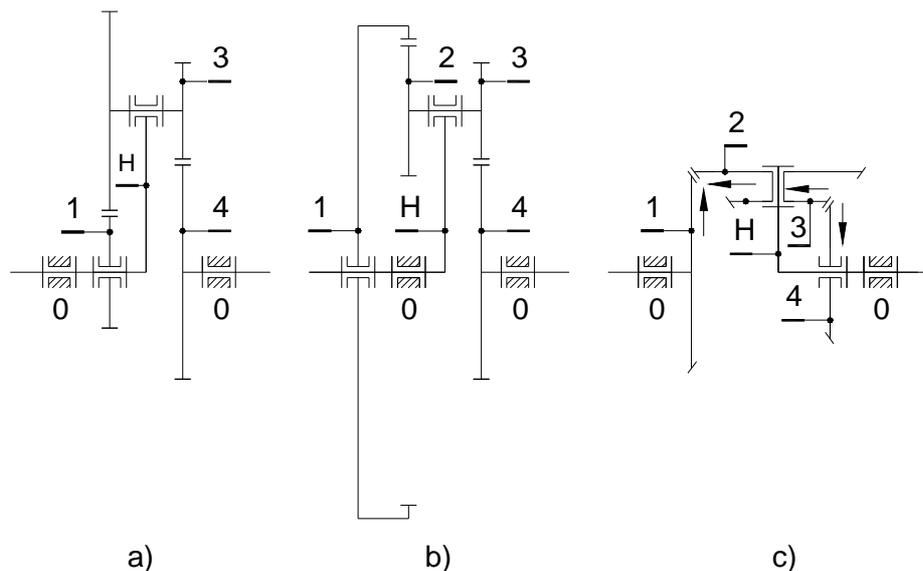


Fig. 2.78. Schémas cinématiques des trains planétaires à roues cylindriques (a, b) et coniques (c)

← Sages transversaux aux axes de rotation

On mentionne aussi que les suivantes aspects de dénominations liées du degré de mobilité :

1. si la transmission a le degré de mobilité égal à 2 (tous les exemples sur la fig. 2.78), il s'appelle **transmission différentielle** ;
2. si on fixe l'une des roues (centrales) menantes, on obtient un transmission qui a le degré de mobilité égal à 1 ; il est appelée **transmission planétaire proprement dit**.

2.3.3.2. Rapport de transmission du transmission planétaire proprement dit

Considérations générales. On discute ci-après le calcul du rapport de transmission du transmission planétaire proprement dit. On utilise la **méthode d'inversement du mouvement** (de Willis), qui permet la transformation du transmission planétaire en transmission ordinaire. Pour cela on superpose un mouvement supplémentaire à vitesse angulaire $-\omega_H$ sur le mouvement de chaque élément, de telle sorte que le bras H deviendra fixe.

On applique ce méthode premièrement aux transmissions par roues dentées cylindriques (fig. 2.78, a, b). On écrit cinématiquement :

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H}, \quad (2.200)$$

où le rapport de transmission du transmission à bras H fixe a été symbolisé par l'indice supérieur attaché H.

L'expression définitoire antérieure est développée en considérant au transmission planétaire proprement dit qui a, par exemple, la roue 4 fixée, $\omega_4 = 0$:

$$-\omega_H i_{14}^H = \omega_1 - \omega_H. \quad (2.201)$$

D'ici on peut obtenir le rapport de transmission, en considérant la roue 1 menante :

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{14}^H, \quad (2.202)$$

ou en considérant le bras port - satellites H menante :

$$i_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{1 - i_{14}^H}. \quad (2.203)$$

Pour calculer ces rapports, on doit exprimer le rapport i_{14}^H du transmission ordinaire par les éléments géométriques (nombres de dents).

Pour la variante du transmission de fig. 2.78, a on obtient en utilisant l'expression définitoire (2.200) :

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (2.204)$$

d'où on obtient le rapport de transmission du transmission ayant la roue 1 menante et le bras H menée, se voir l'expression (2.202) :

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{14}^H = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (2.205)$$

Si le bras H deviendrait menante (en place de la roue 1), on obtient le rapport de transmission dans ce cas en utilisant (2.203) :

$$i_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{1 - i_{14}^H} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}}. \quad (2.206)$$

Pour la variante du transmission de la fig. 2.78, b, le rapport i_{14}^H est défini géométriquement ainsi :

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (2.207)$$

En utilisant cette valeur, on peut obtenir les rapport de transmission du transmission dans les deux variantes d'élément menante (on propose comme exercice l'écriture de ces rapports).

Cas particulier de calcul pour la variante de la fig. 2.78, a. On considère un cas particulière des nombres de dents : $z_1 = 100$; $z_2 = 99$; $z_3 = 100$; $z_4 = 101$. On obtient le rapport de transmission :

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = \frac{1}{10000}.$$

Il en résulte que ce transmission est un multiplicateur ($i < 1$) à un rapport de transmission très petite (pratiquement non - fonctionnel) à cause du moment très grand qui doit être appliquée à la roue menante.

Si on considère que le bras H est menante, le rapport donné par (2.203) est :

$$i_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} = \frac{1}{1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100}} = 10000.$$

Ce transmission est un réducteur ($i > 1$) à un rapport de transmission très grande, qui s'obtient en utilisant seulement quatre roues dentées.

En conclusion, les transmissions planétaires par roues dentées assurent un rapport de transmission très grande par rapport à autres types de transmissions mécaniques.

Aspects concernant la transmission planétaire par roues coniques (fig. 2.78, c). Le rapport de transmission se déduit en appliquant la même méthode. Un problème est l'établissement du signe du rapport de transmission i_{14}^H de l'engrenage obtenue comme ordinaire en appliquant la méthode d'inversion du mouvement. Ce rapport est défini géométriquement par (2.200). Mai on met le problème à définir le signe de l'expression géométrique correspondante (se voir les expressions correspondantes (2.204) – pour la fig. 2.78, a – et (2.207) – pour la fig. 2.78, b, pour les transmissions par roues cylindriques.

On peut appliquer une règle de signe à l'écriture algébrique du ce rapport de transmission, qui est donnée par **la méthode de flèches transversales aux axes de rotation**. En acceptant un sens de la flèche à la roue 1, les autres flèches résultent de la condition que les deux flèches d'un engrenage soient convergentes ou divergentes à la génératrice commune. Finalement, on compare la première et la dernière flèche :

1. si elles ont le même sens, le rapport de transmission est plus ;
2. si elles ont des sens contraires, le rapport de transmission est moins.

à la transmission de fig. 2.78, c, les flèches des roues 1 et 4 ont des sens contraires, donc le rapport i_{14}^H est défini géométriquement ainsi :

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = - \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}. \quad (2.208)$$

En suite, se développe le calcul des rapports de transmission i_{1H} ou i_{H1} , en utilisant les expressions (!5.193) et (2.203).